

PRATIQUES LANGAGIÈRES DES MATHÉMATICIENS

Une étude de cas avec « avec »

Christophe HACHE

Laboratoire de didactique André Revuz (LDAR), Université Paris Diderot
IREM de Paris

*« Le langage n'est pas un insecte, mais rien de bien précis »
Corps de Langouste, Les têtes raides, 2013, tôt Ou tard*

Résumé. Je présente un exemple d'analyse des pratiques langagières des mathématiciens, celui de l'usage du mot « avec » dans les formulations de propositions mathématiques. Je confirme, dans ce cadre, l'intérêt d'une approche par la logique mathématique. J'interroge aussi les pratiques langagières (toujours autour du mot « avec ») dans l'institution scolaire au travers des études de manuels d'une part et de l'analyse d'un « incident » en classe d'autre part. Ce travail se place dans une réflexion plus globale sur le fait que les élèves découvrent en même temps les objets mathématiques (en général par un travail explicite avec l'enseignant) et la façon dont on en parle, sans que soit généralement interrogée cette façon de dire les mathématiques (pourtant indissociable de la façon dont on les pense) ou, sur un autre plan, la façon de travailler cette dialectique en formation et / ou en classe.

Mots clés. Langage, mathématiques, logique, didactique des mathématiques.

Abstract. I analyse the use of the word "avec" in the language practices of french mathematicians. I underline the interest of an approach based on mathematical logic about language practises analysis. I'm also questioning the language practices (around the word "avec" again) in the school institution: I analyze textbooks (for 10-14 years old pupils) and I'm focussing on some "incidents" in maths classroom. This work takes place in a field of questions about the fact that students learn at the same time mathematical objects (usually by an explicit work with the teacher) and the way to talk about it, and about the way to work this points in classroom.

Key-words. Language, mathematics, logic, didactics of mathematics.

Introduction

Considérons les trois phrases suivantes.

Si n est un entier impair, il s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k entier.

Si n s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k entier, alors n est un entier impair.

Les entiers impairs sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $2k + 1$ avec k entier.

Les quantifications universelles de la variable n dans les deux premières phrases sont implicites et liées à la présence d'une implication (phénomène bien identifié maintenant, voir par exemple Durand-Guerrier 1999 ou Lacombe 2011). Les trois quantifications de la variable k sont tout aussi implicites et toutes les trois exprimées par « avec k entier ». Elles ne sont cependant pas nécessairement à interpréter de la même façon dans les trois phrases (quantification universelle ou existentielle). Je reprendrai cet exemple plus loin. Je me demanderai dans cet article comment analyser les pratiques langagières des mathématiciens, j'essayerai d'en décrire certaines caractéristiques, et de trouver des traces de la façon dont les élèves appréhendent ces implicites.

1. Premières questions, éléments théoriques

Ce travail s'inscrit dans un contexte plus large de questionnement du rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il est tout d'abord important de préciser dans quel sens est entendu ici le mot "langage".

1.1. Pratiques langagières, contexte d'enseignement

J'utiliserai le mot "langage" dans le sens général de faculté que les hommes et les femmes ont à s'exprimer et à communiquer entre eux à l'aide d'une langue. Le mot "langue" est vu ici comme un ensemble de mots, un système de règles lexicales, grammaticales, syntaxiques, un réservoir intériorisé de signes partagés par une communauté (Rebière 2013).

Le langage a une dimension individuelle et une dimension sociale indissociables (Bronckart 2007). De façon générale, chaque groupe social développe des pratiques qui lui sont propres, y compris des pratiques langagières. Ces pratiques sont relativement stables, mais elles sont "vivantes", elles évoluent. Elles sont, dans une certaine mesure, spécifiques pour une communauté et montrent ce qui est acceptable en son sein, elles valident la pertinence des pratiques collectives aussi bien qu'individuelles et elles prennent part à la construction du lien social, à la cohérence du groupe, de ses activités et de sa façon de penser le monde (Rebière 2013). Pour un sujet donné, le langage n'est pas un média d'une pensée déjà constituée, c'est un outil de construction, de négociation et de transformation des représentations individuelles (celles du sujet considéré, celles des personnes avec qui il interagit). Les pratiques langagières constituent donc un objet d'étude particulièrement sensible dans une perspective de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage d'une discipline.

Ainsi les mathématiciens¹ ont une certaine façon d'utiliser la langue, ils en ont des pratiques, des usages spécifiques. On constate que les choses se disent, peuvent se dire (et s'entendre) de certaines façons. Sans qu'il y ait nécessairement une façon unique de dire quelque chose. Sans qu'il y ait besoin d'explicitier et de savoir décrire ces façons de faire, la plupart des "règles" sont implicites. Ces pratiques langagières spécifiques sont un des objets de mon étude. Les questions qui motivent cette étude sont liées à l'enseignement et à l'apprentissage de mathématiques. Les enseignants², notamment lors de leurs études universitaires, se sont naturellement imprégnés des pratiques langagières des mathématiciens³, ils ont même dû montrer qu'ils en avaient une maîtrise suffisante pour se faire comprendre et accepter, oralement et par écrit, lors d'examens ou de concours.

En classe⁴, les élèves étudient des notions, des résultats mathématiques, ils découvrent dans le même temps ces concepts et la façon dont on en parle. L'attention (des mathématiciens, des enseignants, des programmes etc.) est essentiellement portée sur le contenu, rarement sur le langage et les pratiques langagières. Ainsi, une fois étudiées les pratiques langagières des mathématiciens, nombre de questions se posent à propos

1 Dans un sens très large,

2 Je me limite ici aux enseignants du secondaire. La problématique est, de ce point de vue, très différente pour les enseignants du primaire : ils n'ont pas, pour une très grande majorité d'entre eux, suivi d'études supérieures en mathématiques.

3 Ici dans un sens restreint à une dimension statutaire de chercheur ou d'enseignant chercheur.

4 Sans distinguer secondaire et supérieur.

d'enseignement et d'apprentissage : comment les spécificités de ces pratiques langagières se transmettent-elles ? Comment la maîtrise (ou non) de ces pratiques est-elle acquise par les élèves ? Quel lien avec l'apprentissage des contenus ? Et, le cas échéant, que peut-on mettre en place pour travailler cette dimension de l'activité mathématique ?

Je proposerai un éclairage sur certaines de ces questions dans cet article.

Avant de poursuivre, quelques précisions de vocabulaire. Je vais parler de langage et de logique, le mot "langage" n'aura cependant pas dans la suite le sens qu'il a dans le cadre de la logique mathématique (comme dans l'expression "langage des prédicats" par exemple). Je m'efforcerai par ailleurs d'éviter l'expression "langage mathématique" et je lui préférerai l'expression "pratiques langagières des mathématiciens" pour souligner le fait que l'on parle d'une réalité sociale, complexe, multiple et non figée (l'expression "langage mathématique" donne par ailleurs l'impression d'une existence en soi, dans un sens qui serait presque proche de celui proposé ci-dessus pour "langue"). Enfin, le mot "discours" est souvent accolé aux mots "langue" et "langage", je lui réserverai le sens de l'instanciation pour un individu, dans une situation, à un moment donné, d'une certaine pratique langagière (en général orale, par opposition à "texte" qui jouerait le même rôle pour une expression écrite).

1.2. Pratiques langagières des mathématiciens

Les pratiques langagières des mathématiciens mélangent formalisme⁵ et langue naturelle et, à l'écrit, formalisme, langue naturelle et symboles de divers ordres.

D'une part on ne peut pas exprimer sans ambiguïté les mathématiques avec la langue naturelle. On a besoin d'outils formels pour exprimer les mathématiques, Frege se propose ainsi de créer un formalisme de référence avec son Idéographie et de supprimer tout usage de la langue naturelle (voir par exemple Frege 1882). Arriver à un usage formel de la langue est aussi, en quelque sorte, un des objectifs que se fixe Hilbert⁶. C'est encore ce que l'on constate de l'usage du grec ancien dans les éléments d'Euclide (voir Acerbi 2011).

D'autre part on ne peut pas communiquer ou penser complètement formellement (les mathématiciens ne sont pas des machines), écrire formellement semble hors de portée (ne serait-ce que pour des problèmes de taille) dès que les concepts et faits exprimés dépassent le niveau mathématique strictement élémentaire. On ne pourrait pas embrasser l'ensemble de ce qui serait exprimé formellement, le comprendre, le manipuler, le penser. Les pratiques langagières des mathématiciens s'appuient sur un mélange variable d'expressions formalisées (éventuellement sous forme symbolique à l'écrit) et de langue naturelle. Reconstituer et reconnaître les éléments de ce mélange est malaisé car les frontières sont floues, non explicites, non stables (elles dépendent du

5 Voir Hache (2013) : je définis formalisme par « mise en forme codifiée permettant de décrire les objets mathématiques, leurs propriétés et les preuves de leurs propriétés, et de contrôler la validité de ce qui est exprimé. La codification permet par ailleurs une manipulation relativement indépendante du sens (règles de transformation, de combinaisons etc.) »

6 Alain Herreman décrit l'objectif de Hilbert comme étant de rendre la langue « transparente » (elle joue un rôle, tout en étant ignorée, voir niée, on y recourt mais il est essentiel au propos qu'elle n'intervienne pas, elle a un rôle formel au sens précisé ci-dessus). Sur la notion de transparence, voir par exemple Herreman 2010.

locuteur, mais aussi de l'auditoire, du contexte, etc.), ce d'autant plus que l'expression formalisée peut se faire en langue naturelle (notamment à l'oral), il y a co-existence. Cette co-existence est une dialectique fructueuse (à maintenir, à entretenir, etc.) entre pensée, échanges, intuition, conjecture, exploration, élaboration de preuves d'une part, et rigueur, formalisme et preuve d'autre part (voir aussi Hache 2013).

De façon à décrire et analyser les objets mathématiques, les propositions concernant ces objets⁷, les preuves de ces propositions et la façon d'exprimer l'ensemble, et de façon à garantir la rigueur de leur travail, les mathématiciens ont développé des outils et formalismes, notamment ceux de la logique mathématique. Dans les analyses qui vont suivre, je me sers de la logique mathématique de façon plus restreinte comme d'un référent pour exprimer de façon formelle ce qui est dit ou écrit en me détachant de la langue naturelle, que ce soit au niveau de la formulation des définitions ou des propositions, ou au niveau des preuves. Cette approche est bien sûr proche de celle de Viviane Durand-Guerrier (voir par exemple Durand-Guerrier 2013), ma démarche se place aussi dans la continuité du travail de Daniel Lacombe, de René Cori ou de Zoé Mesnil (voir par exemple Lacombe 2011, Mesnil 2014).

Enfin, pour préciser l'approche décrite, je citerai Alain Berrendonner :

« User du modèle de la déduction logique pour représenter les discours quotidiens et leurs significations, c'est donc adopter comme norme la complétude qui est inhérente au concept de déduction. C'est faire l'hypothèse que les raisonnements tenus en langue naturelle vérifient, d'une façon générale, et quasi par définition, cette propriété d'être des totalités immanentes. C'est, par suite, se condamner à traiter comme "incomplet" ou "elliptique" tout discours qui manifeste de l'implicite, et dont la cohérence repose sur cet implicite ». (Berrendonner 1983, p. 211)

Il parle d'analyses de raisonnements, je me limiterai dans cet article essentiellement à l'analyse de formulation de propositions ou de définitions, mais la réflexion peut être adaptée : les analyses menées ici aboutissent à des résultats effectivement exprimés en termes de manques et d'implicites par opposition à un référent formel. Supprimer les implicites dans les discours n'est pas un but en soi, il s'agit plutôt ici de se donner les moyens d'appréhender et de comprendre la complexité des pratiques langagières des mathématiciens, de façon, au moins dans un premier temps, à élaborer des outils de prise de recul dans le cadre de l'enseignement des mathématiques (prise de recul notamment pour les enseignants). De même la référence à une expression plus formelle et éventuellement l'utilisation de façon plus systématique d'une écriture symbolique pour analyser les pratiques langagières des mathématiciens, ne doivent pas être confondues avec la volonté de ne parler que formellement ou avec la volonté d'utiliser plus systématiquement tel ou tel formalisme.

Pour aborder les questions énoncées ci-dessus, il m'a ainsi semblé intéressant de me pencher sur des exemples simples de pratiques langagières courantes pour les mathématiciens, liées aux usages du mot « avec ». On verra qu'ils sont susceptibles de mener à des difficultés de compréhension, à des quiproquos, etc. Je commencerai par faire une analyse logique de quelques exemples permettant de mettre en évidence

⁷ J'appelle « proposition » des affirmations de faits concernant des objets mathématiques. Une proposition est susceptible d'être vraie ou fausse (« susceptible » au sens où je pourrai décider de la véracité de la proposition $x^2 > 2$ en affectant une valeur à la variable x).

certains des implicites. Je chercherai ensuite deux types de traces de ces usages dans les textes de référence pour les élèves : une recherche systématique de ces expressions dans des manuels de collège, et une étude d'un cas repéré comme plus complexe à priori, les mesures d'angles en 1^{re}S.

2. Analyse logique

2.1. Propositions mathématiques

Dans les pratiques langagières des mathématiciens, certains usages du mot « avec » sont liés à la quantification. C'est sur ce point que je vais me concentrer.

On écrit ainsi « si n est un entier impair, il s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k entier ». On peut expliciter la quantification universelle implicite de la variable n liée à l'implication : « quelque soit l'entier naturel n , si n est un entier impair alors il s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k entier » (*). Si on souhaite préciser le sens de « avec k entier » dans cette phrase ou comprendre le rôle qu'y joue la variable k , la façon dont elle est quantifiée, on est amené à écrire « quelque soit l'entier naturel n , si n est un entier impair alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$ » ou, dans une formulation plus symbolique, « $\forall n \in \mathbb{Z} (n \text{ impair} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} n = 2k + 1)$ ».

L'expression « ... s'écrit sous la forme ... avec ... » est une expression figée et très utilisée, « avec k entier » marque ou souligne ici la présence d'une quantification existentielle (on trouve des expressions très proches en remplaçant « avec » par « où », « pour », « , » ou « tel que », ou en remplaçant « s'écrit sous la forme » par « vérifie »). Je pointe au passage le fait que la présentation de la variable k est exprimée en fin de phrase, après l'usage de la variable concernée, cela rejoint les analyses de Farasololalao Rakotovoavy (Rakotovoavy 1983) sur les marqueurs de variances (« quelconque », « donné », « fixé » etc.). Je ne développerai pas ce point de l'analyse ici.

Je vais maintenant m'intéresser à la réciproque de la proposition (*).

En gardant explicite la quantification universelle de la variable n celle-ci s'écrit « quel que soit l'entier naturel n , si n s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k entier alors n est un entier impair » ; ou, sous forme plus symbolique,

$$\ll \forall n \in \mathbb{Z} ((\exists k \in \mathbb{Z} n = 2k + 1) \Rightarrow n \text{ impair}) \gg \quad (**).$$

On peut donc également voir ce « avec k entier » comme la marque de la présence d'une quantification existentielle.

Je tiens cependant à mettre en avant une nuance. On peut en effet prouver que la proposition $(\exists x P[x]) \Rightarrow Q$ est équivalente à la proposition $\forall x (P[x] \Rightarrow Q)$ ⁸. La proposition (**) est donc équivalente à $\forall n \in \mathbb{Z} \forall k \in \mathbb{Z} (n = 2k + 1 \Rightarrow n \text{ impair})$, c'est-à-dire que l'on peut formuler « Quels que soient les entiers n et k , si $n = 2k + 1$ alors n est un entier impair ». Cette équivalence montre que, dans la phrase « quelque soit l'entier naturel n , si n s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k entier alors n est un entier impair », le « avec k entier » pourrait donc être légitimement entendu comme marquant la présence d'une quantification universelle.

⁸ P et Q sont des propositions, x est une variable libre de P , mais pas de Q . L'équivalence citée est un résultat classique de logique (une preuve utilise l'équivalence entre $A \Rightarrow B$ et $\neg A \vee B$, où A et B sont des propositions).

Les formulations suivantes accentuent cette possibilité et le fait que l'interprétation de « avec k entier » n'est pas univoque :

« tout nombre entier s'écrivant sous la forme $2k + 1$ avec k entier est impair »,
 « tout nombre de la forme $2k + 1$ (avec k entier) est impair »,
 ou « tous les nombres de la forme $2k + 1$ (avec k entier) sont impairs ».

On retrouve une double interprétation possible de « avec » dans une autre expression figée d'usage courant : « les ... sont les ... avec ... », expression utilisée par exemple dans la phrase : « les entiers impairs sont les nombres qui s'écrivent $2k + 1$ avec k entier » (***) (dans ces expressions « avec » est parfois remplacé par « où », « pour », « , » ou « tel que » ; et « s'écrit sous la forme » est parfois remplacé par « vérifie »).

Cette expression affirme l'égalité de deux ensembles :

$I = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} n = 2k + 1\}$ (je note I l'ensemble des nombres impairs), ce qui signifie à la fois que $\forall k \in \mathbb{Z} 2k + 1 \in I$ et $\forall n \in I \exists k \in \mathbb{Z} n = 2k + 1$.

En prononçant la phrase (***), un mathématicien peut vouloir souligner ou utiliser l'une ou l'autre de ces propositions (ou les deux), en entendant cette phrase un mathématicien l'interprétera dans un sens ou dans l'autre de façon naturelle et, pour lui, transparente. On voit donc que « avec k entier » est alors à entendre ici alternativement (ou simultanément) comme une marque de la présence d'une quantification universelle ou d'une quantification existentielle. Globalement, « avec » peut donc être lu ou entendu, dans des structures de phrases très proches, comme lié à une quantification existentielle, ou à une quantification universelle, ou aux deux. On présentera d'autres usages mathématiques du mot « avec » par la suite.

Je précise qu'il n'y a pas de jugement de valeur dans les analyses faites ci-dessus. Je ne critique pas le fait qu'il existe telle ou telle ambiguïté, elles permettent aux mathématiciens de s'exprimer simplement, de se comprendre, de penser. Et elles sont naturalisées au point que toute personne ayant une certaine culture mathématique saura reformuler au fil de son discours (ou du discours de son interlocuteur) les expressions évoquées ci-dessus dans un sens ou dans l'autre selon ses besoins, de manière naturelle, sans même s'en rendre compte. La question est bien sûr moins évidente pour un élève apprenant les mathématiques : il découvre en même temps les objets mathématiques (en général par un travail explicite avec l'enseignant) et la façon dont on en parle (rarement de façon explicite).

Je ne prône pas non plus ici un usage plus systématique de tel ou tel formalisme : le symbolisme utilisé dans les paragraphes précédents sert de référent au cours de l'analyse pour exprimer les structures logiques des phrases mathématiques envisagées, pour pouvoir en parler, en préciser le sens, les comparer etc. ; il n'est pas pris comme modèle (au sens du modèle à suivre). Il ne s'agit pour l'instant que de réfléchir sur les pratiques langagières des mathématiciens.

2.2. Preuves

Je ne développerai pas ici d'analyse langagière liée à l'expression des preuves en mathématiques. Pour compléter l'analyse précédente, je souligne cependant qu'au fil d'une démonstration, une quantification existentielle a souvent un rôle multiple. Le fait d'affirmer « $\exists k P(k)$ » (formulé d'une façon ou d'une autre, explicitement ou non)

signifie que la proposition $\exists k P(k)$ est vraie dans le contexte envisagé, mais annonce aussi en général⁹ que l'on va considérer pour la suite un élément rendant vraie la proposition P et que l'on va appeler cet élément k .

On peut par exemple trouver les trois phrases suivantes¹⁰ :

- « Soit n un entier pair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p$. Il vient alors $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$. Ainsi n^2 est pair »
- « Si n est pair, il existe un entier p tel que $n = 2p$, donc on obtient : $n^2 = 4p^2 = 2(2p^2)$ donc l'entier n^2 est pair »
- « Si n est pair, c'est-à-dire $n = 2p$ pour $p \in \mathbb{N}$, alors $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$, et puisque $p^2 \in \mathbb{N}$ alors n^2 est pair »

Dans ces phrases la première apparition de p correspond à une quantification existentielle (pour la troisième c'est implicite, mais les auteurs utilisent tous les trois $\exists p P(p)$). On voit bien cependant que ce n'est pas que cela, ne serait-ce que parce que, dans la proposition $\exists p P(p)$, la variable p est muette ($\exists p P(p)$ ne parle pas d'un objet qui s'appellerait p , il est strictement équivalent d'affirmer $\exists a P(a)$) : dans ces phrases, l'affirmation de l'existence d'un nombre p vérifiant une propriété (être pair), annonce aussi le choix d'un tel nombre et le fait que l'auteur nomme p le nombre choisi.

Pour revenir à notre fil conducteur, on voit donc que dans la 3^e phrase de mathématicien évoquée ci-dessus : « Si n est pair, c'est-à-dire $n = 2p$ pour $p \in \mathbb{N}$, alors $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$, et puisque $p^2 \in \mathbb{N}$ alors n^2 est pair », on ne peut pas dire que « pour $p \in \mathbb{N}$ » (proche d'un « avec $p \in \mathbb{N}$ ») marque simplement la présence d'une quantification existentielle. La formulation de propositions et la gestion des variables sont plus complexes lorsqu'elles sont faites au sein d'une preuve.

3. Études de manuels

Il n'est pas difficile de trouver des exemples de phrases dans les manuels du secondaire comportant (au moins) les implicites évoqués ci-dessus, y compris à des niveaux assez élémentaires. J'ai ainsi fait une étude systématique des usages de « avec » dans les manuels de collège *Transmath* (classe de 6^e édition 2005, classe de 5^e édition 2006, classe de 4^e édition 2007 et classe de 3^e édition 2008) et *Sésamath* (classes de 6^e, 5^e, 4^e, 3^e édition numérique 2008).

Je souligne tout d'abord que la plupart des occurrences de « avec » dans les manuels n'ont pas de lien avec une quantification (comme dans « justifie tes réponses avec soin », « vérifie avec le rapporteur »). En 6^e et en 5^e les usages en lien avec les quantifications sont quasi inexistantes (en rassemblant les deux manuels étudiés, on arrive à environ 3 % des occurrences en 6^e et 5^e), en 4^e et en 3^e l'usage est plus marqué (environ 11 % des occurrences en 4^e et 15 % en 3^e).

Je vais analyser quelques exemples d'utilisation de « avec » en lien avec la gestion des variables dans l'expression de propositions mathématiques dans ces manuels.

9 Ce n'est pas le cas quand on affirme « $\exists k P(k)$ » comme conclusion, aboutissement d'une preuve.

10 Phrases extraites de preuves de mathématicien.ne.s recueillies dans le cadre d'une expérimentation en cours (il était demandé une preuve de « Un nombre entier et son carré ont toujours même parité » à destination d'étudiants de première année d'université). Je précise que dans la seconde phrase la variable p a été ici renommée pour simplifier, elle s'appelait q dans le texte de l'auteur.

3.1. Quantifications existentielles

Considérons les deux extraits suivants :

E1 – Transmath 3^e, p.308 (corrigé des exercices) :

Remarque : Deux nombres impairs consécutifs peuvent s'écrire aussi $2k + 1$ et $2k + 3$ avec k entier et $k \geq 0$.

E2 – Transmath 3^e, p.43 :

112 $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel
On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire que l'on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec a et b nombres entiers premiers entre eux.

Dans ces deux extraits, « avec » marque la présence d'une quantification existentielle. Dans les deux cas, l'ensemble auquel doit (doivent) appartenir le(s) nombre(s) considéré(s) est présenté de façon complexe : deux conditions pour la remarque E1, une condition sur le couple des deux nombres pour l'exercice E2. On constate ici la complexité de l'imbrication de la langue naturelle et d'une langue plus formalisée avec le « aussi » de la remarque E1 qui souligne (langue naturelle) un lien avec le contexte de la page et qui est inséré au milieu d'une formulation figée (« s'écrire ... avec ... »).

Les phrases dans lesquelles « avec » marque la présence d'une quantification existentielle peuvent avoir une structure moins simple, ainsi dans E3 et E4 :

E3 – Sésamath 3^e, p.14 :

b. Explique pourquoi tout nombre entier naturel peut s'écrire sous la forme $13k + p$ où k et p sont des entiers avec p compris entre 0 et 12.

Dans l'extrait E3, la phrase « tout nombre entier ... entre 0 et 12 » a une structure grammaticale et une structure logique plus complexes que les précédentes. Le « où » marque la présence d'une quantification existentielle, le « avec » précise une seconde condition sur p . Il est en effet classique, dans ce contexte où l'on souhaite donner deux contraintes successives de ne pas répéter deux fois « avec » (ou « où », ou « tel que » etc.) et de remplacer le premier ou le deuxième par un équivalent.

E4 – Transmath 4^e, p.57 :

a. Expliquer pourquoi $a - b$ pourrait s'écrire $\frac{k}{209 \times 133}$, au signe près, avec k nombre entier supérieur ou égal à 1.

Les deux extraits E3 et E4 sont des injonctions, l'une exprimée par un impératif « explique pourquoi P » et l'autre par un infinitif « expliquer pourquoi Q » (P et Q sont des propositions mathématiques). Les deux phrases ont donc une structure proche, on peut noter cependant que dans E4 la phrase mathématique considérée est au

– **condition de vérité** : cette proposition peut signifier que $Q(x)$ est vrai pour les x vérifiant $P(x)$, x prenant ses valeurs dans un ensemble défini par ailleurs en général plus large que l'ensemble des x vérifiant $P(x)$. Ce premier sens fait de cette proposition un synonyme de $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$.

Par exemple¹³ : $\forall x > 0 \sqrt{x^2} = x$ est synonyme de $\forall x (x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x)$

– **condition de sens** : cette proposition peut aussi être utilisée dans une situation où $Q(x)$ n'a de sens que pour des x qui vérifient $P(x)$ et est vrai pour les x vérifiant $P(x)$.

Exemple : dans la proposition $\forall x > 0 (\sqrt{x})^2 = x$ la condition $x > 0$ est une condition pour que la proposition $(\sqrt{x})^2 = x$ ait un sens (et soit vrai). On veut en fait signifier que si la variable x prend ses valeurs dans \mathbb{R}_+ la proposition $\forall x (\sqrt{x})^2 = x$ est vraie¹⁴.

On retrouve ce type d'usage (quantification relativisée pour donner une condition de sens) dans les manuels de collège étudiés.

E6 – Sésamath 6^e, p.65 (cours) :

Un quotient ne change pas quand on **multiplie** son numérateur et son dénominateur par un **même nombre** non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \text{ où } a, b \text{ et } k \text{ sont des nombres, avec } b \neq 0 \text{ et } k \neq 0.$$

Dans cet exemple, à la troisième ligne, le « avec » précise les valeurs des variables b et k pour lesquelles l'expression écrite a un sens, on peut alors considérer que le « où » marque la présence d'une quantification universelle (moyennant cette condition de sens), ou qu'il exprime globalement la condition de sens. À propos des quantifications, notons aussi, au passage, dans la formulation de la première phrase, l'usage (classique) de l'article « un » pour signifier une quantification universelle.

E7 – Transmath 3^e, p.31 (cours) :

PROPRIÉTÉ

Le quotient des racines carrées de deux nombres positifs est égal à **la racine carrée de leur quotient**. Ainsi, quels que soient les nombres positifs a et b , avec $b \neq 0$:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{Et donc aussi } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

La seconde phrase de l'extrait E7 énonce, en partie avec un « avec » ($b \neq 0$) et en partie avec une quantification universelle explicite (a et b positifs), que l'égalité écrite n'a de sens que si a et b vérifient les conditions, et est vraie dans ces conditions. On peut se demander quel critère a mené à écrire « $b \neq 0$ » en rouge en laissant en noir « positifs ».

13 Remarque : dans cet exemple x prend ses valeurs dans \mathbb{R} , $P(x)$ est la proposition $x > 0$, $Q(x)$ la proposition $\sqrt{x^2} = x$, la formulation « $\forall x$ tel que $x > 0$ » est classiquement abrégée en $\forall x > 0$.

14 Même si la reformulation en terme d'implication proposée pour la condition de vérité n'a pas lieu d'être ici (la proposition $\forall x (x > 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = x)$ n'a en effet pas de sens pour une variable prenant ses valeurs dans \mathbb{R}), l'utilisation d'une formulation en langue naturelle identique à celle d'une implication, du type « si x est un nombre réel positif, alors $\sqrt{x^2} = x$ », est fréquente.

3.4. Autres usages mathématiques

Certaines utilisations, classiques, ne correspondent pas à des quantifications, mais à ce que l'on pourrait appeler des affectations de valeur à une variable. On retrouve notamment de nombreux usages de ce type dans le contexte algébrique, comme ceci :

E8 – Transmath 3^e, p.50 (exercices corrigés) :

| | |
|---|--|
| <p>Exemple 1 : développer $A = -5x(2x - 3)$. $A = -5x(2x - 3) = -5x \times 2x - (-5x) \times 3$ $A = -5 \times 2 \times x \times x + 5 \times 3 \times x$ donc $A = -10x^2 + 15x$.</p> | <p>On applique $k(a - b) = ka - kb$ avec $k = -5x$, $a = 2x$, $b = 3$.</p> |
|---|--|

Mais aussi en géométrie, affectation d'une valeur à une mesure de grandeur en géométrie, comme cela :

E9 – Sésamath 6^e, p.109 :

| |
|--|
| <p>32 <i>Losanges</i> a. Construis un losange ABCD avec $AB = 4$ cm.</p> |
|--|

3.5 Bilan

On constate donc une variété (sans doute ici non exhaustive) d'usages de « avec » en lien avec les variables : quantification universelle, quantification existentielle, quantification universelle existentielle, condition de sens d'une expression, affectation de valeur, etc. Il ne faut pas oublier que, par ailleurs, tous ces extraits de manuels sont situés dans des pages où le mot « avec » est aussi utilisé conformément aux différents usages et sens de la langue française.

Quoi qu'on en pense, les extraits ci-dessus et leurs commentaires ne sont pas à lire comme une condamnation de telle ou telle façon de dire (d'écrire dans un manuel en l'occurrence), mais plutôt comme le constat que les pratiques langagières des mathématiciens (ou des traces de ces pratiques) apparaissent très tôt et avec toute leur complexité dans les manuels de mathématiques. Au delà de ce constat, je me pose la question suivante : comment les élèves apprennent-ils les subtilités des usages de ce mot pour les mathématiciens ? À quel moment ? Dans quelle mesure le fait de ne pas avoir ce type de connaissance ou de maîtrise des pratiques langagières en jeu est-il un obstacle à l'apprentissage des notions dont il est question ?

Une question d'une autre nature reste bien sûr entière. Même si on peut faire l'hypothèse d'une certaine continuité, à quel point la façon dont sont écrits les manuels est-elle proche de la façon dont les enseignants écrivent et parlent en classe ? Avec cette hypothèse d'une certaine continuité, il serait intéressant d'observer la façon dont les enseignants compensent (consciemment ou non) les difficultés signalées.

Je ne répondrai pas ici à ces questions. J'ai analysé certains usages courants de « avec » chez les mathématiciens, j'ai montré que les manuels reproduisent ces usages dans toute leur variété et toute leur difficulté, ce dès le début du collège. Comment les élèves s'en sortent-ils ? Pour apporter des éléments de réponses à cette question je présente une étude de cas en classe de 1^{er}S autour de la notion de mesure d'angles de vecteurs.

4. Les mesures d'angles en 1^{re}S

Pour l'atelier « Explicitons les implicites » des journées APMEP 2013, nous avons présenté et analysé, avec Emmanuelle Forgeoux, un « incident constructif » intervenu en 1^{re}S lors d'une séance de correction d'un exercice de géométrie. La séance n'était pas expérimentale, et n'a pas été enregistrée. J'en propose un aperçu et une analyse.

Je présente tout d'abord quelques éléments sur la façon dont sont définies les mesures d'angles de vecteurs en 1^{re}S : un tel angle n'a pas une mesure, mais un ensemble de mesures, toutes égales entre elles à un multiple de 2π près. On est dans une situation que l'on peut décrire avec une phrase du type « les ... sont les ... avec ... ». On le voit sur ces extraits de manuels :

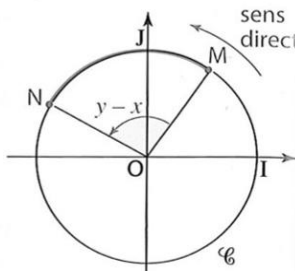
E10 – Hyperbole 1^{re}S, p.188 (cours) :

\mathcal{C} est le cercle trigonométrique de centre O et $(O; I, J)$ est un repère orthonormé direct.

DÉFINITION Sur le cercle \mathcal{C} , M est le point image d'un nombre réel x et N le point image d'un nombre réel y .

Les mesures en radians de l'angle orienté $(\vec{OM}; \vec{ON})$ sont les nombres réels $y - x + k2\pi$ où k est un entier relatif.

On note $(\vec{OM}; \vec{ON}) = y - x + k2\pi$ ou plus simplement $(\vec{OM}; \vec{ON}) = y - x$.

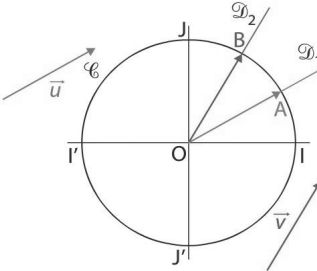


E11 – Indice 1^{re}S, p.170 :

Angle orienté de deux vecteurs non nuls

Définition Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. Soit \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 les demi-droites d'origine O, ayant pour directions respectives \vec{u} et \vec{v} , et coupant le cercle trigonométrique en A et B, alors l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) est le couple (\vec{OA}, \vec{OB}) .

Définition Soit A et B des points du cercle \mathcal{C} , associés aux réels a et b , par enroulement de la droite des réels autour du cercle. Les mesures, en radians, de l'angle orienté (\vec{OA}, \vec{OB}) sont les réels $b - a + k \times 2\pi$ (avec k entier). On écrit $(\vec{OA}, \vec{OB}) = b - a + k \times 2\pi$.



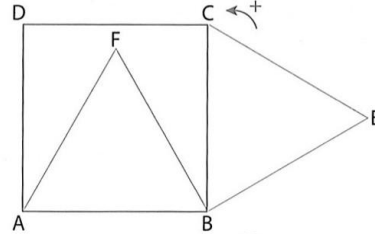
On a étudié plus haut cette formulation d'une égalité de deux ensembles (ou d'une équivalence), la quantification de la variable k peut être lue universelle ou existentielle (ou les deux) selon la lecture faite ou l'usage envisagé de la définition. La situation est ici compliquée par le fait que « (\vec{u}, \vec{v}) » peut désigner l'angle ou une de ses mesures ou « sa mesure » (l'ensemble de ses mesures ? Sa mesure modulo 2π ? Sa mesure dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$?).

Les deux définitions se terminent par des phrases dont le sens est difficile à interpréter : « On note $(\vec{OM}; \vec{ON}) = y - x + k2\pi$ ou plus simplement $(\vec{OM}; \vec{ON}) = y - x$ » ou « On écrit $(\vec{OA}, \vec{OB}) = b - a + k \times 2\pi$ ». Que représentent $(\vec{OM}; \vec{ON})$ et (\vec{OA}, \vec{OB}) ? Qui est k dans ces phrases ? Comment manipuler ces notations ?

Pendant la séance évoquée, lors de la correction (collective) de l'exercice ci-contre, un premier débat avait mené la classe à la décision de ne pas suivre à la lettre l'exercice, d'essayer de minimiser le recours à la lecture graphique et de ne travailler qu'avec des angles de vecteurs.

E12 – Math'x 1^{re}S, p.301 :

29 ABCD est un carré direct (c'est-à-dire que (\vec{AB}, \vec{AD}) a pour mesure principale $\frac{\pi}{2}$), ABF et CBE sont équilatéraux et directs (c'est-à-dire que (\vec{AB}, \vec{AF}) et (\vec{CB}, \vec{CE}) ont pour mesure principale $\frac{\pi}{3}$).



1. Donner une mesure de l'angle \widehat{DFA} en radians et en déduire par lecture graphique une mesure de (\vec{FD}, \vec{FA}) .
2. Déterminer de même une mesure de l'angle \widehat{BFE} puis une mesure de l'angle (\vec{FB}, \vec{FE}) .
3. Déterminer une mesure de l'angle (\vec{FD}, \vec{FE}) .
Que peut-on en déduire pour les points D, E et F ?

La correction de la première question est élaborée collectivement au tableau. Elle pourrait se résumer comme ceci¹⁵ :

| | |
|--|--------|
| D'après la propriété de la somme des angles d'un triangle on a | |
| $(\vec{AF}, \vec{AD}) + (\vec{FD}, \vec{FA}) + (\vec{DA}, \vec{DF}) = \pi + 2k\pi$ avec k dans \mathbb{Z} | (i) |
| On sait que | |
| $(\vec{AF}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec k dans \mathbb{Z} | (ii) |
| (pour le montrer on utilise le fait que $(\vec{AB}, \vec{AF}) = \frac{\pi}{3}$ (2π) car le triangle ABF est équilatéral, et le fait que $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$ (2π) car ABCD est un carré) | (iii) |
| et que | |
| $(\vec{FD}, \vec{FA}) = (\vec{DA}, \vec{DF})$ (car le triangle AFD est isocèle de sommet A). | (v) |
| On obtient donc | |
| $\frac{\pi}{6} + 2(\vec{FD}, \vec{FA}) = \pi + 2k\pi$ avec k dans \mathbb{Z} | (vi) |
| et donc | |
| $2(\vec{FD}, \vec{FA}) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ avec k dans \mathbb{Z} . | (vii) |
| On arrive enfin à | |
| $(\vec{FD}, \vec{FA}) = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ avec k dans \mathbb{Z} | (viii) |

¹⁵ Reconstitution d'un résumé de ce qui est écrit au tableau à l'issue de la première phase de la correction (les phrases entre parenthèses ne sont pas écrites)

Une fois cette rédaction proposée, un élève a réagi en disant « c'est faux / On voit que F D F A ne peut pas avoir comme mesure dix sept pi sur douze » et a emporté la conviction de ses camarades : quelque chose n'allait pas. Après avoir vérifié chaque étape du raisonnement, la discussion a porté sur la variable k : « qui est k à chaque ligne du calcul ? ». Il a fallu ensuite relire le cours sur les mesures, y expliciter les quantifications, reprendre la preuve proposée, expliciter là aussi les quantifications etc.

Je propose ici une analyse du texte de preuve reconstitué ci-dessus.

La phrase (i) est complexe. Il est clair que les notations $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FA})$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF})$ représentent des nombres (puisqu'on les additionne et que le résultat de la somme est un nombre). Je propose, à ce niveau, de lire, de comprendre la phrase (i) ainsi : « on appelle m une des mesures de l'angle $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$, m' une des mesures de l'angle $(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FA})$ et m'' une des mesures de l'angle $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF})$, il existe un nombre entier k_1 tel que $m + m' + m'' = \pi + 2k_1\pi$ ».

La phrase (ii) est du type de celles du cours (voir E10 et E11) : elle donne donc l'ensemble des mesures de $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$. Je reformule ainsi : « quelque soit k_2 dans \mathbb{Z} tous les nombres de la forme $\frac{\pi}{6} + 2k_2\pi$ sont des mesures de $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$, et si un nombre est une mesure de $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$ alors il existe un k_2 dans \mathbb{Z} tel que ce nombre puisse s'écrire $\frac{\pi}{6} + 2k_2\pi$ ». Le calcul de $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$ n'est pas explicité, il utilise les résultats donnés en (iii) et (iv) (même type d'égalité que (ii)) et la relation de Chasles (égalité qui a la même complexité que (i)).

La phrase (v) peut être lue simplement comme une égalité d'angles de vecteurs, chercher une interprétation en termes de mesures d'angles alourdirait le propos.

La phrase (vi) est déduite de la phrase (i) par la règle d'instanciation universelle en substituant $\frac{\pi}{6}$ à m (ce qui repose sur (ii) : $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$) et m'' à m' (ce qui repose sur (v) : les deux vecteurs étant égaux toute mesure de l'un est une mesure de l'autre). On peut lire la phrase (vi) ainsi : « on appelle m' une des mesures de l'angle $(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FA})$, il existe un nombre entier k_3 tel que $\frac{\pi}{6} + 2m' = \pi + 2k_3\pi$ ».

Les lignes (vii) et (viii) sont déduites suites à des calculs arithmétiques : du fait qu'il existe k_3 tel que $\frac{\pi}{6} + 2m' = \pi + 2k_3\pi$, on déduit qu'il existe k_3 tel que $2m' = \frac{5\pi}{6} + 2k_3\pi$ (reformulation de (vii)) et qu'il existe k_3 tel que $m' = \frac{5\pi}{12} + k_3\pi$ (reformulation de (viii)).

Les valeurs numériques sont différentes, mais la phrase (viii) qui est écrite a strictement la même forme que la phrase (ii), et la même structure que la phrase du cours. On n'y donne pourtant pas l'ensemble des mesures de $(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FA})$: « avec k dans \mathbb{Z} » ne marque pas la présence d'une quantification universelle comme dans la plupart des situations où cette expression est croisée en 1^{er}S dans le contexte des angles. Bien sûr un lecteur averti ne s'y trompera pas (et ne passera pas par cette succession de reformulations : les choses vont simplement de soi).

Pour les élèves ces enchaînements de « avec », précédés de ceux du cours, le tout dans un contexte d'apprentissage de la notion de la mesure d'angles de vecteurs (et de la notion d'angles de vecteurs, et récemment de la notion de vecteur), n'avaient en tout cas rien de transparent. Il aura fallu 45 minutes de travail pour éclaircir ce qui avait été écrit (et revisiter les formulations du cours).

Conclusion et perspectives

J'espère avoir ainsi montré sur ces exemples, certains usages du mot « avec », la façon dont les pratiques langagières des mathématiciens peuvent comporter des structures complexes et exprimer certaines informations, pourtant cruciales, de façon implicite ou détournée. J'ai montré des traces de ces pratiques et de ces implicites complexes très tôt dans les manuels scolaires (dès la 6^e, et de façon vraiment marquée à partir de la 4^e sur l'exemple d'usage étudié ici). Même si cela ne peut être généralisé en l'état on observe rapidement dans la scolarité (ici en 1^{re}S) des difficultés qui peuvent être interprétées en termes d'incompréhension de ces usages.

Les perspectives de travail et les questions sont nombreuses.

Une première série de questions porte sur les analyses du langage elles-mêmes.

On l'a vu et c'est prouvé par ailleurs (voir la synthèse proposée par Durand Guerrier 2013) le calcul des prédicats est un référent riche pour analyser les pratiques langagières des mathématiciens. Il est cependant difficile de n'avoir des outils que pour analyser les formulations de propositions ou les définitions. Très rapidement, notamment dans la gestion des variables dans des textes plus longs, mais c'est aussi vrai pour l'expression des déductions dans les preuves par exemple, cette référence est insuffisante. C'est d'autant plus gênant quand on s'intéresse aux formulations produites par les élèves : il est très rare qu'on leur demande de formuler des définitions ou des propositions, il est plus fréquent qu'ils aient à formuler des preuves, ou des morceaux de preuves. Des travaux ont déjà été menés pour utiliser différentes modélisations de preuves dans des analyses de discours (voir par exemple Barrier et Durand Guerrier 2013, Hache à paraître), un travail proche est en cours à partir de rédactions de preuves élémentaires par des mathématiciens, par des étudiants et par des élèves du secondaire.

Le travail présenté n'analyse pas les discours des enseignants de mathématiques en classe. On ne peut pas penser avoir analysé les pratiques langagières des enseignants de mathématiques en analysant les manuels scolaires. De nombreuses questions se posent dans ce domaine. Il est très probable (mais cela reste à étudier) que les conclusions concernant les manuels se prolongent d'une certaine manière à propos des pratiques langagières des enseignants en classe : apparition rapide dès le collège d'une complexité des pratiques langagières en cours de mathématiques. Les pratiques langagières font en effet partie de la culture mathématique que les enseignants (et les concepteurs de manuels) ont acquis pendant leurs études universitaires. Les enseignants ont cependant une palette d'outils plus large et plus souple que les rédacteurs de manuels. On peut se demander de quelle façon les enseignants gèrent (consciemment ou non) cette nécessaire complexité. Comment enrichissent-ils les formules abruptes et formelles des manuels ou du cours ? Comment, au-delà de ce qui sera écrit dans le cours, un enseignant fait-il entendre aux élèves la notion (les notions) de mesure d'un angle de vecteurs ? Là aussi le terrain n'est pas vierge (voir Barrier, Chesnais et Hache 2014). Le

travail se poursuit au sein du « Groupe sup »¹⁶ : analyse de vidéo de cours d'amphithéâtres en licence et de cours en classe de lycée.

Un autre type de question peut être posé à propos des pratiques langagières : les enseignants du primaire n'ont, très majoritairement, pas de culture mathématique universitaire. Quelles sont alors leurs pratiques langagières dans ce domaine ? Comment se construisent-elles ? Quelle transition pour les élèves du CM2 à la 6^e ?

Une seconde série de questions porte plus spécifiquement sur l'enseignement. Comment travailler (explicitement ou non ?) avec les élèves sur cette dimension langagière de leur apprentissage des mathématiques ? C'est une question difficile. Des expériences ont été menées et sont menées (par exemple ceux du groupe « Logique et raisonnement » de la commission inter-IREM Lycée ou des groupes « Léo »¹⁷ et « Logique » de l'IREM de Paris), nous en sommes à l'étape des pistes de travail et de l'expérimentation.

Un bon nombre de ces questions mènent vers des problématiques de formation des enseignants. Là aussi un travail expérimental existe dans différents IREM (voir par exemple Hache et Mesnil 2013). Des questions se posent sur la formation initiale : comment et à quel moment aborder ces questions liées au langage ? Il existe peu, au moins en volume et en contenu, de formation à la logique dans les cursus universitaires de mathématiques, faut-il en introduire en formation initiale des enseignants, entre autre comme outil d'analyse des pratiques langagières ? Quel sont les effets pour les élèves d'un travail avec les enseignants sur des outils d'analyse et de réflexion sur leurs pratiques langagières ?

Références

- ACERBI F. (2011) The language of the “Givens”: its forms and its use as a deductive tool in Greek mathematics. *Archive for History of Exact Sciences*, **65/2**, 119-153.
- BARRIER T., CHESNAIS A., HACHE C. (2014) Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant. *Spirale – revue de recherches en éducation*, **54**, 175-193.
- BARRIER T. et DURAND-GUERRIER V. (2013) Modélisations logiques en situation de validation, in BRONNER A. et al. (eds) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, La Pensée Sauvage, Grenoble
- BERRENDONNER A. (1983) Note sur la déduction naturelle et le connecteur "donc", in BANGE P. et al. *Logique, argumentation, conversation, actes du colloque de pragmatique, Fribourg, 1981*, Peter Lang, Berne
- BRONCKART JP. (2007) L'activité langagière, la langue et le signe, comme organisateurs du développement humain, *Langage et société*, **121/122**, 57-68 [Cairn]¹⁸
- DURAND-GUERRIER V. (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe, *Petit x* **50**, 57-79 [site IREM Grenoble]

16 Groupe de travail sur l'enseignement supérieur au sein du laboratoire de didactique André Revuz (LDAR, Université Paris Diderot).

17 Groupe « Léo, Langage, écrit, oral » de l'IREM de Paris.

18 J'indique ainsi entre crochets les sites sur lesquels trouver les documents référencés quand ils sont en ligne.

- DURAND-GUERRIER V. (2013) Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques, in BRONNER A. et al. (eds) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, La Pensée Sauvage, Grenoble
- FREGE G. (1882) Que la science justifie le recours à une idéographie, traduit de l'allemand dans IMBERT C. (1994) *Gottlob Frege, écrits logiques et philosophiques*, 63-69, Seuil, Paris
- HACHE C. (2013) Langage mathématique à la transition primaire – collège, in *Actes du 39ème colloque de la Copirelem, juin 2012*, 452-463, Copirelem, Quimper [Hal]
- HACHE C. (à paraître), Logique, langage, énoncé et preuves en mathématiques, in GANDIT M. et COULANGE L. (eds), *CORFEM, Actes du 21^e colloque, juin 2014*
- HACHE C. et MESNIL Z. (2013), Élaboration d'une formation à la logique pour les professeurs de mathématiques, in GANDIT M. et GRUGEON-ALLYS B. (eds) *CORFEM, Actes des 17^e et 18^e colloques, juin 2012*, 201-224, Université et IUFM de Franche-Comté, Besançon [Hal]
- HERREMAN A. (2010), Habilitation à diriger des recherches, Université Rennes 1 [Université Rennes 1]
- LACOMBE D. (2011) *Grandeur et misère de l'implication*, séminaire « Enseignement des mathématiques », IREM de Paris, Paris [vidéo site IREM de Paris]
- MESNIL Z. (2014) *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*, thèse de doctorat, Université paris Diderot [Hal]
- RAKOTOVOAVY F. (1983), *Les difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi dans les textes mathématiques de certains adjectifs marqueurs de variance (exemples principalement empruntés dans des manuels du second degré)*, Thèse Université Paris 7, IREM de Paris, Paris.
- REBIERE M. (2013) S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? Présentation de quelques concepts développés par le groupe de didacticiens du français de Bordeaux, in BRONNER A. et al. (eds) (2013) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, La Pensée Sauvage, Grenoble.