VOIR DANS L'ESPACE : EST-CE SI SIMPLE ?

Joris MITHALAL
ESPE Paris
Laboratoire de Didactique André Revuz

Résumé. L'enseignement de la géométrie dans l'espace est jugé difficile en raison de problèmes de *vision dans l'espace*. Nous montrons ici que cette difficulté n'est pas seulement cognitive, elle est très fortement liée aux représentations employées et aux rôle que celles-ci devraient pouvoir jouer dans la résolution des problèmes – illustration, prise en charge d'hypothèse, expérimentation. La mise en évidence des limites de ces représentations permet de mieux comprendre les difficultés de visualisation, au-delà des seules difficultés visuelles, et de cerner les apports – visuels, instrumentaux – des logiciels de géométrie dynamique. Dans ce contexte, il devient possible à l'élève de s'appuyer sur les représentations informatisées pour résoudre les problèmes, et à l'enseignant de s'appuyer sur les spécificités de la géométrie dans l'espace pour l'enseignement de la géométrie déductive.

Mots-clés. Géométrie dans l'espace, géométrie dynamique, fonctions du dessin, visualisation.

Abstract. Teaching 3D geometry is very difficult because of *space vision* issues. We show that this is not only a cognitive issue, as it is closely related to the representations and to the role they should play on the resolution process – to illustrate the problem, to show hypothesis, to experiment on the drawings. Showing these difficulties helps to better understand the visualization issues, and to explain why using 3D dynamic geometry softwares changes many things. In this case, pupils may use digital representations to solve geometry problems, and teachers could use it as a tool to teach deductive geometry.

Key words. 3D geometry, dynamic geometry, drawing functions, visualization.

Introduction

L'enseignement de la géométrie dans l'espace soulève de manière généralisée le problème de la vision dans l'espace, du point de vue des enseignants qui cherchent des moyens d'aider leurs élèves à *mieux voir*, mais aussi des élèves qui se distinguent plusieurs années après entre *ceux qui voyaient bien* et *ceux qui ne voyaient pas*.
Ce problème est notamment abordé d'un point de vue cognitiviste, tant dans des travaux de psychologie (par exemple Denis (1997)) que concernant l'enseignement des mathématiques (par exemple Bakó (2006), de Freitas et McCarthy (2014)). Sans nier que les capacités de représentation et de manipulation mentale des objets aient un impact sur l'aisance des élèves relativement à la géométrie dans l'espace, se limiter à ce seul constat conduit à interpréter d'une manière comparable les difficultés pour l'apprentissage de cette discipline et pour l'apprentissage du patinage artistique (Marchand, 2006). Il est pourtant notoire que faire de la géométrie ne se borne pas à manipuler des objets graphiques, et ceci nous pousse à interroger les spécificités mathématiques de ce problème, ainsi que la nature parfois spécifique des traitements cognitifs nécessaires.
De nombreux travaux s'intéressent à la géométrie dans l'espace en se centrant sur les

difficultés et les enjeux mathématiques d'apprentissage qu'elle porte, plus éloignés d'une perspective cognitiviste. Lorsque la question porte sur des problèmes de géométrie, l'utilisation du dessin soutient la résolution et doit donner lieu à des traitements et interprétations spécifiques. Aussi, *voir* a des implications différentes et son acception doit s'appuyer tant sur des considérations didactiques que cognitives, ce qui permet de mieux en cerner les multiples facettes. Une telle réflexion permet de saisir les difficultés se posant en géométrie dans l'espace, via l'analyse des différentes modalités de représentation, notamment les maquettes et la perspective cavalière, qui sont les plus fréquemment utilisées. Nous montrons ici que ces deux types de représentation ne permettent pas de soutenir correctement la résolution des problèmes de géométrie, ce qui permet de mieux envisager comment pallier cette difficulté de *visualisation.* En regard nous montrons que les environnements de géométrie dynamique tridimensionnelle[1], en raison des possibilités de visualisation et des possibilités de construction, présentent le double avantage de restaurer la possibilité d'utiliser les dessins pour la résolution de problème, et d'empêcher de les considérer comme la finalité des problèmes de géométrie.

1. Voir sur le dessin

La question de la visualisation interroge nécessairement la nature de ce qui est vu. Nous considérons ici qu'on ne peut *voir* que des représentations tangibles d'objets géométriques, et ne nous intéresserons pas à des éventuelles "représentations mentales". En effet, leur étude nous confronterait à des questions de l'ordre de la psychologie, et nous montrerons en réalité que l'étude du traitement des représentations tangibles nous permet de contourner cette difficulté.

Nous reprenons à notre compte la distinction entre *dessin* et *figure* proposée par Laborde et Capponi (1994) pour qui le dessin est une entité graphique tandis que la figure est l'appariement d'un objet géométrique, idéal, aux dessins qui le représentent :

> En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne, ou de la géométrie projective). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième terme étant un des dessins qui le représente. Le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. Dans cette approche, les rapports entre un dessin et son référent construits par un sujet, lecteur ou producteur du dessin, constituent le signifié de la figure géométrique associée pour ce sujet. (Laborde et Capponi 1994, p. 168)

De manière un peu élargie, nous désignerons sous le même terme de *dessin* des représentants graphiques variés : dessins sur une feuille de papier, maquettes ou matérialisations diverses (polydrons, fils tendus, assemblages de baguettes par de la pâte à modeler…), représentations informatisées.

De nombreux auteurs (par exemple, Parzysz, 2006) ont signalé le rôle du dessin dans la résolution de problèmes en géométrie : s'il peut être source de confusion lorsque l'élève

1 Nous choisissons ici d'associer « géométrie » et « dynamique » pour souligner l'importance que revêtent les caractéristiques d'un tel environnement. Bakó (2009) a montré que cela permet dans une certaine mesure de simuler une troisième dimension, par le changement de point de vue, ce qui est impossible dans un environnement papier-crayon. Nous nous autorisons de fait à accoler le qualificatif « tridimensionnelle », qui ne doit pas masquer que les objets sont projetés sur les deux dimensions de l'écran d'ordinateur.

le considère comme l'objet qu'étudie la géométrie, il est néanmoins incontournable dans le processus de résolution de problèmes portant sur des objets théoriques, en tant que lieu d'élaboration d'une heuristique. L'étude précise de ce processus par Duval et Godin (2005), sur laquelle nous nous appuierons par la suite, signale bien son importance.
Placé dans un contexte de géométrie, le problème de la perception des objets de l'espace n'est donc pas seulement celui d'une perception naïve ou naturelle qui s'exercerait avec plus ou moins de succès : s'il faut voir, il faut en réalité *voir quelque chose* et *voir pour quelque chose* ; préciser ces points permet de mieux cerner les difficultés de visualisation. Le problème n'est plus celui d'un défaut de visualisation, mais d'une *insuffisance de visualisation pour que le dessin puisse aider à la résolution d'un problème de géométrie*.
Nous souhaitons ici aborder quatre points, en dégageant les spécificités de la géométrie dans l'espace lorsqu'elles existent : (i) Que voit-on lorsque nous percevons un dessin ? (ii) À quoi le dessin sert-il en géométrie ? (iii) Quelles sont les opérations à réaliser sur un dessin lors de la résolution d'un problème de géométrie ? (iv) Comment les représentations sont-elles utilisables à cette fin ?
Ces points nous permettront de mieux détailler la nature des difficultés qui se posent lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes de géométrie dans l'espace et de caractériser la nature et l'intensité de ces insuffisances. En outre, nous montrerons ainsi que les environnements de géométrie dynamique tridimensionnels restaurent, sous certaines conditions, des fonctions que ne peuvent assumer les dessins ou maquettes.

1.1 Le dessin, dans le plan et dans l'espace

La didactique a longuement étudié les rapports complexes entre dessin et figure, notamment l'obstacle que constitue le dessin pour l'apprentissage de la géométrie déductive. La démonstration prend du sens lorsqu'elle vise un objet géométrique, dont le dessin est un représentant soutenant l'heuristique, mais rien de plus. Lorsque le dessin est considéré comme l'objet de la géométrie, sans renvoyer à l'objet géométrique, la démonstration est inutile car le constat perceptif offre des évidences suffisantes[2].
Chaachoua (1997) note que l'opposition entre dessin représentant de l'objet géométrique et dessin objet d'étude autosuffisant ne suffit pas à rendre compte de la multiplicité des significations attachées à cet objet dans un contexte d'enseignement, puisqu'il peut ne pas être question de l'objet géométrique, auquel cas le dessin se rapporte à *autre chose*. Ceci est particulièrement fort dans le contexte de la géométrie dans l'espace. Un dessin en perspective cavalière d'un cube en bois, lui-même envisagé comme un objet d'étude à part entière, est bien un *représentant* de ce cube sans pour autant renvoyer à l'objet idéal de la géométrie. Réduire le dessin à son seul statut de représentant d'un objet géométrique est alors insuffisant et, dans la distinction entre dessin et figure, l'auteur est conduit à apporter des précisions relatives à la nature même du dessin :

> Dans cette distinction[3], les auteurs n'évoquent pas le monde sensible. Nous supposons que c'est :
> – soit parce qu'ils considèrent la géométrie comme un modèle : “un dessin renvoie aux objets théoriques”
> – soit parce que leur étude se limite au cas de la géométrie plane : le dessin lui même peut être considéré comme “objet physique”.
> Dans l'enseignement de la géométrie et surtout de la géométrie dans l'espace, les

2 C'est le sens de la distinction qu'opèrent Houdement et Kuzniak (2006) entre “géométrie naturelle” et “géométrie axiomatique naturelle”

3 Entre dessin et figure (c'est nous qui précisons)

tâches portent sur trois types d'objets :
– Objet géométrique : c'est un objet de la géométrie en tant qu'une théorie mathématique,
– Objet physique : nous l'utilisons comme synonyme de l'objet matériel dans le monde sensible,
– Dessin : représentation sur un support matériel. (Chaachoua , 1997, p. 10)

Tout particulièrement dans le contexte de la géométrie dans l'espace, il faut distinguer trois statuts du dessin. Le dessin peut être le sujet d'étude, et envisagé comme objet physique lui-même. À l'inverse, il peut ne pas être objet d'étude, auquel cas il est modèle — au sens de Laborde et Capponi (1994) — de celui-ci. Il est alors, soit modèle d'un objet physique, soit modèle d'un objet géométrique.
Dans une perspective d'enseignement de la géométrie d'incidence, l'espace présente de fait un intérêt certain dans la mesure où, contrairement à la géométrie plane, il n'est plus possible de considérer le dessin comme objet d'étude lui-même (Chaachoua, op.cit, p. 44). Le dessin peut renvoyer à un objet matériel, il n'en restera qu'une représentation et ne peut plus être étudié pour lui-même. Ceci suppose une conversion — même *a minima* — entre différents types d'objets, différents registres de représentation, dont l'intérêt pour l'apprentissage de la géométrie était déjà signalé par Rommevaux (1998, p.59) et Duval (1995).

1.2 Le dessin dans le processus de résolution d'un problème de géométrie

La géométrie est parfois décrite comme "*l'art de raisonner juste sur un dessin faux*" : elle ne peut se réduire à l'examen du dessin, mais pourtant elle se passe difficilement de son utilisation. Comme nous l'avons mentionné, le rôle du dessin dans la résolution des problèmes de géométrie est au cœur des problèmes de "vision dans l'espace" : si des fonctions essentielles ne sont plus assurées, cela empêche de mener à bien les résolutions de problèmes. Chaachoua (op.cit, pp. 23-32) montre que le dessin remplit plusieurs fonctions, dans l'énoncé, dans la résolution et dans l'expression d'une solution.

Dans l'énoncé, sa fonction principale est l'illustration d'un texte, donnant à voir simultanément des informations qui étaient présentées séparément dans un texte. Il a en outre pour rôle de prendre en charge des hypothèses non explicitement mentionnées dans l'énoncé, par des relations spatiales et le recours au codage, et offre un moyen de rendre visible une figure ou une sous-figure pertinente pour la résolution.

Les rôles du dessin sont multiples dans la résolution, et celui-ci permet notamment d'exhiber des contre-exemples, d'explorer une situation, de former des conjecture, de dégager des configurations remarquables… L'auteur considère ces aspects comme relevant d'une même *fonction d'expérimentation*, fortement liée avec la phase heuristique.

La fonction d'expérimentation peut revêtir diverses formes, et permettre aussi bien d'explorer la situation que d'aboutir à la production d'un contre-exemple, et varie en fonction du statut du dessin. Comme le souligne Chaachoua (op.cit), il s'agit d'un travail de nature essentiellement expérimentale conjuguant la recherche de conjectures et l'évaluation de leur pertinence. Cela suppose de rechercher et lire les informations que proposent les dessins, c'est-à-dire d'effectuer des opérations — en actes ou en pensée — sur celui-ci, puis d'articuler les informations perçues avec des connaissances de géométrie. En définitive, la fonction d'expérimentation dépend donc d'une capacité —

elle-même tributaire des conditions matérielles et d'un apprentissage — à agir sur le dessin, à y lire des informations, et de l'interprétation de ces informations en fonction du statut du dessin aux yeux de l'élève.
Enfin, le dessin intervient dans la solution même, soit en illustrant les étapes d'une résolution ou le résultat, soit en constituant une réponse à part entière au problème posé — notamment dans le cas des problèmes de construction.

Considérons l'exemple suivant :

Dans cette figure, ABCD est un rectangle, les points A, B et F sont alignés, ainsi que les points D, B et E. Quelle est la nature du quadrilatère BCFE?

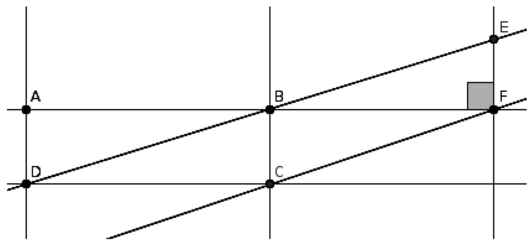

Figure 1

Le dessin donne à voir les éléments de l'énoncé (le rectangle, l'alignement des points), sans induire le même ordre de lecture que le texte. Il donne en outre à voir de nouvelles hypothèses (l'angle droit) et met en évidence certaines sous-figures pertinentes pour la résolution. Comme nous l'avons signalé précédemment, notons que ceci est ambigu, dans la mesure où le parallélogramme BCFE visuellement identifié n'est qu'un effet du dessin, et un autre tracé ne respectant pas la condition AB=BF – éventuellement pour illustrer la solution – montrera un trapèze.

Finalement, ce sont trois fonctions principales du dessin qu'il faut retenir, indépendamment de la phase de l'activité dans laquelle il intervient :

- une **fonction d'illustration**, qui intervient pour illustrer un énoncé, un problème, des étapes de raisonnement, ou une réponse au problème ;
- une **fonction de prise en charge d'hypothèses**, qui traduit la capacité du dessin à laisser apparaître des informations éventuellement absente relatives à l'objet géométrique ;
- une **fonction d'expérimentation**, qui dépend de la fonction d'illustration mais aussi du domaine de fonctionnement et d'interprétation du dessin.

Cette dernière fonction d'expérimentation est donc cruciale. Elle met en jeu des opérations spécifiques, qui nous semblent à même d'éclairer certaines des raisons pour lesquelles l'*utilisation* des dessins devient problématique pour la résolution de problèmes de géométrie dans l'espace.

1.3 Les conditions cognitives d'utilisation des dessins en géométrie

Remplir les trois fonctions proposées suppose de procéder — au moins mentalement — à certaines opérations sur le dessin en vue de l'analyser, de l'enrichir, de faire apparaître de nouvelles configurations ou de mettre à l'épreuve des conjectures.

Sans s'intéresser spécifiquement à la géométrie dans l'espace, Duval et Godin (2005), puis Duval (2005) montrent que la capacité à utiliser le dessin est tributaire de traitements cognitifs spécifiques, des manières d’appréhender le dessin et des opérations à mener[4]. En tout premier lieu, “voir” est identifié comme un processus complexe qui met en jeu deux niveaux d’opérations : *la reconnaissance discriminative de formes et l’identification des objets correspondant aux formes reconnues* (Duval, 2005, p. 13). En particulier, en renvoyant à un objet géométrique ou physique, la seconde permet d’inscrire l’objet reconnu dans un référentiel permettant son interprétation, et est donc fortement en lien avec les statuts du dessin que nous avons mentionnés.

L’auteur parle de *visualisation iconique* lorsque cette identification est assurée par ressemblance entre le dessin observé, du point de vue de la forme, et un objet de référence — à la manière du fonctionnement d’un herbier. Ce type d’identification est problématique pour la géométrie dans la mesure où la forme devient définitoire de l’objet et qu’il n’est plus possible d’opérer sur ce dernier au risque de le dénaturer. Par exemple, lorsqu’un cube est assimilé à un dé, il devient impossible de prolonger ses arêtes, car alors on obtient un *truc dérivé d’un dé*, mais la forme est perdue. Le dernier des trois cubes présentés ci-dessous ne sera donc pas, dans ce cas, identifié comme tel. En outre, les propriétés perçues sont liées à la forme, au contour, et il sera délicat d’isoler les éléments constitutifs (par exemple les segments formant les arêtes) pour les considérer séparément, ou encore d’accéder aux éléments à l’intérieur de cette forme tels que des diagonales. Dans ce cas, le dessin est l’objet d’étude à part entière — ou une *reproduction* à l’identique de l’objet d’étude plutôt qu’une *représentation* —, et la figure n’est pas prise en compte. Duval (2005) montre ainsi que ce type de visualisation constitue une impasse pour l’enseignement de la géométrie.

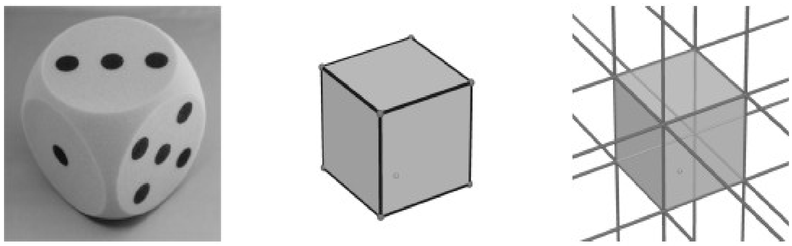

Figure 2. *Cube ou dé*

L'auteur rattache fortement la visualisation iconique à la reconnaissance visuelle des unités figurales de plus grande dimension, en s’appuyant sur la *Gestalttheorie*, et en invoquant en particulier la *loi de clôture* :

> On remarque tout de suite le caractère hétérogène des unités figurales : elles ne présentent pas toutes le même nombre de dimension. […] Cette hétérogénéité n’entraîne cependant aucune ambiguïté pour l’appréhension perceptive des unités figurales. Il y a en effet une prédominance des unités de dimension 2 sur les unités de dimension inférieure, prédominance que la loi gestaltiste de clôture (ou de continuité) explique ainsi : lorsqu’un stimulus possède un contour simple et fermé, il se détache comme formant un tout. (Duval, 1995, pp. 177-178)

Cette loi permet en géométrie plane de percevoir visuellement un objet pris dans son ensemble, mais peut constituer un obstacle lorsque cette forme globale fait obstacle à la perception d’autres objets, comme dans l'exemple suivant :

4 Nous ne présenterons ici que des éléments de l’analyse développée par ces auteurs. Pour davantage de précisions, le lecteur pourra se référer à Duval (2005).

Combien de rectangles peut-on compter dans la figure suivante ?

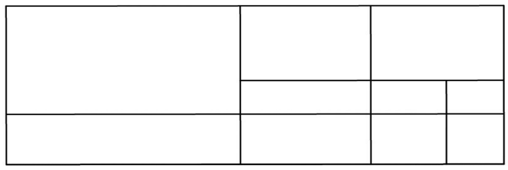

Figure 3. *Compter les rectangles*

Ici, les grands rectangles agissent comme un obstacle à l'identification des rectangles intérieurs. La visualisation iconique constitue ainsi un obstacle résistant pour l'apprentissage de la géométrie, car elle correspond au fonctionnement naturel de la visualisation (Duval, 2005, p.24), et qu'elle permet de reconnaître un objet d'un seul coup d'œil, ce qui lui confère une grande efficacité dans bien des cas. Nous avons ainsi observé (Mithalal, 2010) qu'elle guide l'activité de nombreux élèves de seconde confrontés à des problèmes de géométrie dans l'espace.

Dans le cas de la *visualisation non-iconique*, les objets ne sont plus caractérisés par leur forme mais par l'assemblage d'objets de plus petite dimension — les *unités figurales* — sous des contraintes données. Ainsi, un cube n'est pas un objet de forme cubique, mais l'assemblage de segments sous des contraintes précises d'incidence, d'égalité de longueur et d'orthogonalité. Les dessins peuvent alors être des représentations d'objets théoriques, il est possible d'agir dessus sans les dénaturer, ce qui lève l'obstacle à l'utilisation du dessin pour les fonctions précédemment énoncées. Trois opérations, que nous ne détaillerons pas ici, sont en jeu pour l'action sur les dessins : la division méréologique, la déconstruction instrumentale et la déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005, pp.20-27 ; Mithalal, 2010, pp.17-23). Les deux dernières sont essentielles pour la fonction d'expérimentation, dans la mesure où elles consistent à identifier les unités figurales de petite dimension pour reconstituer l'objet géométrique ; elles sont aussi particulièrement délicates à maîtriser.

Outre la posture différente à adopter, les difficultés qui accompagnent le passage de la visualisation iconique à la visualisation non-iconique sont aussi de nature cognitive. L'auteur souligne que le fonctionnement naturel de la vision consiste à identifier en premier lieu le contour des objets, leur forme globale, et ensuite à détailler au besoin les sous-objets qui le composent[5] : « *la première loi de l'organisation et de la reconnaissance perceptive des formes est la priorité immédiate et stable des unités figurales 2D sur les unités figurales 1D* » (ibid., p. 23). En revanche, le regard qu'exigent les déconstructions identifiées, et plus généralement la visualisation non-iconique, supposent une attention aux unités figurales de petite dimension qui, par assemblage, permettent de reconstruire l'objet dans sa globalité. Cette opposition de deux types d'appréhension est qualifiée de *hiatus dimensionnel* par l'auteur. Il constitue un obstacle majeur à la bonne utilisation des dessins en géométrie dans la mesure où il rend nécessaire une *éducation* du regard (Duval et Godin, 2005). Nous verrons par la suite que ce problème est particulièrement éclairant en ce qui concerne la géométrie dans l'espace, pour des raisons toutes différentes de la géométrie plane. Ces difficultés jouent un rôle important dans le traitement des dessins, en géométrie plane comme en géométrie dans l'espace.

5 Il s'agit de la *loi de clôture* mise en évidence par la Gestalttheorie,

2. Dans l'espace : quelles sont les difficultés?

Le traitement des objets géométriques de l'espace pose des problèmes spécifiques liés aux particularités des modes de représentation ainsi qu'à la difficulté, que souligne Rommevaux (1997 ; 1998), d'identifier des espaces à deux dimensions plongés dans l'espace afin d'y employer les outils fournis par la géométrie plane. Nous proposons ici d'interroger ces difficultés à l'aune de nos considérations précédentes, notamment en étudiant les fonctions que peuvent assurer les différents types de représentations. Nous porterons en outre une attention particulière à la perspective cavalière, très fortement présente dans l'enseignement, ainsi qu'aux traitements spécifiques que nécessitent les dessins dans ce contexte.

Les représentations que nous considérons ici sont limitées à la perspective cavalière et aux maquettes, qui sont les deux modalités les plus courantes pour la géométrie dans l'espace. La perspective centrale, ou différents modèles employés — pleins, tubulaires, filaires… — nous semblent proches. Nous omettons volontairement les patrons, dont l'utilisation pour des problèmes de géométrie d'incidence nous semble très limitée — ce qui ne préjuge pas de leur intérêt dans d'autres cas. Enfin, le cas de la géométrie dynamique fera l'objet d'une étude spécifique.

Les trois fonctions du dessin que nous avons évoquées permettent de dégager des différences notables, et d'expliquer certaines difficultés. Il faudra néanmoins considérer que ces fonctions ne sont pas nécessairement intrinsèques aux représentations, mais dépendent souvent des connaissances du sujet qui les observe et de sa capacité à coordonner différents registres (Rommevaux, 1998, p. 59) ; ceci nous conduira ainsi à renverser notre point de vue et à étudier les conditions permettant à la perspective cavalière de remplir *a minima* les fonctions nécessaires à la résolution de problèmes.

Enfin, la reconnaissance perceptive de la visualisation iconique sera privilégiée : sans que tous les élèves s'y limitent, leur maîtrise des déconstructions est généralement encore faible en classe de seconde (Mithalal, 2010).

2.1 Représentation d'objets tridimensionnels

Représentations planes

Les représentations utilisées dans l'enseignement sont généralement des projections planes : perspective cavalière, perspective centrale… La représentation en perspective centrale peut se définir ainsi :

> La perspective centrale consiste à reproduire sur un tableau ce qu'un œil (immobile et ponctuel) verrait au travers d'une « fenêtre ». L'idée est que le tableau pourrait prendre la place de la fenêtre, l'œil n'y verrait que du feu…Ce type de représentation a les caractéristiques suivantes :
> – on suppose que l'œil est un point ;
> – chaque point de l'objet à représenter est relié à cet œil par un rayon visuel rectiligne ;
> – chaque point de la représentation est l'intersection de ce rayon visuel avec le tableau (Lismont et Rouche, 1999, p. 229)

Sa proximité avec la vision humaine est consubstantielle de son apparition — par exemple avec le perspectographe de Dürer —, mais cet intérêt perceptif s'accompagne d'une perte de propriétés fondamentales pour la géométrie d'incidence : parallélisme de certaines droites, égalités de rapports de longueurs selon une direction…

La perspective cavalière ne préserve pas parfaitement l'impression visuelle, elle permet en revanche de préserver certaines propriétés géométriques — parallélisme, alignement. Chaachoua (1997, 1998) et Parzysz (1991) considèrent donc que la place privilégiée qu'elle occupe dans l'enseignement secondaire français résulte d'une volonté d'équilibre entre le vu et le su :

> La raison de ce choix pour les dessins de géométrie, outre la facilité d'exécution, doit être cherchée dans le fait que la perspective parallèle réalise un compromis acceptable entre le voir et le savoir (transfert de propriétés). (Parzysz, 1991, p. 219)

Les représentations en perspective cavalière offrent donc un compromis *acceptable* entre l'impression visuelle et des caractéristiques qui ne peuvent être interprétées qu'à l'aune d'une construction théorique géométrique.

Les maquettes

Les maquettes limitent la perte d'information inhérente à la projection plane, et se prêtent au même type d'examen visuel que les objets de notre environnement quotidien. Elles peuvent être de nature très variée : construction de la surface en papier, construction des arêtes et sommets par des tiges rigides assemblées à leurs extrémités, *Polydron*, fils tendus, maquette en polystyrène, motte de beurre… Leur utilisation est fortement présente dans l'enseignement, et Schubring (2010) signale par exemple un usage institutionnel dès la fin du XIXe siècle : *"The models should enhance in particular visualization and hence exert a more convincing function than just oral lectures or own reading."*[6]. Les travaux portant sur la géométrie dans l'espace soulignent que leur emploi est fondamental dans l'enseignement :

> La plupart des études didactiques sur la géométrie de l'espace […] font valoir que le développement du « sens spatial » doit, pour se faire efficacement, passer par une phase de travail (construction, manipulation, observation, description…) avec des *modèles tri-dimensionnels manipulables* des objets géométriques.
>
> (Grenier et Tanguay, 2008, p. 26)

Les maquettes présentent néanmoins certaines limites. En premier lieu, elles n'imposent plus la distance que nous avons mentionnée entre l'objet matériel manipulé et l'objet visé par l'étude : au même titre que les dessins en géométrie plane, les maquettes peuvent être considérées en géométrie 3D comme enjeux à part entière des problèmes. De plus, il faut noter que les maquettes rendent plus performante la perception des objets, mais n'offrent que très peu d'informations *géométriques* — au sens d'une géométrie déductive —, renvoyant à un objet géométrique.

La prise de position de Duval concernant ces maquettes est à ce titre particulièrement éloquente :

> Il importe de rappeler que les représentations de type maquette ne sont pas des représentations sémiotiques : les opérations susceptibles de les transformer sont des actions physiques suivant des lois physiques et non des actions sur des signes régies par des règles. De plus, dans ce type de représentation, le représentant et le représenté ont les mêmes caractéristiques phénoménologiques fondamentales : ce sont des objets physiques situés dans un espace à trois dimensions. D'où la possibilité d'agir sur le représentant et sur le représenté. Ce sont là deux différences fondamentales qui séparent les représentations de type maquette et les représentations sémiotiques. D'une part celles-ci

6 Les modèles permettent d'améliorer la visualisation, et donc sont plus convaincants que des exposés oraux ou des lectures personnelles (notre traduction)

> ne peuvent pas être transformée par des actions physiques. D'autre part le représentant et le représenté ne peuvent pas être des objets appartenant à un même espace. En d'autres termes les représentations sémiotiques, à la différence des représentations de type maquette, permettent des opérations remplissant les fonctions d' objectivation, de traitement ou d'expression, et non pas un mode particulier de traitement. (Duval, 1995, p. 66)

Les maquettes soulèvent donc la question de leur traitement, qui peut n'être que de l'ordre de l'expérience sensible, ne pas faire signe vers d'autres modes de représentation ou une géométrie déductive.
Ces deux modalités de représentation étant utilisées dans l'enseignement secondaire, il faut interroger leur rôle potentiel pour la résolution de problèmes de géométrie dans l'espace *via* l'étude de la manière dont elles peuvent assurer les fonctions proposées par Chaachoua (1997).

2.2 La fonction d'illustration

La fonction d'illustration est celle qui fait porter l'accent sur les problèmes de visualisation : on voit mal dans l'espace, et cela handicape le traitement des problèmes. À cet égard, les deux modalités de représentation étudiées assurent de manières très différentes cette fonction. Nous limitons notre propos aux possibilités de reconnaissance visuelle, qui conditionnent très largement cette fonction.

Perspective cavalière

La perspective cavalière résulte d'une opération de projection sur un plan, il n'est donc plus possible d'identifier les objets tridimensionnels[7], et la vision se limite à identifier des surfaces. De plus, la projection produit des intersections abusives de segments, ce qui peut conduire à observer sur la représentation en perspective des "surfaces fermées" qui n'ont aucune existence dans l'objet géométrique (Figure 4).

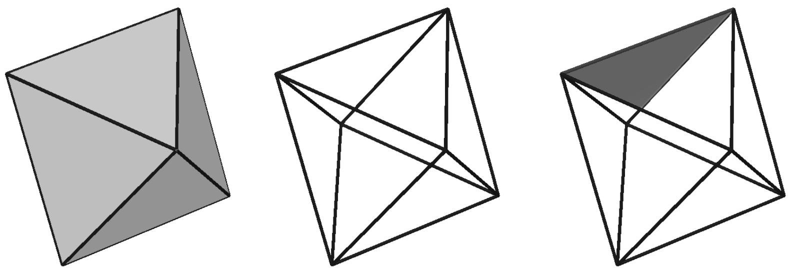

Figure 4. *Les limites de la loi de clôture en perspective cavalière.*

En conséquence, la visualisation iconique conduit généralement des interprétations erronées des dessins observés, et elle ne permet plus de reconnaître que des "représentations-types"[8] rendues familières par l'enseignement. Bayart *et al.* (1998, p. 25) souligne ainsi que :

> Nous ne voyons des objets sur de telles projections que quand nous les connaissons

7 Signalons que la *reconnaissance* de certains objets s'appuie essentiellement sur des habitudes de représentation permettant d'associer par exemple un signe bidimensionnel à un cube.

8 Selon Chaachoua : « Une représentation-type est un dessin dont l'objet est d'illustrer une ou des relations géométriques entre les objets géométriques de l'espace. Elle n'a pas fait l'objet d'une convention explicite. Cependant elle fait partie d'une tradition d'enseignement. » (Chaachoua, 1997, p. 38)

déjà : un dessin dans le plan n'est assimilé par l'observateur que s'il a intégré préalablement cette structure dans son cerveau

et la fonction d'illustration est alors très limitée pour un fonctionnement iconique de la visualisation.

En géométrie dans l'espace, les représentations planes permettent de désigner certains objets, mais leur nombre limité (essentiellement le cube, la sphère, le pavé droit, deux plans sécants, éventuellement les pyramides ou les prismes) restreint largement le domaine de fonctionnement de ces dessins à l'utilisation de solides familiers.

La limite la plus forte est certainement l'incapacité à représenter des configurations qui ne sont pas portées par des solides : dans le manuel Declic (2004) dont le cours porte largement sur des théorèmes d'incidence, seuls trois exercices sur les 52 ne s'appuient pas sur des solides, ce ratio est de 2 occurrences pour 73 exercices dans le manuel Transmath (2000), et comme l'illustre la Figure 5, les représentations permettent nécessairement de matérialiser les relations entre objets. En effet, très peu de configurations sont intelligibles en perspective cavalière si elles ne sont pas portées par des solides ou si un objet ne recouvre pas l'autre — par exemple une droite coupant un plan —, ce qui est précisément le cas ici.

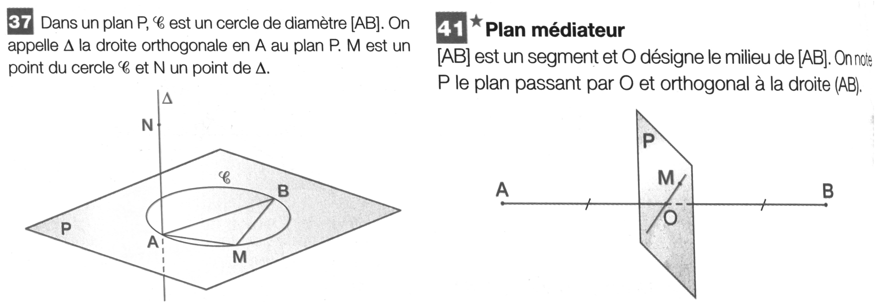

Figure 5. *Deux exercices non contextualisés par le solide (Transmath, 2000).*

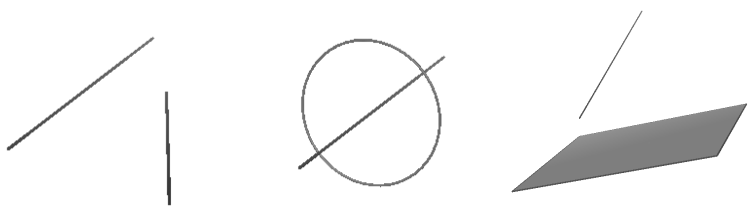

Figure 6. *Quelques perspectives illisibles*

Ainsi, comparativement à la géométrie plane, la fonction d'illustration fonctionne essentiellement pour les solides qui figurent dans les programmes du collège, et est donc considérablement limitée.
La visualisation non iconique peut soutenir la perception en interprétant des propriétés préservées (parallélisme, proportions selon une direction donnée...). Néanmoins, cette opération très coûteuse ne donne que des informations peu fiables sur les objets.

Maquettes

Les maquettes permettent un examen visuel "naïf", notamment en ne présentant pas les mêmes aberrations et limites que les représentations en perspective, et ont un rôle important pour la formation d'images de référence qui seront invoquées dans l'enseignement :

> Pour tous les solides étudiés […], nous adoptons une progression identique, une première phase de *manipulation avec des objets* permettant d'acquérir le vocabulaire de base, suivie d'une deuxième phase *d'apprentissage de la représentation de ces objets*. […] L'observation et la manipulation permettent de définir en le ***montrant*** le vocabulaire propre à chaque solide. […] Conscient des différences géométriques entre l'objet et sa représentation, l'élève peut progressivement se construire des images mentales opérantes. (Bonafé et Sauter, 1998, p. 6)

La fonction d'illustration fonctionne ainsi de manière bien plus efficace, même pour la visualisation iconique, ce qui permet une première approche des objets de l'espace. En outre, cela autorise l'utilisation d'autres objets que les représentations-types déjà connues. Néanmoins, certaines limites persistent en raison des types de constructions réalisées : un solide aux faces "pleines" (polystyrène, Polydron, motte de beurre…) ne pourra pas comporter de cavité interne ; une représentation des seules arêtes ne convient que pour des polygones mais est inapte à représenter une boule, etc. Notons en outre que les objets représentés par ces maquettes doivent ici encore s'appuyer sur des solides.

2.3 La prise en charge d'hypothèses

Perspective cavalière

En dépit de la projection, Parzysz (1988) montre que la perspective cavalière préserve de nombreuses propriétés (alignement, rapports selon une même direction…), ce qui n'est pas le cas de la perspective centrale. Cependant, les dessins présentent des aberrations visuelles au nombre desquelles :

- la non-conservation des angles ;
- la non-conservation des égalités ou inégalités de longueur ;
- l'existence de propriétés apparentes liées à l'opération de projection : "fausse orthogonalité", "faux alignement", "fausse (in)égalité de longueurs", etc. ;
- l'impossibilité de déterminer, en général, la position relative de deux objets.

La prise en charge d'hypothèses se heurte donc à ces aberrations, qui produisent des propriétés abusivement perçues.

Plus délicat, l'habitude d'informations perceptives erronées peut conduire à prêter abusivement aux objets des propriétés, sans que le dessin ne puisse le contredire. Ainsi, le polygone d'intersection d'un cube par un plan (Figure 7) n'apparaît jamais comme un carré sur les dessins. Pourtant, son étude avec des élèves conduit généralement à un débat portant sur la nature de ce polyèdre : *est-ce un carré?* Cette absence d'invalidation témoigne des limites de la prise en charge d'hypothèse par les représentations en perspective cavalière.

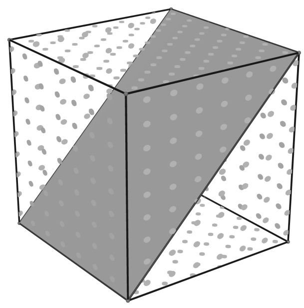

Figure 7. *Polygone d'intersection d'un cube par un plan : un carré?*

L'utilisation d'un codage permet de rétablir en grande partie cette fonction, en indiquant les propriétés principales, mais ne permet d'en indiquer qu'un nombre restreint (il n'y a ainsi pas de code pour désigner un angle obtus). Il permet de faire figurer nombre d'hypothèses pertinentes pour le problème posé, d'indiquer des relations entre objets ; aussi la combinaison du codage et de la préservation d'hypothèses permet d'assurer de manière suffisante cette fonction.

Maquettes

Le problème est totalement inversé pour les maquettes : si les aberrations visuelles sont minimes et liées à des contraintes de représentation, il est difficile — et peu répandu — de faire figurer des hypothèses géométriques sur ces représentations. Se pose en outre l'assimilation de la maquette à l'objet lui-même, pointée par Duval (1996). De fait, la prise en charge d'hypothèses est très limitée.

2.4 La fonction d'expérimentation

Comme nous l'avons signalé, cette fonction est essentielle pour l'utilisation des dessins en vue de résoudre des problèmes de géométrie, dans la mesure où elle conditionne une partie essentielle de la résolution, antérieure à la mise en discours d'un raisonnement : la recherche de solutions, la mise en relation de constituants de l'objet, la formulation — en appui sur la visualisation et la modification des dessins — de premières conjectures, une première mise à l'épreuve de ces conjectures… Lorsque cette fonction est défaillante, la possibilité d'un premier traitement non formalisé des problèmes est très largement handicapée, comme le montrent Chaachoua (1997), Duval (1994) ainsi que Duval et Godin (2005).

Perspective cavalière

Le domaine de fonctionnement du dessin en tant que modèle d'un objet géométrique de l'espace est très restreint, dans la mesure où il s'appuie exclusivement sur des conventions et des représentations-types. Dès lors, la modification du dessin le rend rapidement illisible — car alors il ne correspond plus aux représentations-types et propose des informations visuelles ambiguës —, et il est presque impossible de rendre visible des configurations remarquables ou d'exhiber des contre-exemples sur le dessin. Chaachoua (1997) étudie longuement cette question et souligne les limites de la fonction d'expérimentation dans le cas de la perspective cavalière :

> La fonction d'expérimentation du dessin "papier-crayon" est limitée pour des raisons matérielles. (Chaachoua, 1997, p. 43)
> A priori la fonction d'expérimentation du dessin papier-crayon ne peut pas être remplie au même titre que dans le plan, en tant que modèle du domaine de réalité "géométrie dans l'espace". (ibid., p. 45)

Ceci répond en grande partie à notre question initiale portant sur la possibilité à voir dans l'espace *pour résoudre des problèmes de géométrie*. Il ne s'agit ainsi pas seulement de problèmes de visualisation, il apparaît aussi que, contrairement à la géométrie plane, les dessins ne permettent plus l'expérimentation et en cela constituent un frein au déroulement normal du processus de résolution.

Néanmoins, on ne peut prétendre qu'il soit impossible de résoudre des problèmes de géométrie dans l'espace, ni d'utiliser les dessins proposés par la perspective cavalière. Considérons l'exemple de la Figure 8 sur laquelle trois représentations de cube sont proposées. La première ne peut être différenciée d'un hexagone. La deuxième traduit — par les lignes en pointillés — un volume, et un œil exercé y reconnaîtra un cube ; la projection pourrait cependant avoir écrasé sur une image de cube un tout autre solide. La troisième représentation permet d'affirmer qu'il s'agit bien d'un cube, en raison du codage : les segments sont de même longueur, et les angles sont droits.

On le voit par cette formulation, pour assurer qu'il s'agit effectivement d'un cube, il faut interpréter le codage pour procéder à une reconstruction de l'objet fondée sur les relations entre objets indiquées. Le respect de cette contrainte est premier et, contrairement au plan, la reconstruction ne peut être précédée avec un degré de certitude suffisant par un examen purement visuel. En d'autres termes, pour que les informations visuelles soient fiables, il est nécessaire d'identifier les unités figurales de petite dimension et les propriétés qui les lient afin de reconstruire l'objet, c'est-à-dire en fait à procéder à une déconstruction dimensionnelle dont Duval (2005) a montré la complexité. L'utilisation de ces dessins en perspective n'est donc pas impossible, mais elle exige des opérations trop complexes, bien souvent inaccessibles aux élèves[9].

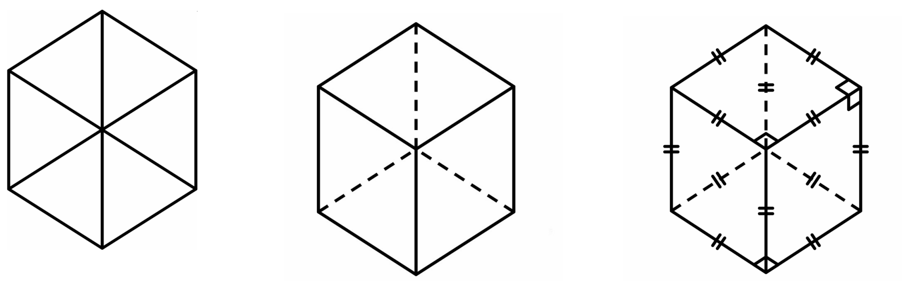

Figure 8. *Trois représentations de cube, avec des codages différents*

Maquettes

Ici encore, le cas des maquettes est dual du précédent puisque les représentations ne présentent pas de difficulté visuelle majeure, mais sont difficilement manipulable. Outre la complexité de leur conception, il est très difficile de leur ajouter des tracés pour faire apparaître des configurations spécifiques, opération qui est une *condition nécessaire à toute utilisation heuristique des figures* (Duval, 2005). Ceci constitue une limite forte à la

9 Nous avons montré que ceci est souvent loin d'être acquis, même pour des élèves de seconde (Mithalal, 2010).

fonction d’expérimentation, à l’exception de cas très spécifiques, peu répandus, et correspondant à des cas très précis (maquettes proposées par Rommevaux (1997), où des “pochoirs” permettent de visualiser des sections du cube, *Lénárt sphere* munie d’outils de tracé sur la sphère…).

Ici encore, la fonction d’expérimentation n’est pas correctement assurée par ce type de représentation, sauf dans des cas et avec des dispositifs très précis. Notons que cette fois la visualisation iconique ou non-iconique sont confrontées aux mêmes difficultés, inhérentes aux dispositifs de représentation choisis.

2.5 Voir dans l’espace : il ne s'agit pas seulement des représentations mentales

Cette mise en perspective des fonctions que peuvent assurer les deux types de représentations souligne qu’il ne s’agit pas avant tout d’un problème cognitif, mais bien de limites — de la visualisation, des possibilités d’action sur les dessins, ou encore liées à la complexité d’utilisation des informations codées — liées aux différents types de représentations, que nous pouvons résumer ainsi.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Fonction d'illustration</th><th colspan="2">Prise en charge d'hypothèses</th><th colspan="2">Fonction d'expérimentation</th></tr>
<tr><th></th><th>Perspective cavalière</th><th>Maquettes</th><th>Perspective cavalière</th><th>Maquettes</th><th>Perspective cavalière</th><th>Maquettes</th></tr>
<tr><td>Visualisation iconique</td><td>Pour les solides connus</td><td rowspan="2">Bonne, mais limitée par les contraintes de réalisation</td><td>Mauvaise, en raison des aberrations visuelles</td><td rowspan="2">Mauvaise : moins d'aberrations visuelles mais peu de codage présent</td><td>Très limitée, en raison des contraintes de dessin et de lecture des informations</td><td rowspan="2">Limitée par les contraintes de manipulation des représentations</td></tr>
<tr><td>Visualisation non-iconique</td><td>Pour quelques configurations supplémentaires</td><td>Bonne, par la lecture du codage</td><td>Limitée et complexe, en appui sur les informations codées plus que sur la visualisation</td></tr>
</table>

Les fonctions d’illustration et de prise en charge d’hypothèse peuvent généralement être partiellement assurées par l’une ou l’autre des représentations, sous réserve de fortes contraintes. Dans le cas de la perspective cavalière, la complexité du traitement est bien plus grande qu’en géométrie plane puisque cela suppose de renverser la perception en s’attachant d’abord aux unités figurales de petite dimension, ce qui est particulièrement délicat et demande un entraînement particulier (Duval et Godin, 2005).

Il n’en va pas de même pour la fonction d’expérimentation, qui est très mal assurée par chacune de ces représentations. Les maquettes ne permettent que rarement de réaliser des tracés, tandis que les projections planes ne permettent pas d’interpréter les informations résultant de l’ajout de lignes.

Pour rétablir ces fonctions, deux conditions apparaissent alors comme nécessaires : en premier lieu, diminuer la complexité du traitement des informations visuelles et améliorer ainsi les possibilités de visualisation, rétablir ensuite la fonction d’expérimentation en rendant possible la réalisation et l'exploitation de tracés sur le dessin.

Certaines pistes sont déjà employées, en particulier l’utilisation conjointe de représentation des deux types, ou encore un travail systématique de la production de dessins en perspective cavalière, afin d’en améliorer la lecture par les élèves. Nous souhaitons ici étudier l'intérêt de logiciels de géométrie dynamique, qui rétablissent des fonctions de manière suffisante pour le traitement des problèmes.

3. Environnements de géométrie dynamique : représentations et outils

Les logiciels de géométrie dynamique sont largement utilisés en géométrie plane, notamment pour leur capacité à produire des objets intégrant des propriétés géométriques résistantes au déplacement et ainsi constituer un milieu plus riche pour l'apprentissage de la géométrie (Laborde et Capponi, 1994). Ces caractéristiques restent valides dans l'espace, mais notre réflexion se limitera dans le cas présent aux représentations offertes et les fonctions que celles-ci peuvent remplir.

Pour la géométrie dans l'espace, trois types d'environnements sont généralement utilisés : des environnements de géométrie dynamique dans le plan détournés pour représenter les objets de l'espace[10], des logiciels de dessin assisté par ordinateur (DAO), et des environnements de géométrie dynamique tridimensionnelle à proprement parler. Les premiers sont limités à des usages spécifiques, et présentent des contraintes similaires aux dessins, aussi nous n'en ferons pas l'étude. Les logiciels de DAO permettent de créer des objets manipulables et d'en présenter facilement des vues variées, à ce titre ils sont plus comparables aux maquettes. Ils présentent néanmoins les mêmes limites relatives à la prise en charge d'hypothèse ; en outre les constructions sont généralement complexes — *via* des instructions spécifiques —, ce qui limite la fonction d'expérimentation.

Nous nous intéresserons spécifiquement ici aux environnements de géométrie dynamique 3D, et plus spécifiquement au logiciel Cabri 3D avec lequel a été réalisé notre étude (Mithalal, 2010). La majeure partie des remarques suivantes restent valides, tout en dépendant parfois de choix d'ergonomie spécifiques, aux principaux logiciels existant : GeospaceW[11], Archimedes Geo 3D, 3d-geom, Geogebra.

3.1 Caractéristiques de l'environnement

Cet environnement présente deux caractéristiques essentielles des logiciels de géométrie dynamique : la manipulation directe des objets, c'est-à-dire la possibilité d'agir dessus à l'aide de la souris sans la médiation d'une autre interface, et le rôle fondamental du déplacement. Soulignons que l'action sur les objets, et notamment les constructions géométriques, sont permises par des outils spécifiques[12].

Les représentations à l'écran s'appuient par défaut sur la perspective centrale, qui préserve mieux les impressions visuelles, mais il est possible de choisir des vues correspondant à différentes projections — perspective cavalière, militaire, axonométrique… Comme dans la plupart des logiciels de ce type, l'apparence des objets (couleur, épaisseur, remplissage, affichage… Cf. Figure 9) peut être modifiée. En outre dans ce cas il est possible de simuler une rotation de l'objet à l'aide de la souris, ce qui permet de multiplier les angles de vue.

10 Par exemple http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Maths/accueilmath.htm

11 Ce logiciel étant plus ancien, les possibilités de manipulation directe sont néanmoins beaucoup plus réduites.

12 Pour une étude plus complète, voir Mithalal (2010, pp.59 - 63)

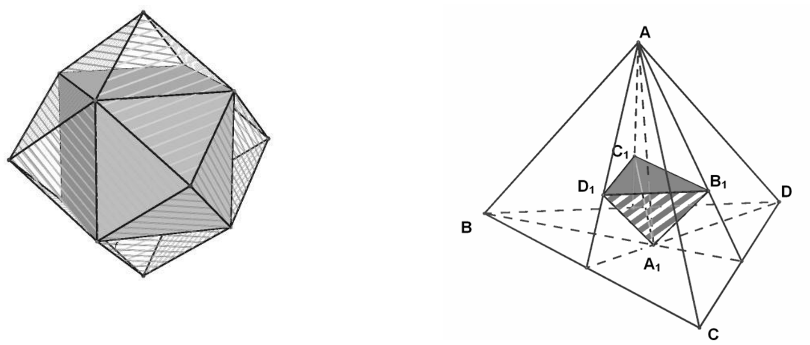

Figure 9*. Diverses représentations des polygones et polyèdres*

L'action de l'utilisateur s'effectue essentiellement à l'aide de la souris, qui permet de saisir les objets pour les déplacer (dans le plan ou verticalement, de manière séparée) ou pour les utiliser dans une construction. L'action de la souris est de fait déterminée par le choix d'un outil de manipulation, de construction, de mesure, etc. (Figure 10)

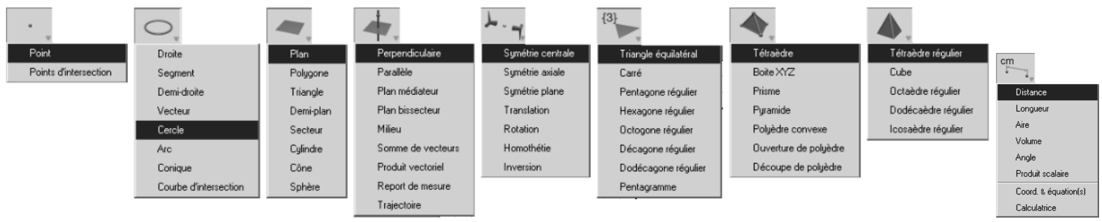

Figure 10. *Menus d'outils de Cabri 3D*

Les objets construits respectent ainsi deux types de conditions définies lors de leur création : une appartenance éventuelle à un autre objet (par exemple, un point peut être défini sur une droite ou un plan), et des propriétés portées par les outils employés (par exemple des propriétés de symétrie, d'incidence…).

Les représentations demeurant des projections planes, certains choix sont opérés pour leur donner davantage de lisibilité. Il est bien entendu possible de nommer les objets pour les repérer. En outre, l'action de l'utilisateur est soutenue par la mise en surbrillance des objets survolés par la souris et utilisables pour la construction choisie, ainsi que par des messages contextuels précisant la nature des objets ou leur utilisation (Figure 11). Afin de ne pas surcharger les représentations, les objets sont limités dans l'espace (un plan est figuré par un parallélogramme), et un « brouillard » fait disparaître progressivement les objets pour simuler un effet d'éloignement.

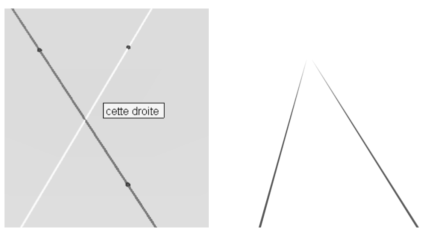

Figure 11. *Surbrillance d'objets, uniquement s'ils peuvent être utilisés, et effet de brouillard*

3.2 La fonction d'illustration

La possibilité de faire varier continûment le point de vue sur un même objet était déjà identifié par Bakó (2003) comme un moyen de simuler une troisième dimension, dans la mesure où les effets liés à la projection sont modifiés lorsque le point de vue est modifié. Ainsi, pour vérifier qu'un point d'intersection de deux droites est susceptible de correspondre à une intersection des objets géométriques, il est possible de modifier le point de vue : si la position de ce point varie, ou si celui-ci disparaît, cela traduira qu'il s'agit d'un effet lié à la projection (Fig. 12). La disparition progressive des objets en raison de leur éloignement contribue en outre à renforcer cette fonction d'illustration.
Les dessins de la figure 12 sont tirés d'une activité dont nous avons montré qu'elle était impossible en perspective cavalière lorsqu'elle était proposée, comme dans le cas présent, sans le support d'un polyèdre : *étant donné deux droites de l'espace, déterminer si elles ont un point d'intersection*. Cette activité proposée à quatre classes de seconde n'a suscité que peu de problèmes perceptifs (Mithalal, 2010).

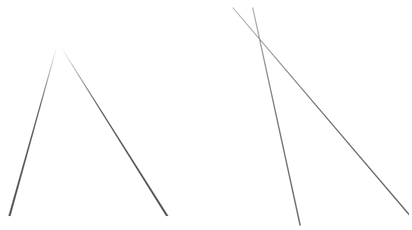

Figure 12. *Modification de la position d'une intersection visible*

Soulignons néanmoins que toutes les difficultés perceptives ne sont pas abolies, ce qui empêche toute confusion entre la représentation et l'objet d'étude. Ainsi, contrôler la position d'un point de l'espace est très difficile, et le contrôle visuel est insuffisant pour résoudre le problème suivant : *Étant donné une droite et un point de l'espace dans Cabri 3D, déplacer le point sur la droite.*

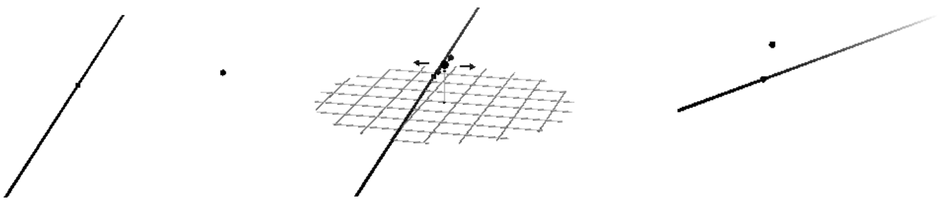

Figure 13. *Tentative de déplacer un point sur une droite*

La fonction d'illustration, bien que parfois limitée, s'avère donc globalement suffisante pour la résolution de problèmes de géométrie.

3.3 Prise en charge d'hypothèses

Concernant la prise en charge d'hypothèses, notons que les représentations de Cabri 3D permettent de ne faire figurer qu'un nombre restreint d'informations, dont notamment la présence d'angles droits. *Stricto sensu*, les informations disponibles ne sont pas d'une qualité beaucoup plus grande que celles figurant sur les maquettes. Néanmoins, les informations implicitement disponibles sont en réalité plus nombreuses.

En premier lieu, la possibilité de changer le point de vue sur les objets limite les hypothèses abusives de la part de l'observateur, contrairement aux projection sur papier.
En outre, Cabri 3D dispose d'outils de mesure divers — longueur, aire, volume, angle, produit scalaire — permettant de faire apparaître des informations. Celles-ci concernent l'objet graphique, et ne correspondent pas nécessairement à des propriétés géométriques : deux segments dont les mesures affichées sont égales ne sont pas nécessairement de même longueur, ne serait-ce qu'en raison des imprécisions de mesure. Néanmoins, elles permettent d'établir des conjectures, et dans certains cas particuliers de disposer d'informations géométriques puisque, par exemple, si la distance entre deux droites est strictement positive, celles-ci ne peuvent pas être sécantes.
Enfin, les caractéristiques de la géométrie dynamique permettent de *réifier* (Jahn, 1998), de rendre tangible des propriétés géométriques. Considérons trois points A, B et C, tels que lorsque A est déplacé par l'utilisateur, B "bouge" aussi : cela signale une relation entre A et B. Si de plus, quelle que soit la position de A, C est *toujours* le milieu de [AB], la conjecture "*B est le symétrique de A par rapport à C*" devient très plausible[13].
En ce sens, nous pouvons considérer que la prise en charge d'hypothèses est convenable dans de tels environnements, même si ces hypothèses sont plus souvent des conjectures relatives aux propriétés des objets.

3.4 Fonction d'expérimentation

Cette dernière fonction était la plus problématique dans le cas de la perspective cavalière et des maquettes, elle est en revanche bien assurée par les environnements de géométrie dynamique 3D pour plusieurs raisons : une meilleure visualisation, la manipulation directe, et la présence d'outils de constructions fondés sur des propriétés géométriques. Nous proposons d'illustrer ceci par l'activité suivante.

Des élèves de seconde ont à leur disposition un cube sectionné par un plan (Figure 14), et doivent donner autant de méthodes différentes que possible pour construire le sommet manquant. La mise en place de cette activité dans quatre classe a laissé apparaître des solutions très diverses, certaines entièrement centrées sur le dessin lui-même, d'autres s'appuyant sur les propriétés géométriques du cube (Mithalal, 2010).

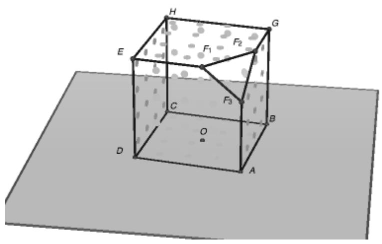

Figure 14. *Cube sectionné par un plan*

Une des stratégies communément employées consiste à placer un point dans l'espace, puis ajuster sa position pour former un cube. Nous avons signalé (Figure 13) que ceci est, visuellement, quasiment impossible. Néanmoins, la possibilité de séparer le déplacement vertical et horizontal du point, ainsi que de construire des repères visuels (plan de base, prolongement de l'arête tronquée) ont souvent permis à cette stratégie d'aboutir (Figure 15, deux premières images).

13 Elle peut même paraître certaine aux yeux des élèves, ce qui constitue une difficulté connue pour passer à une géométrie déductive.

C’est ainsi l’utilisation de constructions géométriques qui permet de pallier les limites de la vision, par la réalisation de tracés auxiliaires. Les captures d’écran de la figure 13 soulignent ainsi que les solutions s’appuient sur des tracés dont certains — cercle, grandes diagonales du cube — n’auraient pu exister hors d’un tel environnement.

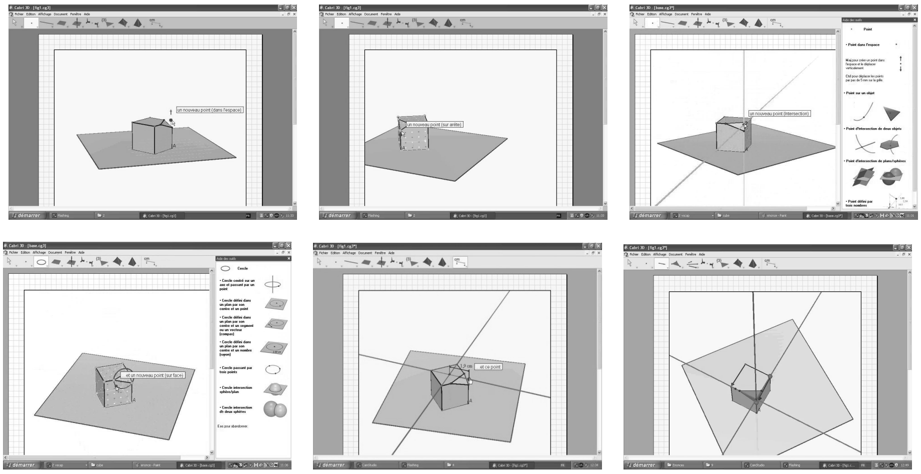

Figure 15. *Diverses stratégies de construction du sommet manquant*

Cette possibilité n'est pas ici offerte par la présence d'un solide, mais bien par l'environnement. Pour s'en convaincre, confrontons les perspectives illisibles de la figure 6 à l'étude de droites illustrée par la figure 12. Dans ce second cas, il fallait étudier diverses configurations de deux droites de l'espace et déterminer les cas où elles se coupaient : pour cette tâche, l'observation directe est généralement insuffisante (Figure 16).

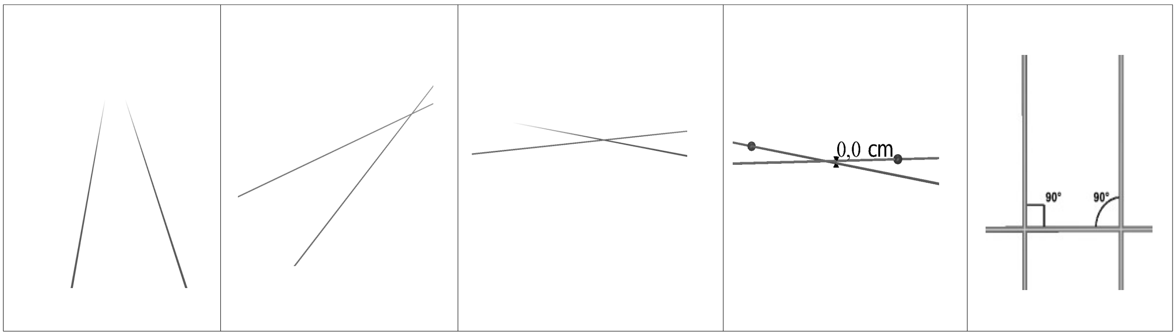

Figure 16*. Cas d'indéterminations et recherches instrumentées d'informations*

Dans les trois premières images, les informations obtenues sont sujettes à caution : dans la première une intersection peut être masquée par le brouillard, dans la deuxième celle observée est potentiellement un effet de projection – dans ce cas, le changement de point de vue permet de lever une partie de l'ambiguïté – et dans la troisième, les droites sont *très proches*, mais se coupent-elles ? L'utilisation des outils de Cabri 3D permet de lever, sous certaines conditions, ces ambiguïtés. Ainsi, la mesure de la distance entre les droites donnent ici une information insuffisante – la distance nulle est peut-être produite par une approximation trop grossière – mais une distance strictement positive aurait été exempte d'ambiguïté. Le dernier dessin illustre certaines nuances entres les informations disponibles : l'angle de droite est *de mesure 90°*, mais cela correspond à une mesure ; celui de gauche en revanche est matérialisé par un carré pour signifier qu'il s'agit d'une propriété géométrique définie dans le logiciel, seuls susceptible d'assurer le parallélisme des deux droite étudiées.

Il devient ainsi possible de réaliser des constructions de manière efficace et non ambiguë, et de mettre des conjectures à l'épreuve notamment en s'appuyant sur le déplacement, comme nous l'avons signalé dans la section précédente. En cela, la fonction d'expérimentation est restaurée et il est de nouveau possible d'utiliser les dessins en vue de la résolution de problèmes, ce que nous détaillerons ultérieurement.

Conclusion

Les problèmes de visualisation auxquels se heurte l'enseignement de la géométrie dans l'espace ne sont ainsi pas exclusivement de nature cognitive. S'il est vrai que faute de représentations utilisables, des *représentations mentales* peuvent constituer une aide certaine, la difficulté centrale est en réalité liée à la possibilité offerte de soutenir la résolution des problèmes. Nous avons montré que la perspective cavalière et les maquettes, principales modalités utilisées dans l'enseignement, sont à cet égard de faible qualité : la fonction d'illustration et de prise en charge d'hypothèses sont limitées, la fonction d'expérimentation – pourtant essentielle – est très mal assurée.

Ces problèmes de visualisation ne constituent pas une difficulté absolue, en ce qu'ils sont liés aux représentations choisies. Ainsi les environnements de géométrie dynamique tridimensionnels permettent-ils de restaurer ces fonctions de manière satisfaisante. Si les problèmes de visualisation ne sont pas abolis, les fonctionnalités du logiciel permettent d'utiliser les informations perçues. Bien entendu les meilleures possibilités de visualisation offertes sont d'une aide précieuse, mais il faut insister sur le rôle majeur des outils de construction, dans la mesure où ce sont eux qui permettent de restaurer la fonction d'expérimentation. Dès lors, et même lorsque « on voit mal dans l'espace », il devient possible de travailler sur des problèmes de géométrie dans l'espace,
Ceci ouvre alors une perspective intéressante pour l'apprentissage de la géométrie. Nous avons souligné que la confusion entre l'objet graphique et l'objet géométrique constitue un obstacle au passage vers une géométrie déductive. Cette confusion n'est plus possible avec la perspective cavalière, elle ne l'est pas non plus avec les environnements de géométrie dynamique dans la mesure où des incertitudes visuelles subsistent. L'appui sur la visualisation iconique n'est plus possible, et il est nécessaire de faire appel aux connaissances théoriques pour interpréter ou contrôler les informations visuelles. Dans ce contexte, l'étude du dessin et de l'objet géométrique deviennent complémentaires, et on est en droit de faire l'hypothèse que la preuve trouve une place plus légitime qu'en géométrie plane, en apportant des certitudes que le dessin n'offre plus.

Références

ANTIBI, A., BARROS, J-M., BÉNIZEAU, P., DESTAINVILLE, B., ROUMILHAC, J-P., BARRA, R., et MORIN, J. (2000) *Transmath 2de,* Nathan édition.

BAKÓ, M. (2003). Different projecting methods in teaching spatial geometry. *In Proceedings of the Third Conference of the European society for Research in Mathematics Education*.

BAKÓ, M. (2006). *Utilisation de l'ordinateur pour le développement de la vision spatiale*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse II - Le Mirail.

BAYART, C., GOS, C., HINDELANG, C., KEYLING, M.-A., MATHERN, C., ORTLIEB, M., RAUSCHER, J.-C. et ROESCH, G. (1998). Voir et raisonner : à la conquête de l'espace au collège. *Repères IREM*, **33** : 19 – 36.

BONAFÉ, F. et SAUTER, M. (1998). Enseigner la géométrie dans l'espace. *Repères IREM*, **33** : 5 – 18.

CHAACHOUA, H. (1997). *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

CHAACHOUA, H. (1998). Géométrie dans l'espace : le point sur la lecture des dessins par des élèves en fin de collège. *Petit x*, **48** :37 – 68.

de FREITAS, E. et McCARTHY, M. (2014). (Dis)orientation and spatial sense : Topological thinking in the middle grades. *In Proceedingsof the EighthCongress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

DENIS, M. (1997). *Langage et cognition spatiale*. Masson.

DUVAL, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM*, **17** : 121 – 138.

DUVAL, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10** : 5 – 53.

DUVAL, R. et GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, **76** : 7 – 27.

GRENIER, D. et TANGUAY, D. (2008). L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratiques et théoriques des polyèdres réguliers. *Petit x*, **78** : 26 – 52.

HOUDEMENT, C. et KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **11** : 175 – 193.

JAHN, A.-P. (1998). *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier.

LABORDE, C. et CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **14(1)** : 165 – 210.

LISMONT, L. et ROUCHE, N. (1999). Formes et mouvements. perspectives pour l'enseignement de la géométrie. Rapport technique, Centre de Recherche pour l'Enseignement de la Géométrie, Nivelles, Belgique.

MARCHAND, P. (2006). Comment développer les images mentales liées à l'apprentissage de l'espace en trois dimensions? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **11** : 103 – 121.

MISSET, L. (2004). *Déclic 2nde*, Hachette Éducation édition, Paris.

MITHALAL, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.

PARZYSZ, B. (1988). “knowing” vs “seeing”, problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, **19** : 79 – 92.

PARZYSZ, B. (1991). Espace, géométrie et dessin. une ingénierie didactique pour l’apprentissage, l’enseignement et l’utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **11(2.3)** : 211 – 240.

PARZYSZ, B. (2006). La géométrie dans l’enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s’agit-il? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, **17** : 121 – 144.

ROMMEVAUX, M.-P. (1997). *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l’apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg 1.

ROMMEVAUX, M.-P. (1998). Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **6** : 27 – 65.

SCHUBRING, G. (2010). Historical comments on the use of technology and devices in ICMEs and ICMI. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, **42(1)** : 5 – 9.