

ACTIVITÉ ... Multiplication : une drôle de commutativité !*

Éléments de solution

Valentina CELI
ESPE d'Aquitaine

(Nous avons repris en italique les questions posées)

Calculez le produit de 34 par 86.

Le produit demandé est égal à 2924.

Calculez ensuite le produit de 68 par 43. Que se passe-t-il ?

Le produit demandé est le même que le précédent.

Suivez la même procédure avec les nombres 23 et 96. Parvenez-vous bien à la même conclusion ?

OUI. En calculant le produit de 23 par 96, on obtient 2208. De même, en calculant le produit de 32 par 69, on obtient le même résultat.

Pour les premier couple de nombres donnés, on constate que :

$3 \times 8 = 4 \times 6 = 24$, 3 et 8 étant les chiffres des dizaines de chacun des deux nombres, 8 et 6 leurs chiffres des unités.

Pour le deuxième couple, on constate que :

$2 \times 9 = 3 \times 6 = 18$, 2 et 9 étant les chiffres des dizaines de chacun des deux nombres, 3 et 6 leurs chiffres des unités.

En outre, dans les deux cas, en échangeant le chiffre des unités avec le chiffre des dizaines, le produit des deux nombres obtenu est encore le même.

Identifiez la caractéristique commune aux deux cas traités et prouvez-la dans le cas général.

Soient deux nombres à deux chiffres, (ab) et (cd) .

En échangeant le chiffre des unités avec le chiffre des dizaines, on obtient les nombres (ba) et (dc) .

On peut écrire :

$$(ab) = 10a + b \text{ et } (cd) = 10c + d ; (ba) = 10b + a \text{ et } (dc) = 10d + c.$$

On calcule :

$$(10a + b) \times (10c + d) = 100ac + 10bc + 10ad + bd = 100ac + 10 \times (bc + ad) + bd.$$

$$(10b + a) \times (10d + c) = 100bd + 10ad + 10bc + ac = 100bd + 10 \times (ad + bc) + ac.$$

On déduit que, pour que le produit de $(ab) \times (cd)$ soit égal au produit de $(ba) \times (dc)$, il faut que $a \times c$ soit égal à $b \times d$.

* Activité publiée dans le numéro 95 de *petit x*

Est-il possible de déterminer de façon exhaustive tous les nombres entiers naturels à deux chiffres qui respectent la caractéristique en question ?

On considère les cas où $a \neq d$ et $b \neq c$.

Dans la table de Pythagore (voir ci-dessous), on cherche tous les nombres qui apparaissent trois ou quatre fois et qui sont le produit de deux nombres à un chiffre.

On trouve : 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24 et 36.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Pour chacun de ces nombres, on a :

- 4 est le produit de 1 multiplié par 4 et de 2 multiplié par 2 ; cela donne lieu à deux couples de facteurs : $12 \times 42 = 21 \times 24 = 504$;!
- 6 est le produit de 1 multiplié par 6 et de 2 multiplié par 3 ; cela donne lieu à quatre couples de facteurs : $12 \times 63 = 21 \times 36 = 756$ et $13 \times 62 = 31 \times 26 = 806$;
- 8 est le produit de 1 multiplié par 8 et de 2 multiplié par 4 ; cela donne lieu à quatre couples de facteurs : $12 \times 84 = 21 \times 48 = 1008$ et $14 \times 82 = 41 \times 28 = 1148$;
- 9 est le produit de 1 multiplié par 9 et de 3 multiplié par 3 ; cela donne lieu à deux couples de facteurs : $13 \times 93 = 31 \times 39 = 1209$;
- 12 est le produit de 2 multiplié par 6 et de 3 multiplié par 4 ; cela donne lieu à quatre couples de facteurs : $23 \times 64 = 32 \times 46 = 1472$ et $24 \times 63 = 42 \times 36 = 1512$;
- 16 est le produit de 2 multiplié par 8 et de 4 multiplié par 4 ; cela donne lieu à deux couples de facteurs : $24 \times 84 = 42 \times 48 = 2016$;
- 18 est le produit de 2 multiplié par 9 et de 3 multiplié par 6 ; cela donne lieu à quatre couples de facteurs : $23 \times 96 = 32 \times 69 = 2208$ et $26 \times 93 = 62 \times 39 = 2418$;
- 24 est le produit de 3 multiplié par 8 et de 4 multiplié par 6 ; cela donne lieu à quatre couples de facteurs : $34 \times 86 = 43 \times 68 = 2924$ et $36 \times 84 = 63 \times 48 = 3024$;
- 36 est le produit de 4 multiplié par 9 et de 6 multiplié par 6 ; cela donne lieu à deux couples de facteurs : $46 \times 96 = 64 \times 69 = 4416$.