LE CONCEPT DE NOMBRE RÉEL AU LYCÉE ET EN DÉBUT D'UNIVERSITÉ :UN OBJET PROBLÉMATIQUE

Martine VERGNAC
IREM de Montpellier, Lycée Jean Lurçat Perpignan

Viviane DURAND-GUERRIER
Université Montpellier II

Résumé. Cet article porte sur l'objet ***nombre réel*** au lycée et sur les rapports à cet objet entretenus par des enseignants de lycée ainsi que des élèves et des étudiants. Au moyen d'une étude de cas menée dans l'académie de Montpellier au cours de l'année scolaire 2012/2013 et prolongée en 2014, nous avons réalisé un état de lieux des conceptions des élèves de Seconde, de Terminale scientifique et d'étudiants de Licence à propos des nombres réels, et les avons comparées. Pour cela, nous avons identifié ces conceptions à l'aide de deux questionnaires, que nous avons analysés à la lumière de notre étude épistémologique. Nous proposons pour finir quelques pistes pour amorcer dès le lycée une approche du concept de nombre réel.

Mots clefs. Nombre réel, didactique et épistémologie des mathématiques, continu, conception, transition lycée-université.

Abstract. This article focuses on the *real number* in high school, and the way that teachers and students from high school and university interact with it. Through a case study carried out in the Montpellier Academy during the 2012-2013 school year, and extended into 2014, we tried to collect, from first and third year scientific sections highschool students, and university science students, their conceptions of the real numbers, and we compared each with the others. To this end, we have identified these conceptions through two questionnaires that we analised in the light of our epistemological study. Finally, we suggest some directions to start as soon as high school an approach of the real number concept.

Key-words. Real number, didactic and epistemology of mathematics, continuum, conception, transition from highschool to university.

Introduction

L'étude des différentes constructions de l'ensemble des nombres réels au dix-neuvième siècle montre que le concept de nombre réel est lié à ceux de limite et de continuité qui sont les premières bases de l'analyse réelle au lycée et en début d'université. En nous appuyant sur cette étude et sur des entretiens menés auprès d'enseignants de Seconde et de Terminale et /ou de Première scientifique, ainsi que sur une analyse des programmes du lycée, nous avons cherché à déterminer quelle transposition didactique du concept de nombre réel est en œuvre depuis la réforme des lycées de 2009, quels sont les rapports d'un certain nombre d'enseignants de lycée à l'objet *nombre réel*, et quelles en sont les conséquences sur l'approche de cet objet par un élève de lycée et sur les difficultés éventuelles générées par celle-ci.

Dans un deuxième temps, les analyses de questionnaires posés en Seconde et en Terminale scientifique nous ont amené à proposer une typologie des conceptions d'élèves de lycée à propos des nombres réels. Nous avons cherché à comprendre les obstacles éventuels que ces conceptions peuvent engendrer, et à identifier des pistes permettant de dépasser ces obstacles pour une meilleure adéquation aux besoins des mathématiques, en particulier en analyse. Les résultats d'une enquête conduite en janvier-février 2014 auprès d'étudiants de Licence 1ère année (notée Licence 1) à l'université Montpellier 2 complètent notre corpus.

La notion de conception est polysémique en didactique des mathématiques. En accord avec Artigue (1990), nous considérons que ce qui intéresse le didacticien c'est :

> l'identification de conceptions locales qui se manifestent en situation et l'analyse des conditions de passage de telle conception locale à telle autre, qu'il s'agisse de rejeter une conception erronée, de mettre en place une conception permettant d'améliorer l'efficacité dans la résolution de telle ou telle classe de problèmes ou de favoriser la mobilité entre des conceptions déjà disponibles.(Artigue 1990, p.278)

I. Quelle transposition didactique des nombres réels au lycée ?

Pour éclairer les choix de transposition didactique des nombres réels à l'œuvre dans les programmes de lycée, nous présentons brièvement les principaux éléments que nous avons dégagés de notre étude épistémologique sur l'émergence de la nécessité de construire l'ensemble des nombres réels dans la communauté mathématique.

I.1. Quelques éléments d'épistémologie des nombres réels et de la notion de continu

Bien que certains nombres irrationnels soient connus depuis l'antiquité, la construction de l'ensemble des nombres réels est relativement récente dans l'histoire des mathématiques et date de la fin du dix-neuvième siècle. Selon Boniface (2002), elle est étroitement liée à ce qu'elle nomme l'arithmétisation de l'analyse et à la nécessité de fonder rigoureusement les concepts fondamentaux de continuité et dérivabilité des fonctions numériques. Boniface considère que Bolzano (1781-1848) joue un rôle capital dans les fondements de l'analyse, car contrairement à beaucoup de ses contemporains dont le but est le développement de la science, il se soucie essentiellement de légitimer les méthodes utilisées.
Cette légitimation doit s'ancrer hors de ce qu'il nomme une partie appliquée des mathématiques, c'est-à-dire la géométrie. Dans la préface au *Mémoire sur le théorème des valeurs intermédiaires* Bolzano écrit :

> …Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode qui consiste à vouloir déduire les vérités de la mathématique pure ou universelle (c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) de considérations qui appartiennent à une partie appliquée (ou spéciale) seule, à savoir la géométrie. (Bolzano, 1817, p. 210).

Bien que lui-même ne propose pas une construction de l'ensemble des nombres réels, Bolzano est d'une certaine manière le précurseur de Cantor, Dedekind, Méray et Weierstrass qui dans la deuxième moitié du 19ème vont proposer, à des moments proches, plusieurs constructions de l'ensemble des nombres réels avec pour objectif commun de se détacher de l'intuition géométrique.

Dedekind l'exprime très clairement :

> […] je tiens le concept de nombre pour totalement indépendant des représentations ou intuitions de l'espace et du temps et […] j'y vois plutôt une émanation immédiate des pures lois de la pensée ;… ; les nombres sont des libres créations de l'esprit humain » (Dedekind, 1887, traduction de 1978, p. 65).

Mais pour autant sa construction basée sur la notion de coupure repose sur une intuition géométrique de la droite réelle (Dedekind, 1872, p.43).De même, selon Belna, Cantor met en relation la notion de *suite fondamentale* appelée aujourd'hui *suite de Cauchy*[1] avec la droite géométrique via la notion d'abscisse (Belna 1996, p.134-135). Ils construisent tous deux le concept de nombre réel en s'appuyant sur une « intuition de l'espace » mais leurs constructions leur permettent de définir rigoureusement cet objet indépendamment de cette intuition. Les travaux de ces auteurs ont permis de dégager plusieurs propriétés équivalentes permettant de définir axiomatiquement l'ensemble des nombres réels :

1. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (résultat admis par Bolzano dans son Mémoire sur le théorème des valeurs intermédiaires et découlant immédiatement de la construction de Dedekind) ;
2. Tout couple de suites de réels formant un couple de suites adjacentes[2] possède une limite commune dans $\mathbb{R}$ (propriété admise par Cauchy dans sa preuve du théorème des valeurs intermédiaires par dichotomie) ;
3. Toute suite de Cauchy converge dans $\mathbb{R}$ (résultat découlant immédiatement de la construction de Cantor).

Rappelons que ces trois propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$ ne sont pas satisfaites dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ; en effet bien que $\mathbb{Q}$ soit dense dans $\mathbb{R}$, il n'est pas complet au sens où, comme le dit Dedekind, il y a infiniment plus de points sur la droite réelle que sur la droite rationnelle ; en ce sens elles caractérisent la complétude, encore appelée continuité, de l'ensemble des nombres réels. On peut noter que la notion de fonction continue est antérieure aux constructions de l'ensemble $\mathbb{R}$; mais également que la construction rigoureuse des premiers concepts de l'analyse réelle, à savoir les limites, la continuité et la dérivabilité dans $\mathbb{R}$, est étroitement liée aux constructions de $\mathbb{R}$ et qu'elle passe par un aller-retour permanent entre intuition et formalisation.

I.2. Principales évolutions dans les programmes du lycée des années 70 à aujourd'hui

Après la réforme dite des « maths modernes » des années 70 où la structure de corps ordonné de l'ensemble formule est introduit dès la classe de Première C, et où cette introduction précède celle de l'analyse réelle, l'un des objectifs de la réforme du début des années 80 est de lutter contre un formalisme excessif qui prive l'élève d'un recours à l'intuition. Les instructions officielles préconisent de faire appel à la géométrie pour introduire les premiers concepts de l'analyse. Dans ce cadre, une approche ostensive des objets de l'analyse a été développée; les graphiques de fonctions, les tableaux de

1 On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy *si et seulement si* :

$\forall\varepsilon > 0, \exists N\in N$ tel que $\forall p \geq N, \forall q \geq N, \quad |u_p - u_q| < \varepsilon$.

2 On dit que deux suites numériques $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ forment un couple de suites adjacentes *si et seulement si* les quatre propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $(u_n)_{n\in N}$ est une suite croissante ; 2. $(v_n)_{n\in N}$ est une suite décroissante ;
3. Pour tout $n \in N$, $u_n \leq v_n$; 4. La suite $(v_n - u_n)_{n\in N}$ tend vers 0.

variation, etc., sont donnés à voir aux élèves et les savoirs liés à ces ostensifs sont donnés comme «allant de soi». A partir de là et dans les programmes qui ont suivi jusqu'à aujourd'hui, toute approche des structures des ensembles de nombres a été abandonnée, puis progressivement les travaux d'approximation et de comparaison des nombres ont quasiment disparu des programmes de lycée.

I.3. Que peut-on retenir des programmes actuels de lycée issus de la réforme de 2009 ?

On observe une absence de toute construction sur les ensembles de nombres ainsi que l'absence d'un travail explicite sur les nombres irrationnels : il n'y a, au niveau du collège, aucune référence à la notion de nombre réel, ni même à celle d'irrationalité et l'ensemble des programmes de lycée ne donne aucune indication concernant les exigences institutionnelles sur les ensembles de nombres, ce qui constitue un changement important par rapport au programme de 2001 (voir les deux extraits des programmes de Seconde de 2001 et de 2009 donnés en annexe). En effet, le programme de Seconde de 2001 précise que sont attendues des capacités sur la nature et l'écriture des nombres, attente qui ne figure plus dans les programmes de 2009 puisque le seul point du programme où les ensembles de nombres sont évoqués, se situe dans la rubrique *Notations et raisonnement* dans laquelle aucune compétence à atteindre n'est précisée.

En particulier, la disparition dans les classes scientifiques du lycée du théorème sur les suites adjacentes qui figurait dans les programmes précédents amène la disparition d'activités permettant de donner du sens à la notion de densité dans l'ensemble des nombres réels, notamment les situations d'approximation d'un réel par une suite de nombres rationnels.

Dans l'introduction des premiers outils de l'analyse, le programme actuel s'appuie sur les notions intuitives de voisinage, de limite, de continu,… toutes notions qui sont issues de la topologie de $\mathbb{R}$ et qui sont approchées ici par la géométrie de la droite. L'ensemble $\mathbb{R}$ est identifié à l'ensemble des abscisses des points de la droite munie d'un repère : les propriétés des nombres réels se déduisent « naturellement » de cette identification. Une des questions qui a guidé notre étude, fut de savoir si les propriétés de $\mathbb{R}$, qui ont été construites par le modèle ensembliste issu ultérieurement des constructions de Cantor et de Dedekind, peuvent être ainsi atteintes par la perception intuitive du continu de la droite.

II. Comment vivent les nombres réels au lycée ? Le point de vue des enseignants

Dans le premier semestre de l'année 2012-2013, nous avons mené sept entretiens semi-directifs avec des enseignants de lycée de l'académie de Montpellier enseignant à la fois en classe de Seconde et en classe de Première ou de Terminale scientifiques. Nous avons interrogé sept professeurs dont les anciennetés dans l'enseignement secondaire étaient très différentes. Nous avons cherché à déterminer quel était leur rapport[3] à l'objet *nombre réel* (principalement le rapport institutionnel mais aussi le rapport personnel), en quoi l'évolution des programmes avait éventuellement modifié leur posture didactique vis-vis de cet objet et quelle perception ils avaient des conceptions des élèves à propos de cet objet.

3 Dans un premier temps, nous nous intéressons au rapport institutionnel entretenu avec l'objet nombre réel en position d'enseignants dans le cadre de l'institution *Enseignement secondaire français d'aujourd'hui* (Chevallard, 1992).

Les enseignants interrogés sont en conformité avec le programme qui présente l'ensemble des nombres réels comme un donné allant de soi, avec comme seul outil didactique la vision géométrique de la droite réelle. On peut penser que cette conception[4] rejoint la construction de ℝ par Dedekind, mais aussi celles d'auteurs contemporains tels Longo, pour qui l'expérience la plus commune du continu est celui du tracé d'une ligne sur une feuille de papier (Longo 1999, p.403). Quelques enseignants mettent plutôt en avant l'aspect « numérique » en revenant sur la différence entre les ensembles de nombres, ou en insistant sur le lien avec la résolution des équations. Cette différence se retrouve dans leur discours vis-à-vis des élèves ; on peut distinguer ceux qui mettent en avant les réels comme l'ensemble de tous les nombres connus :

> *…Finalement quand je vois mes élèves je leur dis, écoutez, c'est tous les nombres du monde pour l'instant pour vous….*

de ceux qui privilégient l'approche par la droite des réels:

> *...je donne une droite repérée [...] tout point peut être repéré par son abscisse [...] l'ensemble des abscisses est un ensemble qui s'appelle l'ensemble des nombres réels.*

Pour les premiers, ceci fait écho aux analyses présentées par Birebent qui note que la construction du numérique dans l'enseignement secondaire apparaît comme « un cheminement vers ℝ rythmé par les élargissements successifs » (Birebent 2007, p.1)
La disparition du chapitre sur les ensembles de nombres a sensiblement modifié les pratiques des enseignants interviewés; pour tous (excepté l'un d'entre eux dont c'était la première année d'enseignement), les nombres réels sont abordés dans d'autres chapitres souvent lorsqu'ils introduisent les intervalles, la plupart du temps à l'occasion d'un chapitre sur les fonctions.

Presque tous les enseignants interviewés disent que la rédaction de ces nouveaux programmes a entraîné la disparition du concept de nombre rationnel au Lycée. Par conséquent la problématique rationnel-irrationnel n'a plus cours au Lycée. On pourrait se demander alors ce qu'il en est du travail sur les nombres au Lycée. Pour certains il y a encore des aspects liés à l'ordre (comparaison de nombres pour placer ceux-ci dans un tableau de variations par exemple ; dire si un nombre appartient ou non à un intervalle donné) mais surtout pour les sept enseignants interviewés, il y a la nécessité de résoudre des équations.
Dans ce cadre, ce qui est en jeu est la distinction entre un décimal et un non-décimal parce que les enseignants interviewés n'acceptent pas comme solution d'une équation 0,333 quand la réponse attendue est le nombre 1/3 comme l'exprime l'un d'entre eux: « *...par contre la différence entre un décimal et un non décimal [ ] elle est pertinente...* ». Pour autant les réponses apportées par cet enseignant ne permettent pas de percevoir un travail particulier sur cette différence ni de dire en quoi cette différence est pertinente dans le cadre du savoir à enseigner au lycée. De ce point de vue, les travaux de Bronner (1997b) qui avaient mis en évidence un vide didactique concernant la notion d'idécimalité restent d'actualité.

En outre, tous les enseignants interrogés regrettent que les programmes ne précisent pas ce qui est attendu sur les nombres, ce qui selon eux ouvre la voie à une grande disparité dans les pratiques. Ils relèvent également que cela introduit des difficultés nouvelles: tous les chapitres d'analyse du lycée se situent dans ℝ et comme les élèves aussi bien à

4 Ici nous nous référons à la notion du continu classique en épistémologie chez des auteurs comme Longo (1999)

l’entrée qu’en fin de Seconde n’ont aucune expérience de ces nombres, ils travaillent et construisent en première et terminale des notions avec des objets pour lesquels ils n'ont aucune proximité.

L’incertitude didactique de ces enseignants concernant les nombres réels peut être mise en relation avec leur rapport personnel[5] à l’ensemble $\mathbb{R}$. Six d’entre eux ont du mal à retrouver comment l’ensemble des nombres réels leur a été introduit; de plus ils ont des difficultés à exprimer ce qu’est cet ensemble pour eux aujourd’hui. Il semble à travers les réponses fournies dans les entretiens que, dans le cas où elle a été faite (ce qui n’a pas été le cas pour trois d’entre eux), la construction de R est celle établie à partir des suites de Cauchy. Un seul des enseignants évoque les coupures de Dedekind mais précise que cette connaissance lui vient des ses lectures personnelles. Les analyses qui précèdent semblent indiquer une insuffisance de bagage épistémologique des enseignants interrogés. Nous faisons l’hypothèse que ce manque peut poser problème pour amener leurs propres élèves à dépasser les obstacles rencontrés dans l’apprentissage du concept de nombre réel.

Par ailleurs, les enseignants interviewés pensent dans leur ensemble que les élèves n'ont aucune idée des différents ensembles de nombres quand ils arrivent au lycée et en particulier de l'ensemble des nombres réels. Selon eux, les élèves perçoivent seulement deux types de nombres : les entiers et les autres. Pour un élève de Seconde, le nombre est identifié à son affichage sur la calculatrice. Il ne connaît pas le sens du mot rationnel en arrivant en Seconde; il connaît les fractions mais pour lui ce sont essentiellement des opérateurs dont on obtient le résultat à l'aide de l'outil calculatrice. En cela, elles prennent le même statut que les racines carrées, ce sont des boîtes noires et non pas des nombres. Les enseignants interviewés considèrent par contre qu'il y a au lycée dans les classes scientifiques une évolution dans les conceptions des élèves par rapport aux nombres. Ceux-ci acceptent d'écrire un nombre sans nécessairement adopter une écriture décimale (approchée ou exacte) ; la raison la plus souvent avancée est l'habitude instituée par la forme des solutions des équations du second degré dont les enseignants disent exiger l'écriture «exacte». Il y a une forme de familiarité provoquée par la fréquentation plus assidue de ces nombres dans les problèmes liés aux fonctions. De plus, il y a rencontre avec d'autres nombres que l'on écrit de manière littérale: π est rejoint par *e, ln2...* D'autre part, il faut noter que la distinction entre le dense et le continu, bien que centrale dans la construction de l’analyse réelle, n’est en général pas travaillée au lycée et n'est soulevée par aucun des sept enseignants. Elle soulève des questions cognitives délicates (par exemple comment représenter $\mathbb{Q}$ sur la droite réelle[6]).

Dans le paragraphe suivant, nous montrons que la perception des enseignants des conceptions de leurs élèves est pour une large part en adéquation avec les résultats qui se dégagent des questionnaires que nous avons étudiés, même si la familiarité évoquée par les enseignants n’apparaît pas clairement dans les réponses au questionnaire proposé en terminale S et en première année de licence.

5 Nous désignons ici par *rapport personnel* le rapport des enseignants construit au cours de leurs études au sein de l’institution « Enseignement universitaire » ou dans le cadre de formation ultérieures incluant l’autoformation

6 Pour un exemple d’élèves de lycée aux prises avec cette question, voir Pontille et al. 1996.

III. Les conceptions d'élèves de lycée

III.1 Les conceptions d'élèves de Seconde

Nous avons proposé à sept classes de Seconde un questionnaire[7] composé de neuf questions qui avaient pour but de :

-faire émerger les connaissances préalables des élèves par rapport aux nombres.
-comparer ces réponses à la perception qu'en ont leurs enseignants.
-permettre l'expression de la conception de ce qu'est un nombre réel.

Ce questionnaire a été passé dans les classes de Seconde des enseignants auprès desquels nous avons conduit nos entretiens afin de tenter de mettre en perspective les réponses des élèves et celles de leurs enseignants ; ceci a été possible pour six des sept enseignants interrogés et les classes concernées se situaient plutôt dans la moyenne des classes de Seconde de l'Académie de Montpellier. Au final, de janvier à mars 2013, 252 élèves de Seconde ont répondu à ce questionnaire. Nous avons préféré, étant donné la taille de l'échantillon, faire une analyse statistique exclusivement en termes de fréquences des réponses produites. Nous avons observé les fréquences des réponses d'abord pour un enseignant donné, puis sur la totalité de l'échantillon pour observer s'il y avait ou non des différences significatives entres les différentes classes. Nous développons ci-dessous les points qui nous sont apparus comme étant les plus significatifs après l'analyse des réponses.

Pour la majorité des élèves ayant répondu au questionnaire, une fraction est toujours un nombre décimal : près de trois quart des élèves de Seconde interrogés considère que 5/3 est un nombre décimal ; nous pensons que cette conception est due au fait que l'accès au nombre 5/3 est pour eux quasiment exclusivement celui de la calculatrice. Dans une étude conduite dans les années 80, Margolinas avait montré que les élèves avaient une relative maîtrise des nombres décimaux dont l'écriture décimale est finie, soit des éléments des ensembles de type $\mathbb{D}_n$ pour n fixé, mais n'étaient pas capables de caractériser correctement un nombre décimal (Margolinas 1988). Vingt cinq ans plus tard, nous faisons un constat analogue : environ les deux tiers des élèves de Seconde observés manipulent correctement l'ordre des nombres décimaux, savent intercaler un nombre décimal entre deux nombres décimaux d'un ensemble de type $\mathbb{D}_n$, mais ne sont pas capables de déterminer un nombre non décimal dans le même intervalle. Et environ deux tiers des élèves conçoivent qu'il y a une infinité de nombres entre 0 et 1; cette réponse n'est pas contradictoire avec les précédentes. Pour eux, les nombres ont tous une écriture décimale et cette écriture peut comporter autant de chiffres que l'on veut. On peut faire l'hypothèse que l'introduction des intervalles à l'aide de la représentation graphique sur l'axe réel, qui a été faite en début d'année dans chacune des classes concernées, favorise cette conception. Il semble que pour un élève de Seconde : « *tout segment est divisible à l'infini* ». Mais il est remarquable que vingt et un élèves (soit pratiquement 8% des élèves interrogés) pensent qu'il n'y a que neuf nombres entre 0 et 1 ; c'est-à-dire qu'ils ne conçoivent comme nombres que les nombres entiers et les nombres décimaux ayant un chiffre après la virgule. On peut avancer comme hypothèse que la pratique des calculs dans les problèmes, dans la classe de mathématiques mais aussi dans d'autres disciplines, qui le plus souvent font usage de valeurs arrondies au dixième, favorise cette conception.

7 Nous désignons ici par *rapport personnel* le rapport des enseignants construit au cours de leurs études au sein de l'institution « Enseignement universitaire » ou dans le cadre de formation ultérieures incluant l'autoformation

Il convient toutefois de rester prudent car il faudrait interroger ces élèves pour étayer cette hypothèse.

Nous nous intéressons dans ce qui suit plus particulièrement à deux questions qui éclairent notre étude :

- Les écritures proposées sont-elles des nombres ?
- Comment peux-tu définir un nombre réel ?

Nous présentons tout d'abord brièvement une analyse a priori de ces deux questions.

Pour la première des deux « *Les écritures proposées sont-elles des nombres »,* nous faisons d'abord la remarque préliminaire suivante : si nous reposions la question maintenant, nous la modifierions sous la forme : *« Les écritures proposées désignent-elles des nombres ? »* qui serait plus précise, une écriture n'étant pas un nombre. Nous faisons cependant l'hypothèse que ceci n'a pas gêné les élèves, compte tenu du fait, avéré par ailleurs, que pour la plupart des élèves les nombres sont identifiés à leur écriture. Le choix des nombres proposés visait à dégager un panorama en acte des écritures reconnues comme des nombres par les élèves.

La pratique mathématique au collège, renforcée par l'usage des calculatrices, nous a conduit à faire l'hypothèse que les écritures associées à des nombres sont celles qui sont données sous forme entière ou décimale ; on s'attend donc à ce que 2π, $-\sqrt{3}$ et 1/3 ne soient pas identifiés comme des nombres par un ensemble significatif d'élèves, avec cependant des différences :

- 1/3, en raison de la familiarité avec ce nombre, devrait être mieux reconnu ; néanmoins, le statut « opérateur » pourrait prévaloir chez certains élèves.
- $-\sqrt{3}$ pourrait être rejeté en raison de la présence du signe « - » qui pourrait induire les élèves en erreur, avec une confusion avec $\sqrt{-3}$.
- π est connu principalement parce qu'il intervient dans les formules de l'aire du disque et de la circonférence du cercle ; le statut de lettre pourrait prévaloir sur celui de nombre.
- Pour 0, on sait que pour les anciens, ce n'était pas un nombre, mais on ne s'attend pas à ce que ce point de vue soit très représenté en Seconde.
- Pour le nombre donné sous la forme d'une expression numérique, on peut se demander si les élèves vont considérer que cette écriture désigne un nombre, ou non (il faut terminer l'opération pour avoir une écriture qui désigne un nombre).
- Le dernier nombre 0,9999 est une troncature de l'écriture impropre de 1 sous la forme décimale illimitée avec une période de 9 ; il est inhabituel de rencontrer un décimal de ce type, certains élèves pourraient ne pas le reconnaître comme un nombre.

Pour la seconde question « *Comment peux tu définir un nombre réel* », on n'attend pas ici que les élèves donnent une définition qu'ils n'ont jamais rencontrée. On souhaite identifier comment ils peuvent traduire avec leurs propres mots ce qu'est pour eux un nombre réel.

En considérant les pratiques habituelles en classe, on s'attend à trouver des définitions sous la forme : c'est l'abscisse d'un point sur une droite, ou encore un nombre réel peut être placé ou situé sur une droite. On peut également prévoir des réponses comme : c'est n'importe quel nombre, c'est tous les nombres, c'est l'ensemble de tous les nombres.

Enfin, on peut penser qu'il peut y avoir dans une moindre mesure des réponses du type : c'est un nombre qui n'est pas entier, qui n'est pas décimal, qui ne peut pas s'écrire comme fraction d'entiers, c'est une liste de nombres réels connus comme π, $\sqrt{2}$, toutes les racines carrées, ou bien encore des réponses renvoyant à la notion d'intervalle (en lien avec la résolution des inéquations).

Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus à ces deux questions.

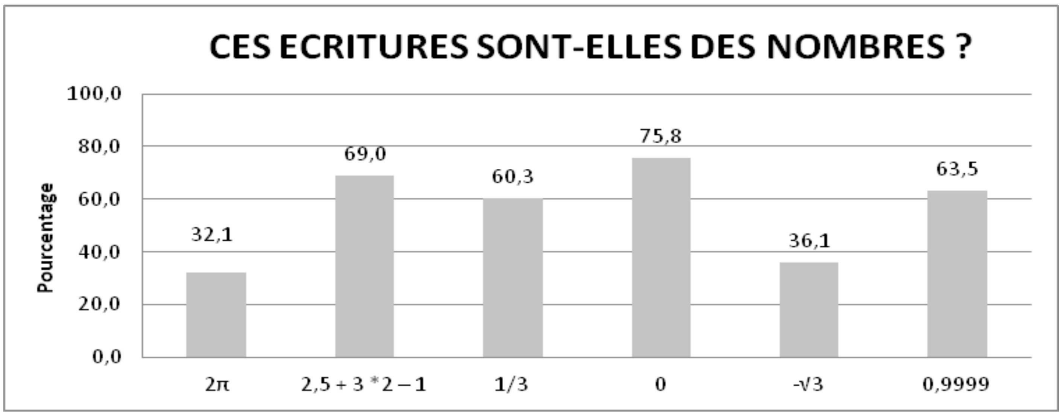


Figure 1a. *Pourcentages de réponses « oui » à la question formulée dans le graphique*

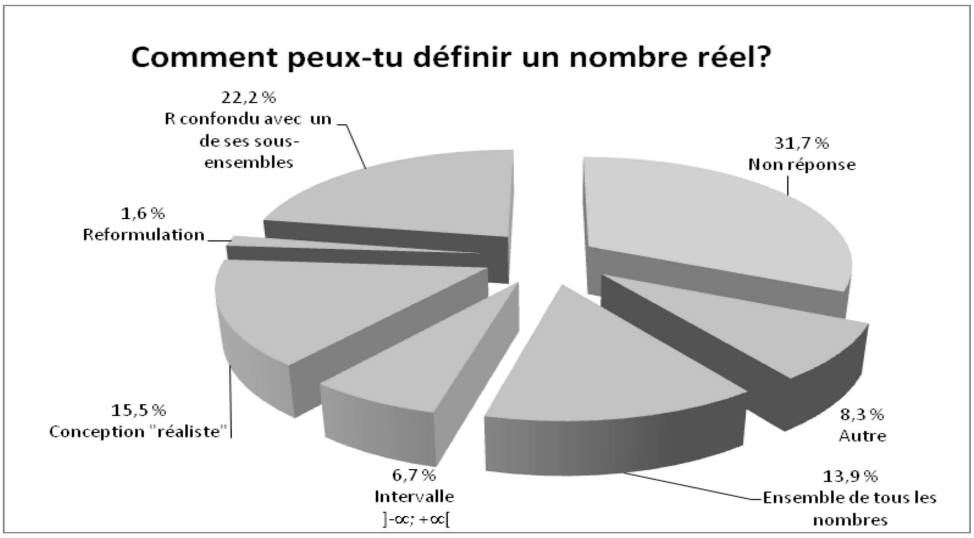


Figure 1b*.Pourcentages des réponses à la seconde question*

Le premier graphique montre que, pour plus des deux tiers des élèves interrogés, les racines carrées ne sont pas des nombres. Mais on observe également que pour soixante dix-neuf élèves interrogés, 1/3 n'est pas un nombre. Si on analyse ce résultat à la lumière des trois premières questions, nous l'interprétons ainsi : 1/3 n'est pas un nombre tant qu'il n'a pas été donné en écriture décimale. Lorsqu'il est donné sous la forme 1/3, il reste, comme la racine carrée, un opérateur. Il y a encore un peu moins de la moitié des élèves interrogés pour lesquels une formule n'est pas un nombre. Il semble donc que pour que soit reconnu l'objet *nombre* en Seconde, il faut qu'apparaisse un nombre entier ou une écriture décimale. Un nombre, pour la majorité des élèves de Seconde qui ont répondu à ce questionnaire, n'est pas distinct de son écriture. Le nombre-mesure dont l'écriture est décimale est le seul qui semble reconnu par presque tous, alors que le nombre-opérateur dont l'écriture est fractionnaire n'est reconnu que par environ deux tiers d'entre eux.

En ce qui concerne le deuxième graphique qui décrit l'expression des conceptions initiales de ce qu'est un nombre réel, le point qui nous semble plus important est l'absence de réponses pour 80 élèves sur 252, alors que tous sont en Seconde depuis au moins trois mois. Peu d'élèves sont capables d'exprimer ce qu'est un nombre réel dans le langage naturel : ceci est attendu puisque aucune définition formelle ne leur a été donnée. Très peu d'élèves sont capables de proposer une définition, au sens de l'attribution d'une référence à un objet connu ; pour la plupart, ils listent les nombres qui sont pour eux des nombres réels soit en les nommant dans le langage naturel soit en donnant une écriture numérique. Il est important de noter qu'aucun d'entre eux n'a proposé de représentation des nombres réels à partir de la droite.

Nous avons en outre relevé beaucoup de réponses que nous avons classées dans la catégorie « ensemble de tous les nombres » mais pour laquelle nous aurions pu proposer une conception du type « intervalle ». La deuxième réponse la plus fréquente est l'*ensemble de tous les nombres* : nous avons déjà vu que cette réponse est probablement induite par le discours des enseignants qui introduisent l'ensemble $\mathbb{R}$ ainsi. Mais on peut observer également que treize élèves répondent : *c'est un nombre non virtuel*, comme si le sens de ce qu'est un nombre réel pour eux est induit non par le contenu du cours de mathématiques mais par l'opposition sémantique dans la langue française entre *réel* et *virtuel*. Nous avons regroupé ce type de réponses sous le vocable «conception réaliste ». Enfin, un grand nombre d'entre eux définissent le nombre réel comme étant soit un nombre entier, soit un nombre décimal, etc. : ils identifient l'ensemble des nombres réels à un des sous-ensembles stricts.

Enfin les réponses des élèves de Seconde sont en adéquation avec ce que leurs enseignants avaient prévu : dans leur grande majorité, ils ne sont pas capables de distinguer entre décimal, rationnel et irrationnel. Les racines carrées, et dans une moindre mesure les fractions, ne sont pas perçues comme des nombres, du moins tant que l'on n'a pas donné une écriture décimale finie ou non. Si on compare cette enquête aux conclusions avancées par Bronner (1997a), il semble que la problématique ne soit plus, à l'entrée au lycée, la distinction entre nombre décimal et nombre « *idécimal* », mais plutôt la distinction entre ce qui est nombre et ce qui ne l'est pas.

Au vu de l'observation de cet échantillon de deux cent cinquante deux élèves de Seconde, nous formulons l'hypothèse que les deux seuls types de nombres qui existent pour un élève de Seconde sont les nombres entiers et les nombres décimaux : est un nombre décimal, dans l'ensemble des six classes observées, tout nombre qui admet une écriture avec « une virgule » et une partie décimale finie ou non.

III.2. De la Seconde à la Terminale scientifique et à la Licence 1ère année

Afin d'observer s'il y a une évolution des conceptions du nombre réel de la Seconde à la Terminale S, nous avons soumis à deux classes de Terminale S un questionnaire[8], qui a également été proposé à 152 étudiants de Licence 1ère année au second semestre de l'année 2013-2014. Les deux classes de Terminale S ont été choisies dans deux lycées différents de Perpignan, qui étaient toutes les deux considérées comme des classes de bon

8 Ce questionnaire a été conçu par Alain Bronner (Bronner, 1997b) et est donné en annexe 2.

niveau : la première avait un effectif de 24 élèves et était composée aux deux tiers d'élèves ayant choisi la spécialité mathématiques et un tiers la spécialité physique-chimie ; la deuxième classe comportait 32 élèves et regroupait des élèves des trois spécialités : mathématiques, physique-chimie et sciences de la vie et de la terre. Bien que la taille de l'échantillon observé soit moindre que pour les élèves de Seconde, il permet néanmoins de dégager un paysage des conceptions sur les nombres à l'entrée à l'université. Nous avons relevé de manière exhaustive les réponses proposées par les élèves et les étudiants et orienté notre analyse autour de deux axes :

- Tout d'abord nous avons cherché à identifier les conceptions de l'objet nombre réel afin de les comparer à celles de Seconde.
- Ensuite nous avons cherché à observer si des différences significatives étaient liées aux différentes spécialités et à identifier quelques obstacles liées aux conceptions sur les nombres décimaux, rationnels et irrationnels.

Nous avons proposé une classification plus fine qu'en Seconde afin de comparer les réponses des élèves de Terminale S et des étudiants de Licence 1. Nous avons identifié dix conceptions et nous résumons celles-ci dans le tableau ci-après :

Catégorie	Pourcentage TS 2012-2013	Pourcentages Licences 1ère année 2013-2014
Conception « Ensemble de tous les nombres $\mathbb{R}$ (sauf les nombres complexes)	13 %	8,5%+16 %
Conception « Vision géométrique–axe réel »	7%	1,5%
Conception « Intervalle] $-\infty$; $+\infty$ [»	11%	14,5%
Conception « Complexes » non « imaginaires »	14,5%	4%
Conception « Réaliste »	7%	4%
Conception « Écriture décimale illimitée »	0%	2,5%
Conception « Partition Q ou I »	4%	5%
Conception « Partition incorrecte »	14,5%	22%
Reformulation	13%	18%
Autres	13%	13%
Non réponses	16%	5%

Figure 2. Fréquences des différentes conceptions en Terminale S et en Licence 1

Dans la classification proposée en Seconde, les conceptions 1 et 3 étaient regroupées. Nous avons pu observer que la conception *« intervalle »* reste solidement ancrée probablement parce qu'elle est la seule à être travaillée explicitement de la Seconde à la Terminale, en particulier dans la résolution d'inéquations. On peut noter des évolutions significatives par rapport à la Seconde. Il y a beaucoup moins de non réponses : cela semble indiquer que les élèves de Terminale S expriment plus aisément leurs conceptions d'un nombre réel, en particulier les élèves ayant choisi la spécialité mathématique. Les conceptions « *Ensemble de tous les nombres »* » et « *réaliste* » prévalent moins qu'en Seconde même si on peut encore observer des réponses telles que : « *Un nombre pur »* ou « *Un nombre qui existe, que l'on peut toucher »*. De nouvelles conceptions émergent : *« Complexes non imaginaires »* et *« Vision géométrique »*. On peut penser que la manipulation des graphiques en analyse favorise la construction de cette conception. En outre il nous paraît important de signaler que les quelques élèves ayant exprimé des conceptions correctes des nombres réels sont tous des élèves ayant choisi la spécialité Mathématiques, qui ont donc travaillé davantage que les autres sur les nombres dans la partie Arithmétique du programme.

D'autre part, il faut noter que pratiquement aucun de ces élèves ne va intégrer l'université ; ils se destinent plutôt aux classes préparatoires ou à la médecine. Parmi les élèves que nous avons interrogés, aucun de ceux qui avaient pour projet de se diriger vers l'université, n'avait de conception correcte[9] des nombres réels.

Si l'on excepte la conception *« Écriture décimale illimitée »*, qui est directement liée aux cours dispensés en Licence de mathématiques et qui n'est jamais présente au lycée, il n'y a pas de différence notable entre les conceptions à propos des nombres réels en fin du lycée et celles en début de semestre 2 de Licence 1, comme le montre le graphique présenté en annexe 3.

Au vu de ces premiers résultats, nous pensons qu'il serait pertinent de proposer ce questionnaire sur une plus grande échelle dans d'autres universités et à d'autres niveaux, en particulier auprès d'étudiants qui se destinent aux concours d'enseignement des mathématiques dans le second degré ainsi qu'au concours de professorat des écoles, dans la suite de l'atelier présenté au colloque inter IREM *La Réforme des Programmes de Lycée : et alors ?(Lyon 24-25 mai 2013)* (Durand-Guerrier, Vergnac, 2013).

Avant de présenter notre analyse des réponses concernant la nature du nombre $\sqrt{13{,}21}$ nous rappelons que ceci est repris de Bronner (1997a). Le nombre proposé est un irrationnel :1321 n'est pas un carré parfait, donc $\sqrt{13{,}21}$ est irrationnel (il n'est pas sûr que les élèves et étudiants connaissent ce résultat).
Or, $\sqrt{13{,}21} = \sqrt{1321} / 10$, donc $\sqrt{13{,}21}$ est un irrationnel. Une preuve complète nécessite d'établir que 1321 n'est pas un carré parfait ; une méthode classique consiste à l'encadrer entre deux carrés parfaits consécutifs : $1296<1321<1369$, ou encore $36^2<1321<37^2$. En fait, 1321 est un nombre premier ; une fois ceci établi, on peut adapter la preuve classique pour $\sqrt{2}$; on ne s'attend pas à ce que les élèves le fassent. On peut s'attendre par contre à ce qu'un nombre significatif d'entre eux répondent en s'appuyant sur les caractéristiques de l'écriture du nombre (dans ce cas, ils ne considéreront pas la nécessité de faire une preuve). Il y a une racine carrée, donc c'est un irrationnel ; il y a une virgule donc c'est un décimal et éventuellement, les deux réponses. On peut s'attendre également à des confusions entre racine carrée et rationnel (erreur sur l'étymologie du terme rationnel observée dans des questionnaires donnés hors protocole de recherche).
Pour les étudiants s'engageant dans une preuve, on peut s'attendre à voir l'égalité $\sqrt{13{,}21} = \sqrt{1321} / 10$, et l'affirmation non justifiée que $\sqrt{13{,}21}$ est irrationnel, ou au contraire est rationnel.

Nous présentons ci-dessous quelques éléments significatifs des réponses proposées.
-Très peu d'élèves ont cherché à justifier leur réponse pour $\sqrt{13{,}21}$ et seuls deux d'entre eux ont fourni une démonstration correcte. Il faut noter que ce sont de très bons élèves et que ce sont ceux-là mêmes qui ont des conceptions correctes et cohérentes des nombres réels. Ces deux élèves vont intégrer une classe préparatoire et non l'université. Parmi les étudiants de Licence 1, seuls la moitié d'entre eux considèrent que ce nombre est un

9 Nous adoptons l'expression « conception correcte » en référence à « conception erronée » précisée par M.Artigue (1999) et citée dans l'introduction en page 2 de cet article.

irrationnel; 30% d'entre eux considèrent qu'il s'agit d'un décimal, huit étudiants considérant en outre que le nombre est à la fois décimal et irrationnel. Les étudiants de Licence ont davantage cherché à prouver leurs réponses mais très peu de démonstrations étaient correctes ; de fait ils utilisent un formalisme et des définitions qui ne sont pas à la disposition des élèves de lycée, mais le contenu de leurs preuves montre que le formalisme qu'ils utilisent ne leur permet pas d'accéder à la compréhension du concept de nombre réel. On note en outre que certains étudiants n'ont pas ressenti la nécessité de prouver leur résultat, et que pour quelques uns d'entre eux, la forme de l'écriture détermine seule la nature du nombre : par exemple *« C'est la racine carrée d'un nombre décimal donc c'est un nombre décimal* », ou encore « *13,21 est un nombre décimal ; sous la racine, il est en plus irrationnel* ».
Cette question a en outre un taux de non réponses légèrement supérieur à 10%, ce qui n'est pas le cas pour les deux autres nombres ($\sqrt{2}$; *e*).

- Pour les élèves de Terminale S, un nombre rationnel est une fraction. La notion de périodicité de l'écriture décimale illimitée n'est indiquée que par trois d'entre eux, ce qui tend à renforcer l'hypothèse formulée déjà à propos des élèves de Seconde que la notion de nombre rationnel n'est vue que sous la forme « quotient de deux entiers ». On retrouve un résultat analogue avec les étudiants de Licence 1, le questionnaire ayant été proposé en principe avant le cours introduisant la définition des réels par les développements décimaux illimités. Le fait que « *tout nombre décimal est un nombre rationnel* » est un théorème qui ne nous semble pas à leur disposition. Même pour ceux qui écrivent la suite d'inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, il n'y a pas d'autre indication permettant de proposer une vision ensembliste (sauf pour un élève qui avait suivi la spécialité mathématiques). La relation d'inclusion apparaît comme n'ayant pas de contenu sémantique. En comparant ce résultat aux analyses des entretiens avec les sept enseignants rencontrés, on peut penser que les notations des différents ensembles de nombres sont effectivement données mais que les activités éventuellement proposées par les enseignants ne permettent pas de leur donner un sens. En particulier, en l'absence de pratique de notions ensemblistes, les élèves ne tirent pas bénéfice des représentations des ensembles de nombres à l'aide des diagrammes de Venn, dans lesquels l'enseignant place quelques nombres qui lui semblent significatifs. L'usage de ces diagrammes, objets ostensifs qui doivent permettre de construire comme allant de soi la construction « emboîtée » des ensembles de nombres, nous semble provoquer un malentendu pédagogique du même ordre que celui qui consiste à proposer la droite repérée comme seule approche de l'ensemble des nombres réels.

IV. Quelles pistes pour le lycée dans la perspective de la transition ?

IV.1. Obstacles susceptibles d'être engendrés par ces conceptions pour le Supérieur

Dans notre introduction historique, nous avons montré que la nécessité de définir les nombres réels est apparue lorsque Bolzano, puis Dedekind ou Cantor ont voulu démontrer rigoureusement les théorèmes d'analyse en rejetant les preuves fondées sur les conceptions géométriques ou celles liées à l'espace et au temps. Au lycée, compte tenu de ce que la priorité n'est pas de construire rigoureusement les définitions et démonstrations des fondements de l'analyse (il s'agit plutôt d'en donner une approche intuitive), le choix de transposition fait pour l'enseignement secondaire est de ne pas proposer une construction de l'ensemble des nombres réels. Dans l'architecture des mathématiques, les programmes de lycée se placent du point de vue des nombres réels antérieurement à Dedekind ; ils suivent en cela le point de vue de Cauchy (1821) : « *Nous prendrons toujours la dénomination de nombres dans le sens où on l'emploie en arithmétique en faisant naître les nombres de la mesure absolue [non munie d'un signe] des grandeurs* ». Cette approche par la droite numérique permet de faire percevoir l'aspect continu de ℝ par rapport à celui discret de ℕ. Elle est basée sur l'affirmation : à tout segment on peut associer un nombre qui est sa mesure et réciproquement. Mais à partir de cette correspondance, comment les élèves peuvent-ils être convaincus que l'ensemble ainsi construit est continu, qu'il n'y a pas de « trous » ? S'ils n'ont aucun élément qui leur permette de réfuter l'affirmation que tout segment peut être mesuré par un nombre rationnel, pourquoi l'ensemble des nombres rationnels ne répondrait-il pas à l'affirmation donnée par l'enseignant ? Il nous semble que l'enseignement secondaire actuel évacue cette difficulté et pose cette correspondance comme un donné en soi de l'intuition. Il ne prend pas en compte les obstacles que peuvent rencontrer les élèves quand ils se trouvent confrontés aux questions épistémologiques soulevées par les concepts de *continu* et de *densité* de l'ensemble des nombres réels, tels que les deux suivantes :

- Comment une droite infinie peut-elle être composée de points de longueur nulle ?
- Comment est-il possible qu'entre deux nombres donnés, il y ait une infinité de nombres ?

Ces obstacles sont bien réels comme l'illustre le propos tenu au cours de l'année scolaire 2012/2013 par un élève de Seconde : en réponse à la question qui était « *combien y a-t-il de points situés à 5 cm d'un point A donné ?*» à laquelle une majorité d'élèves répondait une infinité ; cet élève a répliqué : « *ce n'est pas possible que l'on puisse placer une infinité de points sur le cercle parce que le périmètre de ce cercle est environ 15,7 ».*

Outre les obstacles liés à la conceptualisation de ℝ comme un continu, nous avons vu, dans les conclusions des analyses du questionnaire élève, apparaître des difficultés pour reconnaître les rationnels et/ou les racines carrées comme étant des nombres. Cet obstacle nous semble en partie lié au manque de familiarisation des élèves avec des activités numériques, en particulier avec des méthodes d'approximation qui sont peu présentes dans les contenus des programmes de lycée, hors certaines activités d'approfondissement. En effet le petit nombre d'exigences concernant les travaux sur l'ordre et l'approximation des nombres alors que sont développées des compétences relatives aux fonctions, a pour conséquence de reléguer les fractions et les racines carrées, au mieux dans le domaine des opérateurs, au pire dans celui des symboles mais en tout cas pose problème pour les reconnaître en tant que nombres.

D'autre part, aussi bien dans l'analyse des entretiens avec les enseignants que dans celle des programmes actuels et de quelques manuels du secondaire, nous n'avons pas observé de travaux sur les changements de registre d'écriture des nombres. Ceci nous semble de nature à renforcer la conception, partagée par un grand nombre d'élèves du lycée (et même au-delà comme l'ont montré certaines réponses au questionnaire d'étudiants de licence), que la nature d'un nombre est liée à son écriture.

C'est ce qu'exprime clairement cette élève de première S que nous avons interviewée à l'issue de l'observation d'une séance sur les suites :

I Comment tu caractérises un nombre décimal alors ?
V C'est un nombre à virgule
I Un nombre à virgule. Dès que tu peux l'écrire avec une virgule, c'est un nombre décimal ; c'est ça que ça veut dire.

V Oui.
I Donc, si j'écris 0,33333…, de manière infinie, c'est un nombre décimal ?
V Je ne sais pas ... oui, sûrement.

Cette identification du nombre à son écriture amène chez cette même élève un conflit, comme le montre l’extrait ci-dessous:

I D'accord. Par exemple, si j'écris ….0, 333... Et que je dis, ça se répète à l'infini sous la forme de quelle fraction tu vas pouvoir l'écrire ? Puisque tu m'as dit que c'était un nombre rationnel ...
V Non ; ce n’est pas un nombre rationnel ;
I Et pourtant, tu m’as dit, ça c’est 1/3.
V Oui ; avec 1/3 ça fait un nombre rationnel et avec l’autre, ça l'est pas.
I Ça veut dire que je peux écrire une égalité entre deux formes d'écriture et que d'un côté je peux dire que c'est un rationnel et de l'autre pas ; c'est ce que tu es en train de me dire.
V Ben, non, alors. ...je ne sais pas.

L’analyse des entretiens et questionnaires élèves nous amène à conclure que l’ensemble des nombres réels se construit, pour les élèves de lycée, à partir de l’ensemble des nombres décimaux et même à partir des ensembles de type $\mathbb{D}_n$ par adjonction de quelques nombres particuliers dont la nature n’est pas clairement définie tels π, $\sqrt{2}$, e… Au vu de l’étude que nous avons menée, il apparaît que la seule approche que propose l’institution consiste à mettre en bijection l’ensemble des nombres réels et la droite numérique, et, bien qu’elle nous semble pertinente, elle ne suffit pas à construire les différents aspects du concept de nombre réel.

IV.2. Perspectives pour une approche du concept de nombre réel au lycée

Dans les programmes de Seconde, en particulier dans la partie concernant la résolution des équations, il est préconisé d’ « *encadrer une racine d’une équation grâce à un algorithme de dichotomie* » et *« Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique. »*. Ceci devrait permettre de développer dès la première année du lycée une culture numérique des nombres réels.

Les travaux de Bolzano puis de Dedekind montrent l’importance de l’articulation des notions de continuité et de nombre réel et il nous semble que le lieu où, au lycée, elles s’articulent est le théorème des valeurs intermédiaires qui est au programme de la Terminale S.

Les travaux de Cantor nous incitent à considérer les limites de suites de nombres rationnels vérifiant le critère de Cauchy. S’il n’est pas possible d’étudier théoriquement de telles suites dans le cadre des programmes de lycée, l’accent mis sur l’algorithmique permet d’avoir en Première et Terminale S une approche expérimentale de la limite d’une suite et donc d’approximer une limite réelle par une suite de rationnels.

Le champ des probabilités en Terminale S pourrait permettre de faire évoluer la conception première de l’opposition discret/continu, en particulier dans la version proposée du théorème de Moivre-Laplace qui justifie l’approximation d’une loi discrète (loi binomiale) par une loi continue (normale centrée réduite). Néanmoins, ceci nécessiterait l’élaboration de praxéologies de grande ampleur.

Nous avons commencé à observer des séances en classe se rapportant aux deux premières situations et bien que ces observations soient très ponctuelles, nous avons pu en retirer quelques éléments qu'il serait intéressant de mettre à l'épreuve dans d'autres contextes et sur un échantillon plus large. Nous avons observé en particulier dans une séance sur le théorème des valeurs intermédiaires en Terminale S que, bien que, comme le souligne Longo, la notion de fonction continue soit supportée par l'intuition graphique, cette intuition n'est pas réinvestie pour penser la continuité de l'axe réel. En outre, il apparaît que pour les élèves qui se construisent une représentation des nombres, celle-ci passe directement du discret au continu : la notion de densité est quasiment absente des contenus du lycée et comme on pouvait s'y attendre, elle est également absente des représentations des élèves. Dans la séance observée sur le théorème des valeurs intermédiaires, le fait que celui-ci soit vrai sur l'ensemble des nombres réels et non sur celui des nombres rationnels ou même celui des nombres décimaux, n'a pas pu être perçu par les élèves car la situation[10] proposée ne permettait pas un tel questionnement.

Dans une deuxième séance d'observation[11] qui portait sur la nature de la limite d'une suite de nombres rationnels, nous avons cherché à cerner les représentations qu'avaient les élèves de première S observés à propos des nombres rationnels et nous avons repéré deux éléments qui nous semblent notables. Le premier est la cohabitation d'une conception erronée et d'une définition correcte : même après qu'une définition ait été institutionnalisée, les élèves continuaient à penser qu'un nombre n'est pas rationnel lorsque son écriture décimale est infinie.
Nous avons observé également dans les moments de travail en groupe que les élèves affirmaient que deux nombres sont égaux lorsque leur affichage sur la calculatrice est le même. La distinction entre valeur exacte et valeur approchée, qui est rarement travaillée au lycée d'après les entretiens auprès des enseignants, ne va pas de soi et il nous semble qu'elle nécessiterait d'être réinvestie dans les activités de lycée, en particulier à propos du thème des limites.

Conclusion

Notre étude met en évidence le fait que la seule approche des nombres réels que propose l'institution consiste à mettre en bijection « en acte » l'ensemble des nombres réels et la droite numérique. Bien qu'elle repose sur l'intuition géométrique de la droite qui est en partie à l'origine de la construction de Dedekind, il nous semble, au vu de l'étude que nous avons menée, que cette approche, si elle permet d'aborder la notion d'ordre et les premières notions d'analyse à l'œuvre au lycée, ne suffit pas à construire les différents aspects du concept de nombre réel. Nous avons constaté que la conception que nous avons intitulée « axe réel » n'est proposée par pratiquement aucun étudiant de Licence 1 et seulement par 7% des élèves de terminale S interrogés, ce qui tend à montrer que cette bijection, qui est évidente pour les enseignants qui la présentent, n'est sans doute pas perçue comme telle par les élèves.
D'autre part, les analyses des deux questionnaires montrent que, pour une grande partie de ces élèves, tout nombre rationnel est un nombre décimal. La plupart des élèves observés et/ou interrogés n'ont pas conscience qu'il existe des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction, la notion d'irrationalité apparaît principalement liée à l'écriture avec un radical et n'est pas rattachée à la notion d'incommensurabilité.

10 Voir énoncé en annexe 4.
11 Voir énoncé en annexe 5 .

Les résultats de notre étude, bien que celle-ci soit limitée, montrent que les connaissances des élèves sur les nombres sont essentiellement opératoires et ne leur permettent pas d'accéder à la compréhension de ce qu'est un nombre réel. Ils montrent également que, pour la plupart des élèves, la nature du nombre est liée à son écriture. Il nous semble que pour faire évoluer cette conception, il serait intéressant de mettre en place des activités sur les registres d'écriture d'un nombre.

D'autre part, l'accent dans les programmes est mis sur la résolution de problèmes : cela devrait inciter à introduire des fonctions définies avec des variables qui prennent leurs valeurs dans l'ensemble des entiers, l'ensemble des décimaux ou l'ensemble des rationnels (cf.par exemple Pontille & al., 1996) et ainsi travailler avec les ensembles de nombres afin que ceux-ci ne soient pas seulement des symboles vides de sens. Nous faisons l'hypothèse que les étudiants, dont les conceptions sur les nombres réels ne sont pas en adéquation avec le concept lui-même à l'entrée à l'université, risquent de rencontrer des difficultés dans la compréhension des concepts de l'analyse, ceci étant étroitement relié aux difficultés déjà bien repérées à la transition Lycée-Université (Chellougui 2003, Bloch & Ghedamsi 2005).

Bibliographie

ARTIGUE M.(1990) *Épistémologie et didactique*, Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 2.3,pp.241-286.

BELNA J-P. (1996) *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor et Frege*, Vrin.

BIREBENT A. (2007) La rupture algébrique/analytique dans le numérique : questions écologiques et instrumentales. *Perspectives en Didactique des Mathématiques, Actes de la 13ème Ecole d'Eté,* Cédérom, IUFM d'Aquitaine.

BOLZANO B. (1817) *Premiers écrits, Philosophie, Logique, Mathématique*, Vrin, édition 2010, 209-222.

BLOCH I., GHEDAMSI I. (2005) Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie, *Petit x* **69**, 7-30.

BONIFACE J. (2002) *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*, Ellipses.

BRONNER A. (1997a) Les rapports d'enseignants de troisième et de Seconde aux objets «nombre réel» et «racine carrée», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **17**-3, 55-80.

BRONNER A.(1997b) *Étude didactique des nombres réels*, Thèse, Université de Montpellier.

CHELLOUGUI F. (2003) Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien. *Petit x,* **61**, 11-34.

CHEVALLARD, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,**12**/1, 77-111.

CAUCHY A.L. (1821) *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique, première partie, Analyse infinitésimale*, Debure, Paris, Ré-édition 1989, Jacques Gabay, Paris.

DEDEKIND R. (1872) Les nombres, Que sont-ils et à quoi servent-ils ?*, traduction de Judith Milner et Hourya Sinaceur, La Bibliothèque d' Ornicar, 12-13.*

DURAND-GUERRIER V. (2012) Sur la question du nombre et du continu dans les apprentissages mathématiques, dans M. Ouelbani (ed.) *Des mathématiques à la philosophie. Regards croisés : didactique, Histoire, Philosophie*, Université de Tunis.

DURAND-GUERRIER V., VERGNAC M. (2013) *Les réels à la transition secondaire-supérieur. Du discret au continu-Quelle élaboration ? , in La Réforme des Programmes de Lycée : et alors ?Actes de colloque IREM, 135-144*

LONGO G.(1999) The Mathematical Continuum, From intuition to Logic, in *Naturalizing phenomenology* 401-428.

MARGOLINAS C. (1988) Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels, *Petit x,* **16,** 51-66.

PONTILLE M.C. & al . (1996) Et pourtant, ils trouvent, *Repères IREM* **24**, 10-34.

B.O. hors série n°2 du 30 août 2001.

B.O. n°30 du 23 juillet 2009.

Annexe 1. Questionnaire Seconde

Ce questionnaire n'est pas une évaluation.
Tu disposes de 15 minutes pour le compléter et tu ne peux pas utiliser ta calculatrice.

1) $\frac{5}{3}$ est-il un nombre décimal ?

a. Oui □ b. Non □ c. Je ne sais pas. □

2) Peux tu donner un nombre décimal qui appartienne à l'intervalle]0,666 ; 0,667[?

a. Oui □ et c'est .... b. Non □

3) Peux tu donner un nombre qui ne soit pas décimal et qui appartienne à l'intervalle]0,666 ; 0,667[?

a. Oui □ et c'est.................. b. Non □

4) Y a-t-il un plus grand nombre dans l'intervalle [0 ; 1[

a. Oui □ et c'est........ b. Non □ c. Je ne sais pas □

5) Combien peux tu écrire de nombres entre 0 et 1 ?

…..

6) $\sqrt{7}$ est-il un nombre ?

a. Oui □. Si oui , peux-tu l'écrire autrement ?...

b. Non □. Si non , pourquoi ?..

7) Connais-tu plusieurs ensembles de nombres ? Si oui, lesquels ?

…...

8) Dans la liste qui suit , coche les écritures qui sont des nombres :

$2\times\pi$ □; $2{,}5+3\times2-1$ □ ; $\frac{1}{3}$ □ ; 0 □ ; $-\sqrt{3}$ □ ; 0,99999.... □

9) Comment peux tu définir un nombre réel ?

Annexe 2. Questionnaire Terminale S et Licence 1

TEST.

Ce questionnaire n'est pas une évaluation
Merci de bien vouloir répondre sur cette feuille aux questions suivantes (utiliser le verso si besoin pour répondre, y compris comme brouillon)
<u>Si vous utilisez une calculatrice merci de cocher cette case</u>

Question 1 :

1. $\sqrt{2}$ est :

   un nombre décimal
   un nombre rationnel
   un nombre irrationnel
   autre (préciser) :

2. e est :

   un nombre décimal
   un nombre rationnel
   un nombre irrationnel
   autre (préciser) :

3. $\sqrt{13{,}21}$ est :

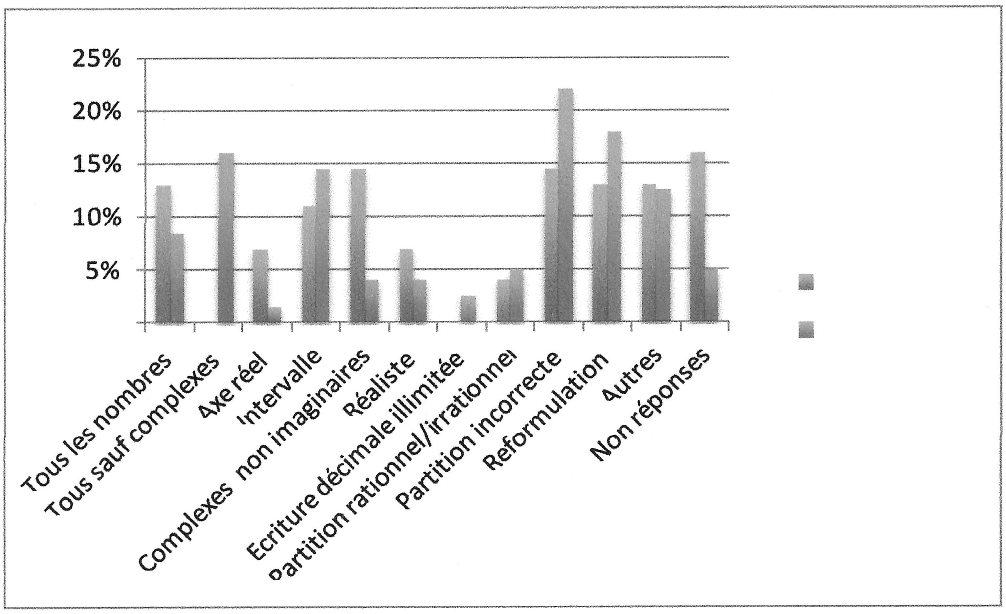
   un nombre décimal
   un nombre rationnel
   un nombre irrationnel
   autre (préciser) :

   <u>Justifier</u> votre réponse pour $\sqrt{13{,}21}$:

Question 4 : Qu'est-ce qu'un nombre :

1. décimal :
2. rationnel :
3. irrationnel :
4. réel :

Annexe 3. Comparaison des réponses au questionnaire (Terminale S et Licence 1)



Annexe 4. Séances observées en Terminale S

Séquence1

a et b sont deux nombres ; soit une fonction f telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Peut-on toujours trouver un nombre c entre a et b tel que $f(c) = 0$

Séquence 2

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x^3-7$. 1. Montrer en appliquant le théorème énoncé que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique c dans] 1;2 [. Quelle est la nature de la solution c obtenue ? *Cette question doit être résolue sur une feuille et sera relevée.* 2. Proposer une méthode qui permette de déterminer un encadrement de c avec une amplitude « aussi petite que l'on veut » ?

Annexe 5. Séance observée en Première S : Limite d'une suite

Soit une suite (u_n) définie par la relation de récurrence :
$u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{17}{u_n})$ et par $u_0=1$.

a. Calculer u_1, u_2, u_3 .

b. Comparer à chaque étape u_{n+1}, u_n et $\frac{17}{u_n}$.

c. Ces nombres sont-ils rationnels ? Argumenter votre réponse.

En utilisant le mode « *suite* » de votre calculatrice, déterminer les 20 premiers termes de la suite.
Que pensez vous des termes de cette suite lorsque *n* devient grand ?

....
....

Selon vous, cette limite *l* est-elle un nombre rationnel ?
Pourriez-vous proposer un encadrement de cette limite à chaque étape du calcul.

Annexe 6

Extrait B.O. n°2, 30 août 2001

Contenus	Capacités attendues
Nature et écriture des nombres. Notations ℕ, ℤ, 𝔻, ℚ, ℝ. Représentation des nombres dans une calculatrice. Nombres premiers.	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. Interpréter un résultat donné par une calculatrice. Organiser un calcul à la main ou à la machine. Décomposer un entier en produit de nombres premiers.
Ordre des nombres. Valeur absolue d'un nombre.	Choisir un critère adapté pour comparer des nombres. Comparer a, a^2 et a^3 lorsque a est positif. Caractériser les éléments d'un intervalle et le représenter.

Extrait B.O. n°30, 23 juillet 2009

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : ∈, ⊂, ∪, ∩ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.