

Marie-France GUISSARD
Valérie HENRY
Pauline LAMBRECHT
Patricia VAN GEET
Sylvie VANSIMPSEN
CREM asbl¹

Introduction

Le contexte de la recherche

Le CREM s'est dernièrement engagé dans une recherche visant à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par des séquences d'apprentissage intégrant des manipulations effectuées par les élèves (CREM, 2014). Nous appelons *Math & Manips* ces activités conçues pour mettre l'élève en situation de conflit cognitif. Les élèves sont confrontés par le milieu à des phénomènes interpellants, qui sont organisés en une suite d'épisodes pour lesquels le recours à l'expérimentation avec divers matériels pédagogiques est propice à une meilleure compréhension. L'activité expérimentale a pour but d'ancrer un nouveau concept dans la réalité.

Une *Math & Manip* doit pousser les élèves à se poser des questions et, pour les plus âgés, les amener à entrer dans des démarches de modélisation. Elle doit donner du sens aux concepts qu'elle introduit et aux outils qu'elle mobilise et, par là même, rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés par l'aspect théorique et abstrait des mathématiques.

Dans l'esprit de précédents travaux du CREM, la recherche envisage la scolarité dans son ensemble, depuis le début du primaire jusqu'à la fin du secondaire. Les activités proposées ont été largement testées dans des classes du primaire et du secondaire (école, collège et lycée). Les réactions des élèves et les avis des enseignants qui nous ont accueillis dans leurs classes ont alimenté les discussions en équipe, les réflexions qui ont suivi ont donné lieu aux remaniements successifs des activités. Notons que des *Math & Manips* ont été présentées en formation continue, mais aussi lors de différents colloques en Belgique et en France. On en trouve des descriptions abrégées dans les actes de ces colloques (par exemple Guissard & al., 2013 ; Henry & al., 2012) et dans la revue *Losanges* (Guissard & al., 2010, 2011 et 2012).

La publication (CREM, 2014) à destination des enseignants qui décrit l'ensemble des activités est

¹ Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 5 Rue Émile Vandervelde, 1400 NIVELLES, Belgique, info@crem.be

disponible sur le site du CREM² La méthodologie permettant à chaque enseignant de s'approprier les séquences y est détaillée ; s'y trouve également la description du matériel, facile à se procurer et à utiliser.

Cet article ne présente qu'une activité, destinée aux élèves du cycle 3, à la charnière école-collège. Elle est assez fermée au départ, de façon que chacun puisse s'en emparer sans crainte d'une gestion trop ouverte. Les expériences réalisées dans les classes nous ont en effet incités à éliminer toute situation qui déboucherait sur des questions impossibles à gérer avec des élèves qui ne maîtrisent pas encore la notion de volume. Libre à chaque enseignant d'adapter la séquence selon l'âge et le niveau de ses élèves.

La notion de volume à l'école primaire

C'est au cours de la mise au point d'une séquence d'apprentissage visant la construction de la formule du volume du parallélépipède rectangle que s'est posée la question du concept même de volume. Comment l'expliquer aux élèves, quelles conceptions s'en forgent-ils dans leur vie quotidienne et dans leur parcours scolaire ?

La séquence d'apprentissage proposée ici est une tentative de réponse à ces questions ; elle nous semble de nature à donner aux élèves des images mentales variées du concept, à diversifier les approches et surtout à ne pas réduire le volume d'un objet à une formule.

Pour trouver le volume d'un objet creux³, on peut le remplir par exemple de riz, de sable ou d'eau. Si cet objet est de forme parallélépipédique, le remplir de cubes permet une approche du calcul du volume qui, par la suite, amènera une formule.

Lorsque l'objet est plein, rechercher son volume par remplissage est impossible. Dans ce cas, on considère le volume comme la place qu'occupe l'objet dans l'espace. Il est cependant plus facile de déterminer la place que prend un objet lorsqu'il est immergé dans un liquide car, contrairement à l'air, le déplacement du liquide est visible et mesurable.

Nous proposons ci-dessous une suite d'expériences qui amènent à comparer les volumes d'objets creux, que l'on peut remplir, et d'objets pleins que l'on peut immerger. Notre choix s'est porté sur des objets creux dont les parois sont suffisamment fines pour être négligeables car nous ne souhaitons pas travailler explicitement la distinction entre volume intérieur et volume extérieur d'un objet.

Ces activités sont menées avec la classe entière, en interaction avec l'enseignant ; en général c'est un élève qui expérimente face à ses condisciples. Lors des manipulations, il est important d'aborder les problèmes d'approximation liés au processus expérimental.

L'objectif de cette suite d'expériences est de construire peu à peu la notion de volume à partir de ces différentes approches, pour tisser des liens entre elles et finalement arriver à en faire la synthèse.

² <http://www.crem.be>

³ Le volume d'un objet creux est parfois nommé contenance ou capacité. Pour la suite de notre activité, il est important d'introduire également le mot « volume ».

Comparaison d'objets creux



Figure 1

On présente à la classe deux boîtes de formes très différentes, une boîte de conserve de forme cylindrique et une boîte parallélépipédique (figure 1). La deuxième boîte a été construite de même volume que la première, à l'insu des élèves. Ceux-ci doivent indiquer quelle est la boîte qui peut contenir le plus de riz quand elle est remplie à ras bord.

Certains élèves se basent sur des propriétés de l'objet telles la hauteur ou la largeur.

L'estimation a justement pour objectif de faire émerger ces premières conceptions.

Les élèves s'engagent ensuite dans une démarche de comparaison, avec le riz mis à leur disposition. La solution la plus évidente consiste à remplir à ras bord un premier récipient de riz et à transvaser ensuite son contenu dans le second. On constate que le second est également rempli à ras bord. Il arrive cependant que des élèves remplissent les deux boîtes puis réalisent que ces remplissages ne permettent pas de comparaison sans autre matériel.

On conclut que les deux boîtes contiennent la même quantité de riz. On définit ainsi la caractéristique *avoir même volume*. Cette expérience permet d'associer le volume d'un objet creux à la quantité de matière qu'il peut contenir et de montrer aux élèves que *des objets de formes différentes peuvent avoir le même volume*.

Comparaison d'objets pleins

Cette séquence vise à multiplier les expériences pour analyser les liens entre la taille, la forme et la masse d'un objet avec son volume.

Objets identiques

On présente aux élèves deux boules identiques⁴ en pâte à modeler (figure 2). Comme ces objets ne peuvent être remplis, on comparera leur volume en les immergeant, l'un après l'autre, dans une quantité d'eau suffisante pour minimiser les erreurs expérimentales. On demande aux élèves laquelle de ces deux boules déplacera le plus d'eau.



Figure 2

Les boules étant identiques, les élèves pensent, à juste titre, qu'elles déplacent la même quantité d'eau. L'objectif ici est surtout de mettre en place la procédure expérimentale qui exige de faire exactement la même expérience avec chacune des deux boules, ce qui implique de retirer la première avant de plonger la seconde.

Sur la paroi d'un récipient contenant de l'eau, un élève, chargé de mener l'expérience devant la classe, colle un morceau d'adhésif transparent sur lequel seront notés par un trait les différents niveaux d'eau.

Il note d'un trait le niveau initial de l'eau, immerge ensuite la première boule et note d'un second trait le niveau atteint par l'eau. La différence entre les deux traits permet de se représenter la

⁴ Pour la suite de l'activité, il est impératif que ces deux boules soient de même volume que la boule de pétanque choisie pour l'expérience « Objets de masses différentes ».

quantité d'eau déplacée. En effet si pour les deux boules le niveau atteint par l'eau est le même, le volume d'eau déplacé par chaque boule est le même. La comparaison des niveaux permet de comparer les volumes des deux boules, mais pas de les mesurer.



Figure 3

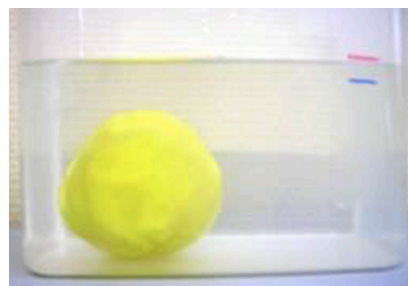


Figure 4

On constate, à l'issue de l'expérience, que les déplacements d'eau provoqués par les deux boules et les différences de niveau qu'ils engendrent sont identiques (figures 3 et 4). L'expérience confirme donc que deux boules identiques déplacent la même quantité d'eau. L'enseignant dégage une première approche de la notion de volume d'un objet plein : *deux objets qui, plongés dans l'eau, déplacent la même quantité d'eau ont le même volume.*

Certains élèves sont tentés de plonger la deuxième boule sans retirer la première. Dans ce cas, les deux boules déplacent bien la même quantité d'eau, mais les différences de niveau provoquées par ces déplacements dépendent de la forme du récipient. Ce processus ne permet la comparaison que lorsque le récipient est à section constante. Cette discussion nous est apparue prématurée dans une phase de construction de la notion de volume avec des élèves encore très jeunes. C'est pourquoi nous avons imposé la procédure où les boules sont immergées successivement. Cette réduction de la part de liberté dans l'activité dévolue aux élèves nous a semblé inévitable, à ce stade de la construction du concept chez l'enfant, pour atteindre les objectifs que nous nous étions fixés.

Objets de tailles différentes



Figure 5

On propose cette fois deux boules de pâte à modeler de tailles visiblement différentes (figure 5). Avant toute manipulation, on demande aux élèves quelle boule déplacera le plus d'eau.

Généralement, les élèves voient qu'une boule prend plus de place que l'autre et prévoient spontanément que les déplacements d'eau ne seront pas égaux, que la boule la plus grosse déplacera le plus d'eau.

Ils confirment leurs observations en réalisant l'expérience, sur le même modèle que la précédente.

Cette expérimentation montre que le déplacement d'eau varie bien quand le volume varie. Elle complète la première approche de la notion de volume. Elle amène l'enseignant à préciser que *la quantité d'eau déplacée correspond au volume de l'objet* et que *plus le volume de l'objet est important, plus la quantité d'eau déplacée est importante.*

Objets de formes différentes



Figure 6

On reprend les deux boules identiques en pâte à modeler de la figure 2, dont on a déjà constaté qu'elles avaient le même volume. On en garde une et, devant les élèves, l'enseignant transforme l'autre en un objet de forme très différente, par exemple un « donut » ou un « colombin » (figure 6). Les élèves relèvent les caractéristiques de l'objet déformé : il est plus long (ou plus haut) mais plus fin, il contient la même quantité de pâte à modeler, ...

Ils formulent ensuite, oralement ou par écrit, leur prévision quant aux déplacements d'eau provoqués par l'immersion des deux objets.

Lors des expérimentations dans les classes, on constate que les élèves qui pensent au préalable que les déplacements d'eau seront différents le justifient en expliquant par exemple qu'un objet long et fin ou haut et mince prend davantage de place qu'une boule. Ceux qui pensent que le niveau de l'eau va rester le même expliquent qu'on n'a ni ajouté ni enlevé de pâte à modeler.

Ensuite, l'expérience est réalisée et on rappelle que, lorsque les déplacements d'eau provoqués par deux objets immergés tour à tour sont identiques, on dit que ces deux objets ont le même volume. Cette expérience montre que *deux objets de formes différentes peuvent avoir le même volume*. Cela se justifie et pouvait se prévoir par le fait que les deux objets de formes différentes étaient cependant formés avec la même quantité de même matière.

Objets de masses différentes



Figure 7

Pour l'expérience suivante, on présente deux boules de même diamètre, mais de masses très différentes⁵. Dans notre exemple, nous avons choisi une boule de pétanque en acier et une boule en pâte à modeler (figure 7). On demande aux élèves laquelle de ces deux boules déplace le plus d'eau.

Comme la boule en acier est bien plus lourde que la boule en pâte à modeler, certains élèves pensent que l'immersion de la boule la plus lourde déplacera plus d'eau.

Face à l'expérience, les élèves voient que les quantités d'eau déplacées par les deux boules sont identiques.

Prenant appui sur les conclusions précédentes, ils déduisent que ces deux boules ont même volume.

Les élèves découvrent, via cette expérience, que *deux objets de masses différentes peuvent avoir le même volume*.

⁵ La différence de masse est telle qu'il est inutile de peser les boules.

Objets de formes et de masses différentes



Figure 8

Pour terminer, on prend, d'une part, le colombin provenant de la déformation d'une boule en pâte à modeler et d'autre part la boule de pétanque (figure 8) et on demande aux élèves ce qu'ils peuvent dire des volumes de ces deux objets.

Remarquons que c'est la première fois que le mot volume est utilisé dans la question. L'enseignant introduit le vocabulaire adéquat quand il pense que les élèves le maîtrisent.

Dans ce cas, il est d'abord fait appel à la seule réflexion des élèves. Ils ne réaliseront l'expérience que dans une seconde phase, pour valider les propositions ou s'ils en éprouvent le besoin.

Le colombin a le même volume que la boule en pâte à modeler, la boule d'acier a également le même volume que la boule en pâte à modeler, donc le volume du colombin est identique au volume de la boule d'acier.

On amène les élèves à en déduire que *deux objets de masses et de formes différentes peuvent avoir le même volume*.

Les élèves rencontrent ici une propriété fondamentale⁶ de l'égalité sans en avoir conscience.

Remplissage et immersion

Pour établir un lien entre les deux méthodes de comparaison, on peut s'intéresser à un objet creux qui peut être soit rempli, soit immergé. Au début du collège, on peut, à ce moment de l'activité, laisser les élèves proposer eux-mêmes des expériences qui mettraient ces liens en évidence.

Pour réaliser la suite de l'activité, nous avons choisi un cube en plexiglas avec un couvercle qui permet de l'ouvrir ou de le fermer hermétiquement.

Les deux expériences suivantes ont pour but de vérifier si la quantité d'eau que peut contenir ce solide est équivalente à la quantité d'eau déplacée lors de son immersion. Elles mènent à la même conclusion. L'une peut suffire mais il est utile d'explorer les deux manières de faire pour permettre à un maximum d'élèves de créer des liens entre les différentes images mentales construites précédemment.

Première expérience

Le niveau initial de l'eau est noté d'un trait sur la paroi du récipient contenant l'eau. Le cube est tout d'abord lesté avec des pièces de monnaie. L'enseignant pose la question de l'impact de la modification de la masse sur le volume. On s'attend à ce que les élèves évoquent l'expérience avec la boule de pétanque pour se convaincre que l'ajout des pièces de monnaie est sans influence sur la quantité d'eau déplacée. Si ce n'est pas le cas, on peut refaire l'expérience.

Le cube est ensuite fermé, puis immergé, et le niveau atteint par l'eau est noté (figure 9). Une variante consiste à remplir le cube d'eau pour le lester.

Dans un second temps, on retire le cube lesté, on enlève les pièces de monnaie puis on le remplit à ras bord avec de l'eau ne provenant pas du récipient. Enfin, le cube rempli d'eau est vidé dans le récipient (figure 10).

⁶ La propriété travaillée en acte est la transitivité de l'égalité.

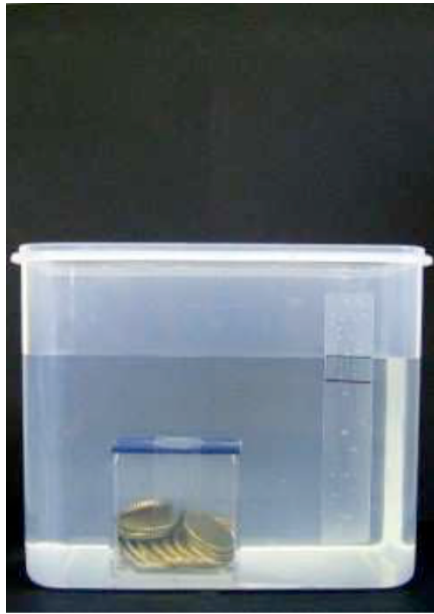


Figure 9



Figure 10

On constate que le niveau atteint par l'eau correspond à celui noté précédemment. On demande aux élèves de formuler la conclusion. Celle qui est attendue est du type : *la quantité d'eau que contient un objet correspond à la quantité d'eau qu'il déplace lors de son immersion.*

Seconde expérience

L'enseignant immerge le même cube en plexiglas lesté préalablement dans un récipient rempli d'eau à ras bord et placé dans un bac plus grand. L'eau qui déborde lors de l'immersion du cube est récupérée et transvasée dans le cube. On remarque que cette quantité d'eau permet de remplir exactement le cube. La conclusion est identique, *la quantité d'eau que contient un objet correspond à la quantité d'eau qu'il déplace lors de son immersion.*

Ces manipulations fournissent des pistes pour imaginer des expériences permettant de comparer par exemple le volume d'une boîte en carton et celui d'une boule de pâte à modeler, mais on sent bien que cela se complexifie de plus en plus. Le processus expérimental montre ici ses limites, il va falloir trouver un moyen de « mesurer » le volume pour établir des comparaisons plus aisément.

Calcul du volume d'un objet

Les activités de cette section interviennent après une séquence d'apprentissage qui construit pas à pas la formule du volume du parallélépipède rectangle par remplissage de diverses boîtes avec des cubes de différentes tailles. Pour cette séquence, qui n'est pas reprise ici, nous renvoyons à CREM (2014).

Le but est de revenir sur les expériences de mise en place de la notion de volume en étayant les comparaisons de volumes sans mesures, par des comparaisons de mesures en millilitres, ou des calculs de mesures de volume en cm^3 . Ces mesures valident d'une certaine manière les méthodes mises en place :

- pour les objets pleins : immersion et comparaison des quantités d'eau déplacées ;
- pour les objets creux : comparaison des quantités contenues.

Ce retour aux expériences initiales permet de garder à l'esprit que le volume est une grandeur physique qu'il ne faudrait pas réduire à quelques formules.

Objets pleins

Lorsqu'un objet est immergé dans un récipient, son volume correspond au volume de l'eau déplacée. Si le récipient est de forme parallélépipédique, le volume de l'eau déplacée est celui d'un parallélépipède rectangle qui peut être visualisé en entourant la boîte d'élastiques aux différents niveaux atteints par l'eau.

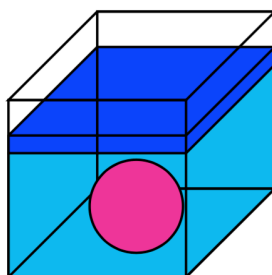


Figure 11

La longueur et la largeur de ce parallélépipède correspondent respectivement à la longueur et la largeur du récipient dans lequel l'objet est immergé. La hauteur correspond à la différence des niveaux de l'eau avant et après immersion (figure 11). La formule du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle nous donne un moyen de calculer le volume de l'objet immergé, quelle que soit sa forme.

Le cube en plexiglas

Éprouvons tout d'abord la méthode pour un objet dont le volume peut être obtenu soit par calcul direct, soit par immersion, par exemple le cube en plexiglas lesté de l'expérience « Remplissage et immersion » (figures 9 et 10). Nous le plongeons dans une boîte parallélépipédique transparente de 10 cm d'arête. Nous choisissons un parallélépipède car le calcul du volume du parallélépipède à partir de ces trois dimensions est connu. Le parallélépipède virtuel formé par l'eau déplacée a une longueur et une largeur de 10 cm, une hauteur qu'on ne peut déterminer avec précision mais qu'on situe au mieux entre 1,5 et 1,6 cm. Le volume d'eau déplacée est compris entre $10 \times 10 \times 1,5$ soit 150 cm^3 et $10 \times 10 \times 1,6$ soit 160 cm^3 . Ce procédé donne une valeur approximative du volume de l'objet. Et, dans notre exemple, une imprécision de lecture de 1 mm sur la hauteur donne une différence de volume de $10 \times 10 \times 0,1$, soit 10 cm^3 .

Comparons, pour ce même objet, le volume ainsi obtenu avec le volume calculé à l'aide de la formule. L'arête de ce cube mesure 5,4 cm, son volume est égal à $5,4 \times 5,4 \times 5,4$ soit environ 157 cm^3 . La mesure obtenue par la formule est bien comprise dans l'encadrement donné par l'expérience et valide d'une certaine façon la méthode par immersion. Notons que la mesure de l'arête du cube n'est pas non plus exempte d'erreur de mesure.

La boule de pâte à modeler

Le calcul du volume par immersion est particulièrement utile pour calculer le volume d'un objet de forme quelconque dont on ne connaît pas encore la formule du volume ou pour lequel il n'en existe pas, un morceau de pâte à modeler par exemple. Les élèves immergent l'objet et calculent le volume du parallélépipède virtuel formé par l'eau déplacée, tout en ayant conscience du niveau de précision du résultat obtenu. Dans notre exemple, la hauteur du parallélépipède virtuel est comprise entre 1,7 et 1,8 cm, le volume de l'objet se situe donc entre 170 et 180 cm^3 .

Notons que, pour chercher la mesure du volume d'un objet de cette manière, il est nécessaire que l'objet soit de volume assez grand afin que le déplacement d'eau soit visible et mesurable. C'est l'occasion de discuter des conditions expérimentales : si on immerge dans un bac de petite section,

la hauteur d'eau déplacée sera plus visible.

Pour se donner un moyen de vérification, malgré l'absence de formule pour calculer le volume de la pâte à modeler, nous proposons une autre démarche qui exploite la conversion des unités de capacité en unités de volume.

On se munit d'un récipient contenant de l'eau à ras bord qu'on place dans un bassin. On immerge le morceau de pâte à modeler utilisé à l'étape précédente, on verse ensuite l'eau récoltée dans le bassin dans un récipient gradué en millilitres. La quantité d'eau recueillie se situe entre 170 mL et 180 mL . Or nous avons calculé que le volume du morceau de pâte à modeler est compris entre 170 et 180 cm^3 .

Dans le cas où les élèves connaissent déjà la conversion des unités de capacité en unités de volume⁷, l'égalité des nombres de l'encadrement corrobore le résultat précédent et les conforte dans l'idée que 1 mL correspond à 1 cm^3 . Si les élèves n'ont pas encore abordé la conversion des unités, l'enseignant se sert de l'égalité des nombres des deux encadrements pour amener l'idée que 1 mL égale 1 cm^3 . C'est le moment propice, selon nous, pour mettre en place une activité reliant les mesures de volume et les mesures de capacité.

Objets creux

La manipulation réalisée pour la comparaison d'objets creux nous a montré que les boîtes proposées, parallélépipédique et cylindrique (figure 1), ont le même volume. Nous avons à présent d'autres outils pour le confirmer.

Pour calculer le volume de la boîte cylindrique, on la remplit d'eau à ras bord. Cette quantité d'eau est ensuite versée dans un récipient gradué. Dans notre exemple, le niveau d'eau se situant entre 800 mL et 900 mL , la valeur approchée du volume est comprise entre 800 cm^3 et 900 cm^3 .

Pour calculer le volume de la boîte parallélépipédique, il suffit d'appliquer la formule, ce qui donne pour notre exemple $17 \times 10 \times 5$, soit 850 cm^3 . Cette fois encore, le résultat de l'expérience est confirmé par le calcul.

Conclusion

La mise au point d'une séquence d'apprentissage sur le volume du parallélépipède rectangle et les expériences menées en classe dans ce cadre nous ont fait comprendre à quel point la notion de volume était délicate à circonscrire avec les élèves et, dans un même temps, combien il était nécessaire de poser des bases solides pour la compréhension de ce concept. L'impossibilité d'une définition rigoureuse et complète, à ce stade de l'enseignement, nous a amenés à mettre en place, dans cette séquence, une série d'expériences qui confrontent les préconceptions des élèves à la réalité de la situation et conduisent à la création d'images mentales diverses dont la cohérence est progressivement installée. En particulier, la distinction entre les notions de volume d'un objet plein ou creux nous a semblé fondamentale.

Le retour vers les expériences initiales, qui ne permettent que des comparaisons sans mesures, pour en réexploiter les démarches au moment où on dispose de moyens de calcul, nous a semblé essentiel pour tisser des liens entre la démarche expérimentale et le calcul théorique. Ce va-et-vient montre notamment l'intérêt de la démarche expérimentale pour déterminer la mesure d'un volume pour lequel on n'a pas de formule, mais attire aussi l'attention sur les limites de cette démarche, et sur les erreurs expérimentales qu'elle entraîne.

⁷ Notons que cette équivalence entre L et cm^3 peut être illustrée par l'expérience suivante : verser le contenu d'une bouteille d'un litre dans une boîte parallélépipédique ; calculer le volume de ce parallélépipède d'eau à partir de la mesure en cm de ses trois dimensions.

Références bibliographiques

- CREM (2014), *Math & Manips - Des manipulations pour favoriser la construction des apprentissages en mathématiques*, <http://crem.be/#/publications/30> .
- DIAS T. & DURAND-GUERRIER V. (2005), Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM*, 60, 61-78.
- GUISSARD M.-F., HENRY V., AGIE S. & LAMBRECHT P. (2010), *Math & Manips, Losanges*, 7, 39-46.
- GUISSARD M.-F., HENRY V., LAMBRECHT P., VAN GEET P. & VANSIMPSEN S. (2011), *Math & Manips à l'école primaire : favoriser l'apprentissage des grandeurs par des manipulations. Losanges*, 15, 16-21.
- GUISSARD M.-F., HENRY V., LAMBRECHT P., VAN GEET P. & VANSIMPSEN S. (2012), Aires et agrandissements avec Apprenti Géomètre, *Losanges*, 18, 15-23.
- GUISSARD M.-F., HENRY V., LAMBRECHT P., VAN GEET P. & VANSIMPSEN S. (2013), « *Math & Manips* » ou comment intégrer des manipulations dans les classes pour favoriser l'apprentissage des grandeurs et de la proportionnalité. Actes du colloque de la CORFEM, Besançon 2011.
- HENRY V., LAMBRECHT P. & VAN GEET P. (2012), *Math & Manips : introduction de manipulations dans les classes pour favoriser la construction des apprentissages*, actes du colloque de la COPIRELEM Dijon 2011, (en version électronique sur le CD d'accompagnement atelier B2).