UNE ÉTUDE DIACHRONIQUE DE PROBLÈMES DE REPRODUCTION DE FIGURES GÉOMÉTRIQUES AU CYCLE 3

Caroline BULF

ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux, E3D, LACES-EA4140

Valentina CELI

ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux, E3D, LACES-EA4140

Introduction

Depuis plus de trente ans, les travaux de recherche en didactique de la géométrie se sont multipliés et ont fait avancer de façon substantielle nos connaissances sur les enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire. En particulier, de très nombreux travaux se sont développés autour des problèmes de reproduction des figures géométriques. Dans les ressources prévues pour les enseignants, quelles traces retrouve-t-on de l'évolution de ces travaux, relativement à ce type de problèmes ? Comment outiller de façon efficace les enseignants pour qu'ils exploitent ces problèmes de façon idoine et cohérente par rapport à leurs propres objectifs d'enseignement en classe ?

Notre travail s'inscrit dans le cadre théorique développé par Duval (1994, 2005) portant sur la déconstruction dimensionnelle et, plus généralement, dans le prolongement des travaux portant sur la restauration de figures développés par les membres du groupe de Lille[1].

Dans notre travail, nous parlons de résolution de *problème* au sens de Polya (1967, p. 131) :

> *Poser un problème signifie donc : rechercher de manière consciente une certaine ligne d'action en vue d'atteindre un but clairement conçu, mais non immédiatement accessible. Résoudre un problème, c'est trouver cette ligne d'action.*

Par ailleurs, nous utilisons le terme de *figure* au sens précisé par Celi & Perrin-Glorian (2014, p. 153) :

> *En géométrie, le discours mathématique porte sur des figures. [...]. Mais le terme figure est lui-même ambigu et dépend de la problématique géométrique qu'on considère. Laborde et Capponi (1994) réinterprètent la distinction de Parzysz (1988) entre dessin et figure en se référant à la définition triadique du signe {référent ; signifiant ; signifié}. Le référent est un objet défini dans une théorie géométrique, le signifiant est un dessin qui le représente, la figure géométrique est alors l'ensemble des couples (référent, dessin) pour tous les dessins possibles. Le signifié pour un sujet est constitué des rapports entre un dessin et son référent construits par ce sujet. Nous partageons ces distinctions mais nous préférons le terme « figure matérielle » au terme « dessin »*

[1] De par leur appartenance institutionnelle, nous désignons par le *groupe de Lille* les membres du groupe de recherche qui a fonctionné à l'IUFM du Nord pas de Calais : Frédéric Brechenmacher, Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Gaudeul, Marc Godin, Joël Jore, Bachir Keskessa, Régis Leclercq, Christine Mangiante-Orsola, Anne-Cécile Mathé, Bernard Offre, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Odile Verbaere.

parce que les représentations matérielles de figures géométriques sont des dessins particuliers sur lesquels doit s'exercer un regard spécifique (Duval & Godin, 2005) pour y voir des éléments de la figure géométrique qu'ils représentent.

Les enjeux de notre recherche se situent dans le développement d'outils didactiques immédiats et autonomes pour l'enseignant, outils lui permettant d'exploiter au mieux le potentiel didactique des problèmes de reproduction des figures géométriques à l'école primaire, notamment au cycle 3. Notre objectif est donc de donner les moyens aux enseignants de prendre du recul par rapport à ce type de problèmes et de leur donner les moyens de les adapter directement eux-mêmes lorsqu'ils veulent les intégrer dans leurs progressions d'enseignement.

Pour cela, nous proposons ici une étude diachronique des problèmes de reproduction des figures géométriques : sur ces trente dernières années (des années 80 à aujourd'hui), nous décrivons les évolutions des instructions officielles et de la recherche en didactique de la géométrie au sujet des problèmes de reproduction de figures géométriques. L'objectif de cette étude est d'essayer d'apporter un éclairage sur l'origine du constat que nous faisons à propos de la différence de traitement de ces problèmes dans les manuels scolaires d'aujourd'hui, différence que l'on peut supposer à l'origine de difficultés de mise en œuvre dans la classe par les enseignants.

Nous commençons cet article en mettant en évidence une exploitation contrastée des problèmes de reproduction de figures géométriques dans les manuels scolaires d'aujourd'hui. Nous prenons appui sur deux extraits de manuels scolaires différents issus de deux collections (*Pour comprendre les maths*, Hachette ; *EuroMaths*, Hatier) qui nous semblent, d'après notre connaissance du terrain en tant que formatrices, assez représentées dans les classes de cycle 3 mais aussi (et surtout) qui nous paraissent contrastées quant à l'exploitation des problèmes de reproduction. Nous les qualifions de « contrastées » car malgré des intentions didactiques qui semblent proches, les connaissances mathématiques à mobiliser sont différentes et donc l'activité mathématique de l'élève sera différente. Nous reviendrons sur cet aspect dans la dernière partie de l'article (partie 5) en analysant plus en profondeur les intentions des auteurs de deux autres collections choisies également parce qu'elles nous paraissent contrastées du point de vue de l'exploitation des problèmes de reproduction (*La tribu des Maths*, Magnard ; *EuroMaths*, Hatier).

Dans la partie 2 de l'article, nous décrivons l'évolution des programmes depuis une trentaine d'années à propos de la prise en compte des problèmes de reproduction, pour mieux comprendre ensuite l'origine des points de convergence (ou de divergence) entre les travaux de recherche orientés sur l'analyse didactique de ces problèmes et leur traitement dans les manuels scolaires, selon les différentes époques considérées. En particulier, nous nous attardons sur l'émergence de travaux que nous estimons significatifs quant à notre travail : Ducel et Peltier dans les années 80, Duval dans les années 90 et les travaux du groupe de Lille à partir des années 2000.

Ainsi, les parties 3 et 4 de cet article permettront de faire le parallèle entre l'émergence et le développement de ces différents travaux de recherche et l'évolution de la prise en compte des problèmes de reproduction dans les manuels scolaires de la même époque. Nous nous appuyons sur une sélection d'extraits de manuels de ces différentes époques. Pour les années 80, le choix des extraits de manuels fut simple puisque les problèmes de reproduction sont rarissimes dans les ouvrages scolaires ; nous en présentons donc un des rares que nous ayons trouvés. Pour les années 90, nous avons choisi des extraits issus de deux collections : la collection *Math Élem* (Belin) car celle-ci semble être représentative des attentes des instructions officielles de l'époque et la collection *Nouvel Objectif Calcul* (Hatier) qui permet de faire le lien avec la collection actuelle *EuroMaths* (Hatier). Enfin, pour les années 2000, pour des raisons évoquées précédemment, nous avons retenu des extraits des deux collections considérées comme « contrastées » : *La Tribu des Maths* (Magnard) et *EuroMaths* (Hatier).

Précisons enfin que, pour des raisons de cohérence de l'ensemble et dans la mesure du possible, les extraits de manuels proposés et analysés dans cet article ont été choisis selon un fil rouge « mathématique » : le cercle et le compas.

Ce faisant, les analyses que nous proposons dans cet article, inspirées des travaux précités, nous semblent fournir de premiers outils didactiques pour l'enseignant pour une mise en œuvre idoine des problèmes de reproduction dans la classe.

Plusieurs constats sur les problèmes de reproduction de figures géométriques à l'école élémentaire aujourd'hui

Des positionnements contrastés dans les manuels actuels

Dans les textes officiels actuels (MEN, 2008), la reproduction de figures planes compte parmi les tâches géométriques recommandées et cela, dès le cours préparatoire. En liaison avec les instruments de géométrie et les différents supports (papier uni, quadrillé, pointé), ces problèmes visent à mobiliser *« la connaissance de figures usuelles et sont l'occasion d'utiliser le vocabulaire spécifique et les démarches de mesurage et de tracé »*. Aucun document d'accompagnement n'existant sur l'enseignement de la géométrie, on peut se poser la question : comment les enseignants doivent-ils interpréter le peu d'indications relatives aux prescriptions officielles à propos de cet enseignement et notamment à propos des problèmes de reproduction ?

Lorsqu'ils sont présents dans les manuels scolaires, les raisons d'être de ces problèmes ne sont pas toujours explicites aux yeux des enseignants, ni *a fortiori*, aux yeux des élèves. À titre d'exemple, voici ci-dessous une figure extraite d'un manuel récent de CM2 :

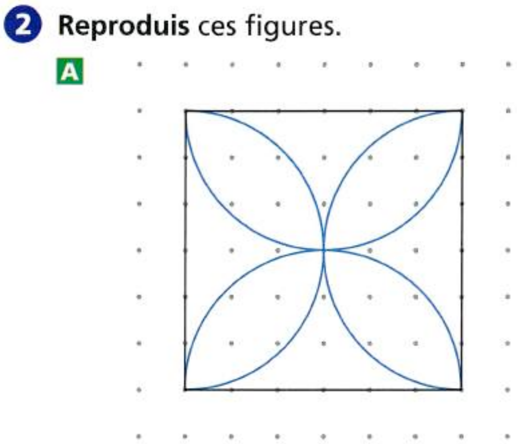


Figure 1 : Extrait[2] de *Pour comprendre les Maths* CM2 (Hachette, 2011), p. 85

Dans le guide pour l'enseignant qui accompagne ce manuel, les auteurs[3] précisent qu'au cycle 3, l'étude des propriétés des figures se fait en ayant recours aux instruments de tracé et de dessin : ces derniers constituent *« une sorte de matérialisation des propriétés géométriques de figures planes »* (livre du maître, p. 13).

La figure 1 se trouve dans une leçon consacrée à la reproduction de figures planes et à l'utilisation du compas[4]. Cette leçon, selon le livre du maître, p. 116 :

2 Tous les extraits des ressources citées dans cet article ne sont pas reproduits à l'échelle.

3 Cf. BLANC J.-P., BRAMAND P., LAFONT E., MAURIN C., PEYNICHOU D. et VARGAS A. (2013).

4 Le manuel de CM2 de cette collection propose deux leçons sur la reproduction de figures planes, la leçon en question étant la première. Dans la seconde, les auteurs mettent l'accent sur la description et le programme de construction de figures planes en vue de les construire.

porte sur le codage des données (mesures, symboles d'égalité de segments, d'angles droits) et l'utilisation du compas ; elle permet de faire prendre conscience aux enfants de l'aide que peut leur apporter l'exécution préalable des tracés à main levée et d'insister sur la précision de ceux exécutés à l'aide des instruments ». Le matériel suggéré pour aborder la leçon est constitué du compas, de la règle graduée, de papier uni et pointé centimétrique (sic).

Si les intentions générales des auteurs de cette collection sont intéressantes, ce qu'ils proposent ne permet pas vraiment d'atteindre les objectifs annoncés. Dans le cas de la Figure 1, la présence du papier pointé court-circuite la procédure d'analyse de la figure à reproduire : à quel moment de l'activité de l'élève les instruments seront-ils porteurs de propriétés ? Le support papier choisi fonctionne comme un outil car il porte en soi des propriétés. Les centres des demi-cercles sont déjà tracés et les trois points par lesquels ils passent sont aussi facilement identifiables. Le compas sert alors de simple traceur de cercle et à aucun moment pour comparer ou reporter des longueurs. Les côtés du carré se réalisent en joignant des points déjà tracés et en contrôlant perceptivement les longueurs et les angles droits.

En relisant les objectifs de la leçon en question, on s'aperçoit que l'apprentissage des aspects formels prend le pas sur l'apprentissage de contenus : il faut apprendre à coder les figures avec les icones spécifiques, à mesurer les segments et à utiliser les instruments pour réaliser des figures précises. À aucun moment on n'aide l'enseignant à exploiter ces exercices comme véritables problèmes permettant à l'élève de mobiliser les propriétés géométriques pour reproduire des figures planes et les instruments pour repérer ces propriétés.

L'exemple suivant est aussi extrait d'un manuel récent de CM2 :

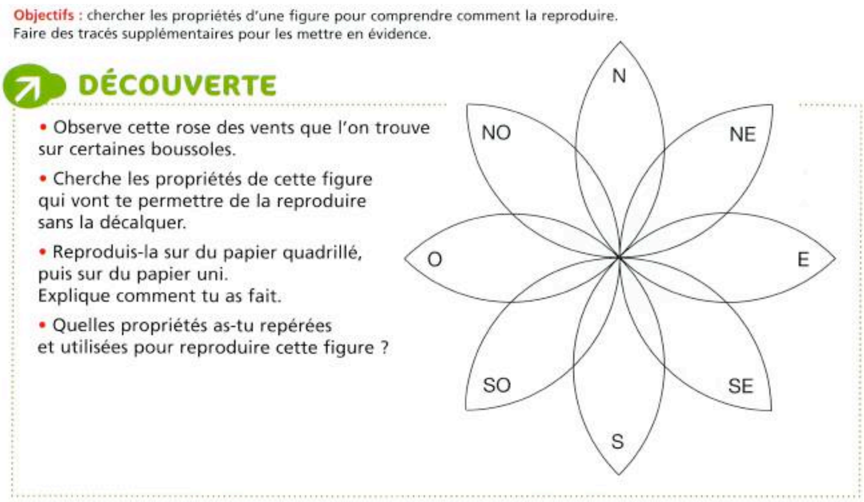


Figure 2 : Extrait de *EuroMaths* CM2 (Hatier, 2009), p. 168

Dans le livre du maître (p. 203), on lit :

Les problèmes pour chercher ne sont pas réservés au domaine numérique. […] il s'agit d'entraîner les élèves à développer une attitude de recherche dans le domaine de la géométrie : faire des hypothèses et les tester ; élaborer une solution personnelle, s'assurer de sa validité ; argumenter pour convaincre de la validité de sa construction. Pour faire apparaître certaines propriétés des figures permettant leur reproduction, les élèves doivent faire des tracés supplémentaires qui n'apparaissent pas sur le modèle. Nous proposons des reproductions à même échelle sur papier quadrillé pour faciliter la construction, puis sur papier uni pour apprendre à maîtriser les instruments. Ensuite, les élèves doivent mettre en mots les propriétés qu'ils ont repérées et utilisées.

Ainsi, une première lecture de quelques manuels scolaires actuels nous permet d'ores et déjà de constater des positionnements très différents. La position majoritairement adoptée par les auteurs de manuels tend à sous-estimer ce type de problèmes ou à ne donner d'intérêt qu'à l'exercice de reproduction en soi, c'est-à-dire à son résultat graphique final. En revanche, peu d'auteurs cherchent à l'exploiter en l'utilisant comme fondement d'une progression en géométrie.

Et pourtant : un foisonnement de travaux de recherche se rapportant aux problèmes de reproduction

Si l'on procède à un examen rapide des dernières publications à ce jour en lien avec les problèmes de reproduction de figures géométriques, on constate un foisonnement de problématiques nouvelles, reflétant sans aucun doute l'avancée de la recherche en didactique de la géométrie. En tant que chercheures, formatrices et enseignantes et sans être exhaustives, nous avons retenu différentes ressources dont la nature et les objectifs sont différents. En particulier, les ressources que nous situons entre recherche et formation s'adressent à un public de formateurs, de chercheurs et d'enseignants.

Entre recherche et formation, nous citons les dernières publications de Perrin-Glorian et Godin (2014), Perrin-Glorian, Mathé et Leclerc (2013), Mangiante-Orsola, Perrin-Glorian (2014) qui situent au cœur de leur travail les problèmes de reproduction et se donnent pour ambition de penser une certaine continuité de l'enseignement de la géométrie entre le premier et le second degré. Dans ce prolongement, les travaux de Barrier, Hache et Mathé (2014a, 2014b) s'intéressent au rôle des actions matérielles et langagières dans le contexte des problèmes de restauration[5]. Les récents travaux de Winder Guille-Biel (2014) accordent un rôle central à la visualisation dans l'activité de reproduction de figures chez les élèves. En outre, les recherches de Mangiante (2013), Mangiante-Orsola, Perrin-Glorian (2014) proposent un focus sur les pratiques des enseignants mobilisant des problèmes de restauration. Ou encore, Venant et Venant (2014) ouvrent de nouvelles perspectives avec les TICE.

Du côté de la formation, les auteurs (Anselmo & *al*., 2014)[6] de la brochure du groupe rectoral école-collège de l'IREM de Lyon (2014) reprennent un des dispositifs de formation continue élaborés et expérimentés par le groupe dans le but d'aider les enseignants de cycle 3 et de sixième à réfléchir sur l'enseignement de la géométrie, à interroger et peut-être modifier leurs pratiques.

L'un des objectifs de notre article est d'essayer de mieux comprendre le contexte d'aujourd'hui, d'essayer d'aller au-delà de ces premiers constats qui pointent un certain décalage entre ce que peuvent proposer les manuels scolaires et l'avancée de la recherche en didactique ainsi que de la formation continue dans le contexte des problèmes de reproduction. Pour éclairer le présent et proposer des perspectives pour l'avenir, nous proposons ici d'esquisser l'évolution, opérant ces trente dernières années, des instructions officielles, de la recherche et des manuels à la disposition de l'enseignant autour des problèmes de reproduction de figures géométriques en nous centrant sur le cycle 3.

Dans la partie qui suit, nous rendons compte d'une étude des instructions officielles depuis une trentaine d'années en nous focalisant sur les problèmes de reproduction de figures.

Point de vue des instructions officielles depuis une trentaine d'années

Dans les programmes de mathématiques de l'école primaire[7], les problèmes de reproduction font leur première apparition à la fin des années 1970 (cycle élémentaire) ; avant cette date, ils relevaient exclusivement du domaine du dessin (Bouleau, 2001).

Les textes officiels de cette époque proposent des *activités d'éveil et manuelles* dont certaines demeurent implicitement liées au domaine géométrique : par exemple, apprendre à utiliser la règle

[5] Nous reviendrons plus loin dans l'article sur la définition de problèmes de restauration.

[6] ANSELMO B., BRACONNE-MICHOUX A., GROS D., ZUCCHETTA H. (2014).

[7] Pour les instructions officielles citées dans ce texte, cf. http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes.htm (consulté le 23 octobre 2014).

et l'équerre ; apprendre à respecter les étapes de réalisation d'un objet.

En 1975, la revue *Grand N* propose le premier article sur la géométrie à l'école élémentaire : son titre, *Géométrie et travail manuel*[8], montre bien que la démarche épousée correspond à celle des prescriptions officielles de l'époque puisque c'est le lien fort avec le dessin, certaines représentations graphiques sociales (origamis, ribambelles, *etc*.), qui est à l'origine des activités proposées dans ce texte.

Dès leur apparition dans les programmes de géométrie, les caractéristiques des problèmes de reproduction et leurs raisons d'être se précisent au fil du temps. En 1980 (cycle moyen), on indique que l'élève doit savoir reproduire *« différents objets géométriques (solides, surfaces ou lignes) »*. Un paragraphe est consacré à l'explicitation des objectifs des activités géométriques : ici, on précise, entre autres, que *« les activités géométriques peuvent concerner la reproduction, la description, la représentation ou la construction d'un objet »* et que *« reproduire un objet dont les élèves disposent, c'est en réaliser une copie conforme »*. On distingue la reproduction de la construction *« car les élèves partent alors* [pour la construction] *d'une représentation ou d'une description et non de l'objet lui-même »*. Les problèmes de reproduction étant liés aux techniques et aux instruments de dessin, on souligne que ces derniers ne doivent pas seulement servir pour réaliser correctement les tracés mais *« l'élève doit apprendre à choisir l'instrument adéquat à la tâche envisagée et donc à analyser l'instrument et l'objet d'étude »*.

Dans les compléments aux programmes et instructions du 15 mai 1985, un intérêt particulier est porté à l'enseignement de la géométrie. Les activités de reproduction sont davantage caractérisées : on peut reproduire des objets plus ou moins usuels (solides ou figures planes, simples ou complexes), à l'échelle 1 ou à une autre échelle ; on peut recourir à des matériaux divers, ce qui peut entre autres suggérer la reproduction à l'aide de gabarit, ainsi qu'à des outils variés (moulages, calques, instruments géométriques usuels). À travers la reproduction d'une figure, l'élève doit apprendre à se servir des procédés d'analyse et de synthèse qui sont propres aux activités géométriques. L'appel aux outils de géométrie afin de vérifier les propriétés d'une figure demeure toutefois implicite. On les évoque explicitement seulement à propos des compétences de tracé et, dans ce cas, on indique que le choix des outils est une adaptation qui doit être de plus en plus à la charge de l'élève.

En 2002, les textes officiels des programmes scolaires sont rédigés séparément pour le cycle 2 et pour le cycle 3, et comportent chacun un volet sur la géométrie ; les documents qui accompagnent ces programmes consacrent un chapitre à la géométrie au cycle 2.

Dès le cycle 2, la reproduction d'objets réels, de figures simples ou d'assemblages de figures permet de donner du sens aux propriétés géométriques étudiées. Reproduire une figure veut dire la *« tracer (sur papier uni, quadrillé ou pointé) à partir de la donnée d'un modèle »*, l'emploi des instruments peut être précisé ou bien laissé à la charge de l'élève (cycle 3). Des compétences étroitement liées à la reproduction de figures, notamment dans la phase d'analyse du modèle, sont évoquées dans ces textes :

- identifier, de manière perceptive ou en ayant recours aux propriétés et aux instruments, une figure simple dans une configuration plus complexe ;
- décomposer une figure en figures plus simples.

Dans le document accompagnant les programmes de 2002, à propos des problèmes de reproduction de figures sur papier uni, on souligne ainsi qu'ils permettent, certes, d'apprendre à utiliser correctement un instrument de tracé mais surtout à analyser une figure : ces problèmes nécessitent

[8] L'article en question a été publié dans le n°7 de la revue *Grand N* : il s'agit d'un recueil de travaux *« intéressant directement les maîtres [...] qui concernent la liaison géométrie-travail manuel »*. Les auteurs de ces travaux, présentés lors des journées APMEP, ENS et IREM consacrées au thème de la géométrie, ne sont pas précisés.

en effet, « *l'analyse préalable de la figure à reproduire pour en repérer certaines propriétés et, lorsque la reproduction est amorcée, pour identifier les éléments communs aux deux figures*. »

Comme nous l'avons indiqué plus haut, dans les programmes actuellement en vigueur (MEN, 2008), bien que les problèmes de reproduction soient évoqués dès le cycle des apprentissages fondamentaux, aucune caractéristique n'est précisée. On se limite à indiquer que de tels problèmes permettent de mobiliser les connaissances de figures géométriques usuelles et d'utiliser le vocabulaire spécifique ainsi que les procédures de mesurage et de tracé.

Dans cette étude des instructions officielles sur ces trente dernières années, nous reconnaissons donc trois moments « institutionnels » importants :

- à la fin des années 70, les problèmes de reproduction sont intégrés dans les programmes de mathématiques ;
- au milieu des années 80, la reproduction de figures est une activité qui acquiert un statut bien précis par rapport aux autres, notamment à l'activité de construction ;
- en 2002, les problèmes de reproduction ne servent pas seulement pour apprendre à utiliser les instruments mais ils sont aussi prétexte pour travailler sur l'analyse de la figure.

Les années 1980 : prémices dans les manuels et émergence des travaux de recherche significatifs

Un examen de quelques manuels scolaires édités entre la fin des années 1970 et le début des années 1990 nous permet de conclure que, malgré les prescriptions officielles, les problèmes de reproduction sont rarissimes.

Les extraits des Figures 3a et 3b sont tirés d'un manuel de 1980, l'un des rares manuels où deux pages simples sont consacrées à ce type de problèmes (les Figures 3a et 3b composent l'une de ces pages). À propos de la reproduction de figures complexes, plusieurs variables didactiques sont convoquées sur cette même page : les types de supports, les instruments, la nature des figures, leur orientation par rapport aux bords de la feuille, la présence ou non de couleurs.

Dans l'exercice en haut de la page du manuel (Figure 3a), le support quadrillé peut être interprété comme une aide au repérage des différents centres du cercle et des demi-cercles par simple comptage des carreaux. Aucune mention n'est d'ailleurs faite des instruments autorisés : la présence de cercles et demi-cercles doit évoquer le recours au compas, le carré peut se construire à la seule règle non graduée, les angles droits étant portés par le support quadrillé. La reproduction de la figure à gauche est proposée pour pouvoir ensuite la colorier de façon à obtenir la figure de droite ; ce travail demande de regarder la figure en terme de lignes (le cercle, les demi-cercles, les côtés du carré), de points (centres du cercle et des demi-cercles) et de surfaces (les parties à colorier pour obtenir la deuxième figure). La figure à reproduire serait donc celle de droite ; celle de gauche, présentée comme un préalable à la reproduction, constitue une aide dans la procédure de reproduction suggérée.

« Sur ton cahier, reproduis d'abord la figure 1, puis colorie convenablement celle-ci afin d'obtenir la figure 2 ».

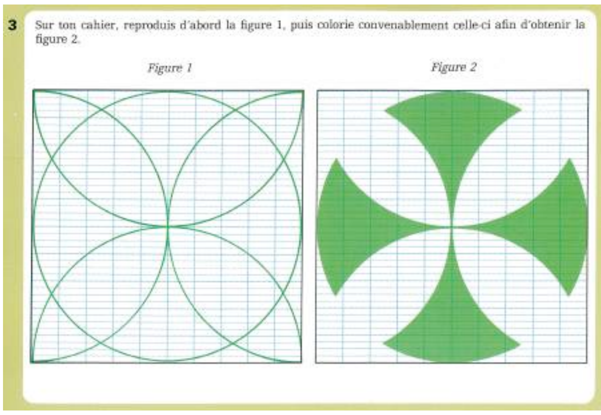


Figure 3a : Extrait de *Math et Calcul* CM1 (Hachette, 1980), p. 68

« Reproduis la figure ci-dessous sur une feuille blanche, en utilisant les instruments dont tu disposes ou des instruments que tu auras fabriqués ».

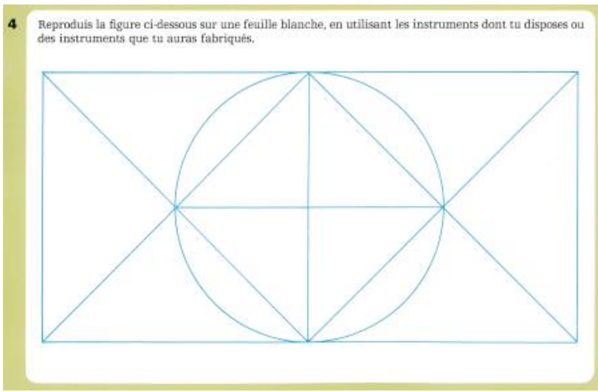


Figure 3b : Extrait de *Math et Calcul* CM1 (Hachette, 1980), p. 68

Dans l'exercice en bas de la page du manuel (Figure 3b), le support retenu est le papier uni, le choix des instruments (*« dont tu disposes »* ou *« que tu auras fabriqués »*) est laissé à l'élève. L'absence de couleur devrait encourager ce dernier à ne voir que des lignes et des points comme intersections de lignes mais, dans la consigne, la possibilité de fabriquer des instruments pourrait encourager l'élève à voir aussi des surfaces, en construisant, par exemple, un gabarit en forme de triangle rectangle isocèle dont les dimensions seraient adaptées à la figure à reproduire (Figure 3b).

Ce gabarit (Figure 4) permettrait en effet de se passer de la règle et de l'équerre car il peut être reporté convenablement plusieurs fois afin d'obtenir la figure-modèle : dans ce sens, il demanderait l'analyse de celle-ci en termes de juxtaposition et/ou de superposition de surfaces[9]. La construction du cercle demanderait toutefois une analyse du modèle en termes de points comme intersections de lignes afin de repérer son centre et un de ses points.

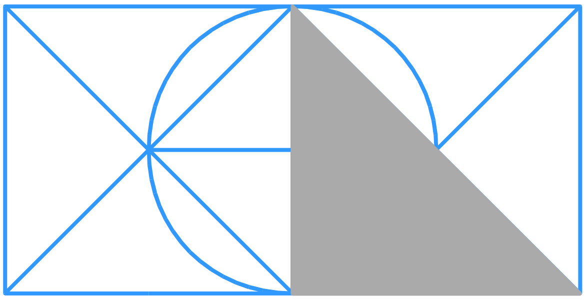


Figure 4 : Mise en évidence d'une « surface » dans la figure 3b

Une brève analyse des problèmes proposés dans ce manuel ancien nous permet d'ores et déjà de montrer la richesse et l'intérêt de l'activité de reproduction pour l'élève. La question demeure sur les outils dont l'enseignant disposait à l'époque pour pouvoir analyser lui-même les problèmes en question et savoir en tirer parti pour qu'ils deviennent sources d'apprentissages pour l'élève.

Comme nous allons l'exposer dans la partie suivante, cette époque est caractérisée par les travaux, incontournables à nos yeux, menés au sein d'un groupe de l'IREM de Rouen.

[9] On pourrait choisir comme gabarit le triangle rectangle isocèle ayant comme hypoténuse le petit côté du rectangle : de même, on analyserait la figure en termes de superposition et/ou de juxtaposition de surfaces. Nous revenons plus loin sur ces aspects.

Émergence des travaux significatifs pour l'enseignement de la géométrie

Nous sommes conscientes que c'est une époque qui est marquée par l'émergence de nombreux travaux significatifs en didactique de la géométrie avec notamment les travaux développés par Brousseau et son équipe du Corem[10] dont on peut citer quelques références : Brousseau (1987), Berthelot & Salin (1992 ; 1993), Salin, Clanché & Sarrazy (2005)[11], Fregona (1995).

Ici, nous apportons néanmoins plus spécifiquement un éclairage sur les travaux de Ducel et Peltier (1986) : ces travaux, qui portent sur la reproduction de figures planes, sont les plus anciens que nous ayons trouvés et ils furent, comme nous le montrerons plus loin, d'un apport substantiel pour la réalisation de quelques ouvrages scolaires (*Objectif Calcul*, *Nouvel Objectif Calcul* et *EuroMaths*, éd. Hatier) des décennies à venir.

Les objectifs généraux annoncés de cette recherche (et dont les expérimentations ont eu lieu en classe de CM2 et 6e) renvoient à l'idée suivante (Ducel & Peltier, 1986, p. 2) :

> *développer des aptitudes d'analyse, de recherche, de validation chez les enfants et pour ce faire, mettre les enfants dans des situations telles qu'ils soient actifs face aux problèmes de géométrie, c'est-à-dire qu'ils aient à analyser des figures, émettre des hypothèses, les tester, les vérifier et communiquer de telle sorte qu'ils se construisent un langage géométrique efficace et fonctionnel.*

La maîtrise des instruments de géométrie et les propriétés géométriques des figures sont au cœur de ces ambitions (*ib.*, p. 3) : « *savoir utiliser correctement et à bon escient les instruments de dessins géométriques [...] savoir construire un certain nombre de figures classiques [...] et quelques propriétés géométriques de certaines figures* ».

La brochure propose l'analyse de plusieurs problèmes épousant ces desseins et qui sont (*ib.,* p. 4) : « *des situations dans lesquelles l'élève doit observer et reproduire individuellement un modèle de dessin géométrique à même échelle ou à échelle différente ».*

Étant donné que le cercle constitue le fil rouge « mathématique » de notre article, nous reprenons à titre d'exemple le problème dit de la « fleur » (Figure 5), également repris sous le nom de « rose des vents » dans la figure 2.

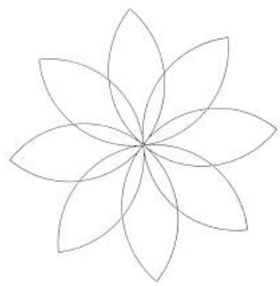


Figure 5 : Extrait de Ducel et Peltier (1986), p. 17 : la « fleur »

Les contenus mathématiques visés dans cette situation sont explicitement « le cercle ; la division d'un cercle en huit arcs isométriques ; les symétries axiales et les rotations. La démarche consiste en une observation et une analyse collective d'un grand dessin au tableau » (*ib.*, p. 17). Les auteurs exploitent plutôt les relations entre les propriétés du cercle et celles du carré (orthogonalité, parallélisme, isométrie des côtés d'un carré, milieu d'un segment) ainsi que des méthodes rencontrées dans d'autres problèmes de reproduction (report de longueur au compas et construction d'un carré, connaissant soit le côté, soit la diagonale). Les variables didactiques retenues cherchent à favoriser des procédures d'analyse de la figure. En effet, le nombre de pétales (8 grands et 8 petits) rend le problème moins immédiatement réalisable que si la fleur comportait 6 pétales ; le choix et la

[10] Centre pour l'observation et la recherche sur l'enseignement des mathématiques.

[11] Dans cet article plus récent, cité ici, les auteurs reprennent des travaux développés à partir des années 1980, ce qui atteste par ailleurs du fait que ces recherches sont encore d'actualité vingt ans plus tard.

disposition des couleurs (ou encore le choix du support papier : feuille blanche ou quadrillée) permet de rendre plus ou moins visibles les carrés sous-jacents (afin de permettre le réinvestissement des propriétés et méthodes de construction associées au carré) et enfin l'accessibilité du modèle ne rend pas possible la prise de mesure sur la figure modèle.

Le recours à ce que les auteurs appellent « des amorces » (Figure 6, figures dans lesquelles les carrés sont apparents) ont un rôle ici d'aide à l'analyse (pour les élèves en difficulté), notamment pour formuler des hypothèses sur la position des centres des demi-cercles (point d'intersection d'un côté d'un carré et d'une diagonale de l'autre). Il s'agit d'une amorce ici au sens d'aide car la figure permet de révéler la structure et donc les traces de sa construction[12].

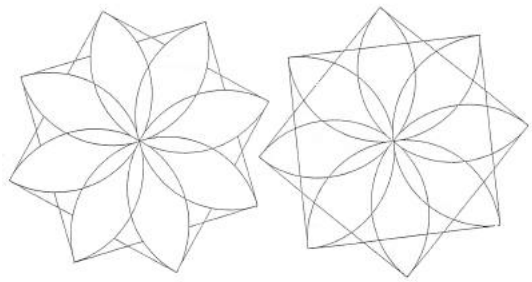


Figure 6 :L'« amorce » de la « fleur » (Ducel & Peltier, 1986, p. 23)

Outre ce jeu sur les variables didactiques qui orientent les actions des élèves et le rôle des instruments quant à la résolution du problème, on constate ici la possibilité de jouer sur une disposition variable des zones colorées. Un tel jeu sur les couleurs amène les élèves à reconnaître différentes formes et surfaces, en termes de juxtaposition et superposition, qui sont au cœur des travaux de Duval que nous développons dans la partie suivante.

Les années 1990 : entre avancée significative dans la recherche et développement dans les manuels

Avancée profonde avec les travaux de recherche de Duval et le changement de regard sur les figures géométriques

Comme nous l'avons déjà lu dans les textes officiels de différentes époques, les problèmes de reproduction nécessitent, entre autres, un travail d'analyse du modèle. Et c'est bien dans les années 1990 que Duval (1994) commence à développer ses recherches autour des différentes façons de regarder une figure. Ce travail nous semble incontournable pour aider à mettre en évidence certaines difficultés que les élèves pourraient rencontrer lorsqu'ils doivent analyser une figure à reproduire.

Selon Duval (1994, p. 122), dans une démarche géométrique, il y a quatre types d'appréhension possible d'une figure, pouvant intervenir simultanément ou alternativement : les appréhensions perceptive, discursive, séquentielle et opératoire. Un apprentissage véritable de la manière mathématique de regarder une figure doit prendre en compte chacun de ces quatre types d'appréhension.

On parle d'appréhension perceptive en cas d'identification et de reconnaissance immédiate d'une forme et de ses propriétés visuelles. Dans ce cas, on privilégie la forme globale de la figure. C'est la première manière de regarder une figure pour un enfant : la vision de surfaces lui apparaît plus directement au premier coup d'œil.

Lorsque l'on regarde un assemblage de figures, l'appréhension perceptive nous conduit à repérer les

[12] Nous verrons plus loin l'évolution du statut de l'amorce au cours de ces années.

différentes parties par juxtaposition ou bien par superposition (Duval & Godin, 2005, p. 9). Si l'on analyse une figure complexe comme un assemblage par superposition, par exemple, il sera difficile de changer de regard en la percevant comme un assemblage par juxtaposition : le recours au coloriage pourrait aider à ce changement en favorisant ainsi une appréhension opératoire.

Duval (2005) parle d'appréhension discursive lorsque l'on parvient à expliciter d'autres propriétés mathématiques d'une figure que celles indiquées par les codages ou par les hypothèses. Pour que les propriétés géométriques l'emportent sur les évidences visuelles, il faut apprendre à réorganiser la perception des formes 2D (dimension 2) en la perception d'un ensemble d'unités visuelles 1D (dimension 1), ce qui suppose le recours à l'appréhension opératoire. C'est pourquoi Duval et Godin (2005) affirment que l'analyse d'une figure en fonction de la connaissance des propriétés géométriques présuppose la déconstruction dimensionnelle des représentations visuelles que l'on veut articuler aux propriétés géométriques.

L'appréhension séquentielle est mise en œuvre lorsque l'on organise les étapes de réalisation d'une figure en tenant compte de ses propriétés et des contraintes techniques des instruments utilisés. Par exemple, c'est le cas lorsque l'on analyse un modèle de figure avant de la reproduire. Analysons l'exercice[13] suivant (Figure 7) :

Reproduis la figure ci-contre en suivant la fiche de construction.

– Trace un carré de 5 cm de côté.
– Trace ....
– Trace ....
– Trace le cercle de centre *O*.
– Colorie la figure obtenue.

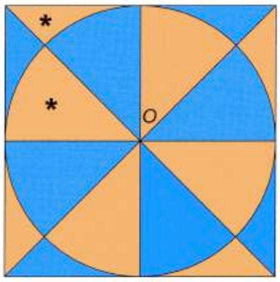


Figure 7

La présence de la couleur encourage l'appréhension de la figure comme assemblage de surfaces : cette appréhension visuelle pourrait se faire par juxtaposition (mais pas seulement), en identifiant deux surfaces de base (indiquées avec un astérisque dans la Figure 7).

En revanche, le texte qui accompagne la figure (la « fiche de construction ») suggère de repérer les côtés du carré, ses diagonales et ses médianes ainsi que le cercle et son centre. On encourage alors à réorganiser la perception des surfaces en celle d'un ensemble de segments constituant le carré et d'un cercle. Pour tracer ce cercle, il faudra aussi repérer son centre comme intersection de segments, puis soit l'un de ses points comme intersection d'une médiane et d'un côté du carré, soit un de ses rayons. L'appréhension opératoire sera alors nécessaire pour modifier le regard et passer de la dimension 2 aux dimensions 1 et 0 et, conjointement, l'appréhension discursive permettra de repérer les propriétés de la figure en question pour choisir les instruments adéquats pour les vérifier (les angles droits, les côtés de même longueur, les diagonales et les médianes du carré ; le cercle dont le centre est le point d'intersection des diagonales du carré, *etc*.). L'appréhension séquentielle est ici guidée par le texte qui demande d'organiser la construction de la figure à partir du carré alors que l'appréhension visuelle induit peut-être plutôt la vision d'un disque coupé en quartiers.

Encourager le passage de la vision d'un assemblage par juxtaposition à la vision par superposition est un moyen de permettre l'abandon des surfaces pour se centrer sur les lignes : pour cela, dans la

[13] Cet exercice est extrait de BOURHIS-LAINE F., DEBAILLEUL A., HELAYEL J., LENOIR E., TRÈVE G., VINCENT J.-F. (2009), p. 108. Bien que plus récent que l'époque que nous évoquons dans ce paragraphe, nous l'avons choisi car il se prête bien à illustrer une articulation de différents types d'appréhension d'une figure au sens de Duval (1994).

Figure 7, il faudrait éliminer les couleurs et prolonger quelques lignes déjà tracées à l'aide d'une règle non graduée. L'articulation des appréhensions visuelle, opératoire et discursive pourrait ainsi être facilitée. En effet, sans une modification de la manière spontanée et prédominante de « voir » une figure comme assemblage de surfaces, toutes les formulations des propriétés géométriques risquent d'être vides de sens.

Des manuels plus fournis

Dans les années 1990, les manuels semblent proposer davantage de problèmes de reproduction de figures planes. Nous avons retenu deux collections éditées au milieu des années 1990 : *Math Élem* (Belin) et *Nouvel Objectif Calcul* (Hatier).

Afin d'identifier la signification assignée à la reproduction de figures dans ces deux collections, nous avons cherché les pages des leçons qui lui sont consacrées, puis nous avons procédé à une analyse du traitement possible des figures exploitées dans ce type de problèmes.

La collection *Math Élem* (Belin)

Dans la collection *Math Élem*, les problèmes de reproduction sont présents dans le manuel de CE1 (une leçon), dans le manuel de CE2 (trois leçons), dans le manuel de CM1 (deux leçons) et dans le manuel de CM2 (trois leçons). Le support papier peut être quadrillé ou uni ; les instruments peuvent être suggérés ou non ; des amorces des figures à reproduire sont parfois proposées et, dans ce cas, leur orientation est la même que le modèle et la reproduction se fait à la même échelle.

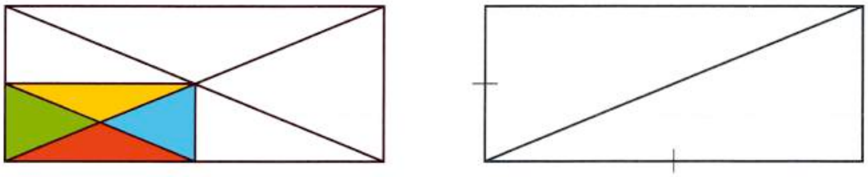


Figure 8 : Extrait de *Math Élem* CE1 (Belin, 1995), p. 57

Par exemple, pour une reproduction proposée dans le manuel de CE1 (Figure 8), les auteurs demandent de compléter la figure d'après le modèle en se servant de la règle. Dans le livre du maître (p. 75), une attention particulière est portée sur l'articulation entre appréhension opératoire et appréhension séquentielle, nécessaire pour reproduire la figure en question : « *L'organisation de la tâche est capitale : l'élève doit d'abord tracer la deuxième diagonale du rectangle, son point d'intersection avec la première donnant le quatrième sommet du petit triangle* ».

On encourage l'enseignant à faire expliciter aux élèves l'ordre dans lequel ils ont tracé les différents éléments de la figure ainsi que ceux qui ont été choisis pour démarrer.

Les instruments peuvent varier, les auteurs ne suggèrent pas seulement le recours à des outils classiques. Pour les figures de la page 152 du manuel de CE2, par exemple, on alerte l'élève qui devra *« préalablement reporter certaines mesures avec [sa] règle graduée ou avec une bande de papier »*. Dans le livre du maître correspondant, les auteurs encouragent toutefois l'enseignant à faire utiliser la bande de papier en précisant que *« cette méthode ne nécessite aucune lecture sur la règle graduée, c'est la plus performante lorsqu'on n'a pas besoin de connaître les mesures exactes »*.

Les arguments avancés suffisaient-ils pour qu'un enseignant favorise un recours à une bande de papier plutôt qu'à la règle graduée ?

Dans le manuel de CM1 (p. 12), une définition de reproduction de figures s'affiche :

> *En géométrie, reproduire une figure signifie tracer une nouvelle figure superposable au modèle donné. En superposant le nouveau tracé et le modèle, on ne doit voir par transparence qu'une seule figure. Sur le nouveau tracé, toutes les dimensions doivent être égales à celles de la figure donnée.*

D'une part, on suggère un moyen de vérification de l'exactitude de la figure reproduite ; d'autre part, on limite ces problèmes à des cas où les figures sont à la même échelle que leurs modèles. Et par la même occasion, on privilégie ainsi les instruments permettant des mesures physiques.

Mais cette définition n'est pas toujours respectée. Dans le manuel de CM2 (p. 59), par exemple, un problème de reproduction est proposé dans une leçon consacrée aux triangles : il s'agit de reproduire une figure à une autre échelle que le modèle. Les instruments ne sont pas cités (Figure 9).

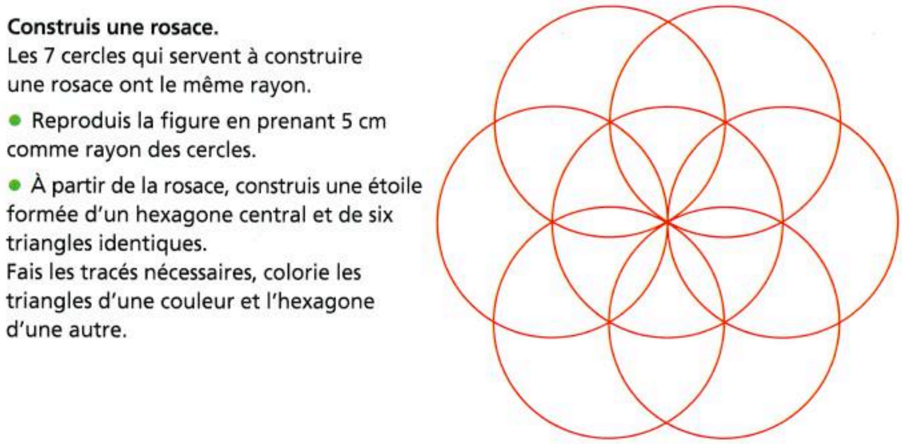


Figure 9 : Extrait de *Math Élem* CM2 (Belin, 1998), p. 59

Remarquons d'abord que, tout en gardant l'idée de faire réaliser la figure à une autre échelle que le modèle, il aurait suffi de fournir un segment représentant le rayon (longueur) des cercles. Cela aurait évité le recours à la règle graduée et le compas aurait joué le double rôle de traceur de cercle et d'outil de report de longueur.

Dès le début de l'énoncé, toutes les différentes appréhensions d'une figure sont conviées : on incite l'élève à aller au-delà de la perception et à articuler la vision de la figure comme étant un assemblage de surfaces et un réseau de lignes et de points, certaines lignes n'apparaissant pas ; le modèle fourni n'étant que la trace de construction de la rosace, il faut l'analyser non seulement pour saisir l'ordre à suivre pour tracer les sept cercles mais aussi pour y voir l'étoile décrite dans le texte. Dans l'analyse de ce modèle, l'élève devra être capable de reconnaître les points d'intersection des différents cercles comme étant les sommets des triangles équilatéraux qui constituent l'étoile à réaliser : les propriétés du cercle et du triangle équilatéral doivent s'articuler afin de voir ce que l'on demande de voir !

La volonté de permettre aux élèves d'aller au-delà de l'appréhension visuelle est d'ailleurs présente à plusieurs reprises dans la collection en question. On reconnaît aussi cette volonté lorsque, dans le manuel de CM1, des figures à main levée apparaissent. Dans le livre du maître correspondant, les auteurs citent le dessin à main levée à deux reprises : on préconise le recours à des *« essais à main levée sans respecter les mesures, pour tester un enchaînement des tracés des segments »* (p. 54) ; plus loin, une page est consacrée à l'utilité du dessin à main levée : les auteurs précisent que, dans les problèmes de reproduction, il a une fonction auxiliaire et il permet entre autres de s'imprégner des contraintes du modèle (p. 162).

Dans le manuel de CM2 (p. 138), les auteurs reviennent sur les compétences nécessaires pour reproduire une figure :

> *Commence par faire un croquis à main levée, c'est-à-dire sans règle, ni équerre, ni compas. Inscris sur ce croquis toutes les indications dont tu as besoin : les dimensions, les noms des points, les constructions supplémentaires nécessaires. En faisant ce travail, essaie de trouver dans quel ordre tu dois effectuer les tracés […]. Pour vérifier l'exactitude de ta reproduction, tu peux procéder à une superposition avec le modèle ou à une comparaison avec un calque du modèle.*

Dans cette collection, on constate donc que les problèmes de reproduction sont fortement caractérisés : on réalise la figure à la même échelle que le modèle donné. À travers le traitement de ces problèmes, l'élève apprend à articuler les différentes appréhensions lorsqu'il regarde une figure ; dans ce sens, le recours à un croquis aiderait l'élève à enrichir le modèle d'éléments qui n'apparaissent pas explicitement au premier regard. Ainsi évoque-t-on implicitement le procédé d'analyse et de synthèse utile pour aborder des activités géométriques. Remarquons toutefois que, dans les différents livres du maître de la collection en question, on encourage l'enseignant à être exigeant à l'égard de la netteté des tracés et à demander aux élèves *« des dessins très soignés que l'on prend plaisir à regarder »* (livre du maître du manuel de CM2, p. 195). Cet aspect demeurant implicitement lié à l'habileté dans le maniement des instruments, on pourrait croire que les auteurs considèrent qu'il s'agit d'une compétence indispensable pour les apprentissages géométriques.

La collection *Nouvel Objectif Calcul* (Hatier)

Dans la collection *Nouvel Objectif Calcul,* la reproduction de figures planes est présente dans les manuels de CE2 (six étapes), de CM1 (une étape), de CM2 (une étape).

Dans le livre du maître correspondant au manuel de CE2, en accord avec les instructions officielles de l'époque, on précise que la reproduction de figures est une activité géométrique dans laquelle le modèle est visible et éventuellement à la disposition des élèves ; les outils prévus sont le calque, les gabarits de formes, la règle et le compas ; le support peut être quadrillé ou uni. Ce type de problèmes *« ont pour objectif de permettre à l'élève de mieux maîtriser l'usage et le maniement des instruments et surtout d'affiner l'observation et l'analyse de la figure à reproduire »*, ce qui est tout à fait en accord avec l'esprit des travaux de Ducel et Peltier (1986) en considérant que Peltier compte parmi les auteurs de cette collection.

Mais la reproduction semble aussi être l'occasion de travailler certaines notions géométriques. C'est le cas dans le manuel de CE2 où l'étape 30 (pp. 74-75) est consacrée au cercle et au compas. Sans compter la présence de la rosace à six branches (même figure que dans *Math Élem*, cf. Figure 9 dans ce texte), un exercice a alors attiré notre attention (Figure 10).

« Observe la construction de cette figure. Repère les diamètres et les rayons du grand cercle. Repère ensuite les rayons des petits cercles incomplets. Reproduis cette figure sur le quadrillage ».

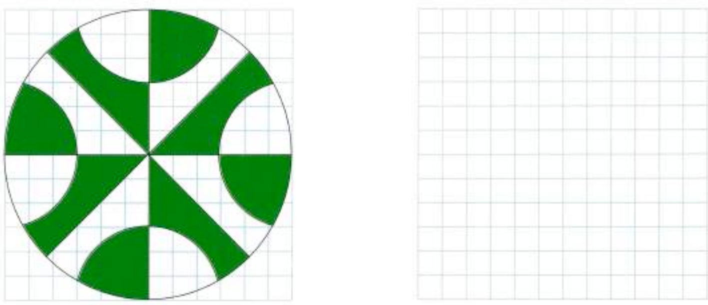


Figure 10 : Extrait de *Nouvel Objectif Calcul CE2* (Hatier, 1995), p. 75

Lors de la reproduction de cette figure, les auteurs du manuel suggèrent (livre du maître, p. 133) que les difficultés d'un élève peuvent porter sur *« mauvais comptage des carreaux, tracés mal limités pour les arcs de cercles, repérage difficile pour tracer les diamètres perpendiculaires »»*.

Le choix du quadrillage semble être une aide à une appréhension discursive de la figure (propriétés des diamètres du grand cercle ; positions des centres des différents cercles). Compte tenu du fait que cette figure est proposée dans une première étape sur le cercle et le compas, les difficultés pourront néanmoins être de toute autre origine, si l'on considère que le texte qui accompagne la figure incite à l'appréhender en terme de lignes et selon une séquence précise (*« repère les diamètres du grand cercle… ensuite… des petits cercles… »*) alors que la présence de la couleur encourage une première appréhension comme assemblage de formes et rend donc difficile la déconstruction dimensionnelle de la figure afin de repérer ses propriétés et l'ordre de construction.

Dans le manuel de CM1 (cf. livre du maître, pp. 71-74), le travail sur la reproduction de figures planes est l'occasion pour apprendre aux élèves à analyser un modèle donné et à choisir les bons instruments ; le papier quadrillé est effectivement suggéré comme moyen pour faciliter cette analyse ; le repérage d'éléments supplémentaires essentiels à la réalisation de la figure devient un moment indispensable dans le traitement de ce type de problèmes.

Conscients des difficultés que les élèves rencontrent à articuler l'appréhension séquentielle d'une figure à reproduire (*« les enfants n'arrivent pas à repérer et à ordonner les différentes étapes de construction »*, livre du maître, p. 74) et l'appréhension opératoire (*« difficulté à retrouver la figure de base et à imaginer les tracés effacés »*, *ib.*), les auteurs proposent de simplifier le travail de reproduction (*ib.*) *« en utilisant du papier quadrillé, en donnant un dessin comportant déjà certains éléments […], en donnant un dessin où les lignes de construction nécessaires (mais effacées sur le modèles) sont présentes »*.

On retrouve ici l'esprit des travaux de Ducel et Peltier (1986) où une amorce du modèle et sa déconstruction sont suggérées à l'élève pour l'aider à réussir.

Dans le manuel de CM2, nous retrouvons le problème de la « rose des vents » à huit branches (Figure 11), citée précédemment (Figures 2, 5-6), le livre du maître reprenant explicitement les éléments d'analyse déjà évoqués. On notera toutefois un guidage différent pour l'élève permis par un jeu sur les couleurs et les effets de juxtaposition-superposition. En continuité avec le travail proposé en CM1, les arcs de cercles des rosaces bleues ne sont plus apparents et une question demande explicitement de les retrouver. Le papier quadrillé apparaît encore comme une aide possible à l'analyse du modèle, avant la reproduction sur papier uni.

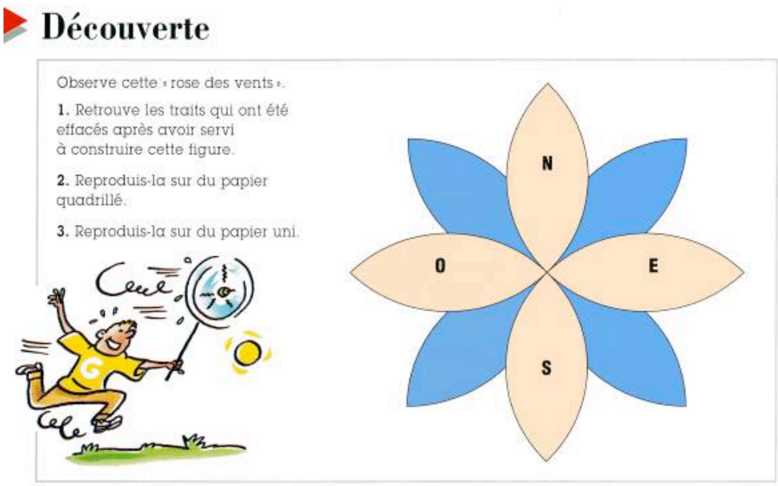


Figure 11 :Extrait de *Nouvel objectif calcul* CM2 (Hatier, 1996), p. 66.

Dans le livre du maître correspondant à ce niveau (p. 121), les auteurs évoquent la possibilité de « ne pas imposer que les dessins soient reproduits à la même échelle. Dans ce cas, plus riche, c'est l'analyse géométrique du dessin qui va permettre la reproduction ». On pourrait reconnaître ici une volonté de faire évoluer le travail depuis le CE2, toujours selon l'esprit de Ducel et Peltier (1986).

L'examen de ces deux collections des années 90 nous montre donc que les manuels de l'époque commencent à être plus fournis : les problèmes de reproduction de figures planes se caractérisent de plus en plus. On constate néanmoins que les raisons d'être de ce type de problème ne sont pas toujours si explicites. Il faut attendre les années 2000 pour que la reproduction de figures planes devienne davantage l'occasion de développer certains savoirs géométriques, ce qui est l'objet de la partie suivante.

Depuis les années 2000 : de plus en plus de points d'ancrage entre la recherche et certains manuels

Consolidation du groupe de Lille[14] avec les problèmes de restauration de figures

C'est la question du rapport aux figures dans l'enseignement de la géométrie et celle des moyens de le faire évoluer que Duval et *al*. (2004) ont étudiées en introduisant des problèmes qu'ils ont nommés *restauration de figures*.

Comment analyser une figure pour être capable de voir ce qu'il faut géométriquement y voir ? Quels types de tâche utiliser, et quelles figures pour ces problèmes peuvent faire changer la manière de voir des élèves ? Comment organiser des activités centrées sur l'analyse des figures ? Ces questions sont au cœur des recherches menées par le groupe de Lille. Et ces questions ont conduit à introduire des problèmes de reproduction particuliers, à savoir la restauration de figures planes dont voici ci-dessous les caractéristiques (Godin & Perrin-Glorian, 2009) :

- elle consiste à reproduire une figure modèle à partir d'une amorce à l'aide d'instruments ;
- le modèle est une figure complexe demandant un véritable travail d'exploration pour repérer des éléments qui ne figurent pas explicitement ;
- elle dépend du choix de la figure modèle, de l'amorce et de la différence entre les deux ;
- elle dépend des instruments disponibles et de leur coût[15] ;
- la règle graduée n'est pas disponible ou alors elle a un coût très important ;
- aucune mesure n'est donnée.

Le travail sur les grandeurs géométriques sans recours à la mesure conduit à conceptualiser les objets géométriques ainsi que les opérations sur les grandeurs. L'utilisation d'instruments permettant des mesures physiques conduit à neutraliser l'aspect visuel des figures, en focalisant l'attention directement sur des nombres et des calculs et donc à la détourner des propriétés géométriques (Duval & Godin, 2005).

Dans la restauration de figure, on vise à travailler l'appréhension opératoire. Les autres appréhensions sont présentes aussi : la perceptive, elle, est toujours là ; il s'agit justement de la contrôler pour la rendre opératoire ; il faut mettre en œuvre l'appréhension séquentielle pour choisir un ordre dans les tracés, ce qui fait intervenir les instruments dont on dispose et sollicite simultanément l'appréhension opératoire. Cette articulation peut faire intervenir le discours (donc l'appréhension discursive) grâce au passage par des propriétés que mettent en œuvre les instruments mais pas seulement[16].

La façon dont les élèves utilisent les instruments pour leurs actions sur les figures est étroitement liée à leur mode d'appréhension en termes de surfaces, de lignes ou de points. En leur donnant accès à des instruments de type 2D, on prend en compte leur perception spontanée de la figure en termes

[14] Voir la première note de bas de page de cet article pour la liste des membres de ce groupe.

[15] *« L'introduction d'un coût à l'utilisation des instruments permet la réussite par des procédures diverses, qui demandent plus ou moins de connaissances géométriques, mais incite à utiliser certains instruments plutôt que d'autres et donc à développer des connaissances géométriques, pour obtenir les effets graphiques voulus, avec des instruments dont l'utilisation est moins immédiate, à partir des connaissances anciennes des élèves. En modifiant le barème relatif aux utilisations des instruments de tracé ou d'effacement de tracé, on peut donc agir sur les procédures de tracé des élèves »* (Godin, Perrin-Glorian, 2009, p. 5).

[16] Nous renvoyons le lecteur au texte de Barrier, Hache et Mathé (2014a et 2014b) dans lequel les auteurs traitent de l'articulation entre visualisation, instruments et langage dans des problèmes de restauration de figures planes.

de surfaces. Les encourager en même temps à utiliser des instruments de type 1D ou permettant d'établir des relations entre des éléments 1D ou 0D est nécessaire pour les accompagner vers la déconstruction de la figure en un réseau de lignes et de points (Perrin, Mathé & Leclercq, 2013).

Analysons brièvement l'exemple suivant (figure 12) comportant une figure complexe qui peut être analysée soit comme juxtaposition, soit comme superposition de figures simples (figure 12bis) :

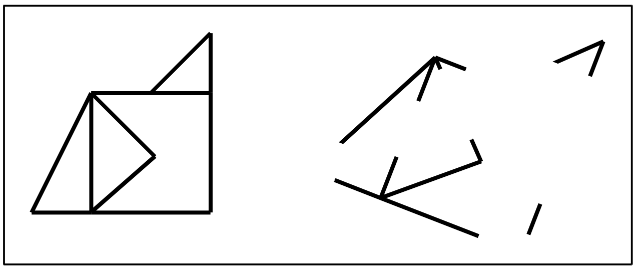
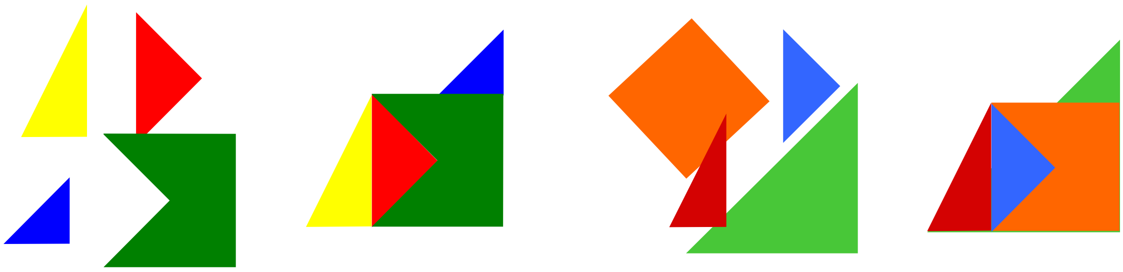


Figure 12 :Une figure à reproduire à partir de son amorce[17]

La présence de l'amorce encourage néanmoins à la regarder comme assemblage de figures par superposition et à se centrer sur les éléments 1D et 0D. De plus, l'amorce est agrandie et a subi une rotation par rapport au modèle : cela empêche de faire appel aux mesures ou de compléter l'amorce par simple translation de certains éléments de la figure à reproduire.



Assemblage par juxtaposition — Assemblage par superposition

Figure 12bis

Notons, à ce propos, l'évolution du statut de l'amorce : en reprenant le problème de la « fleur » (figure 5) ou celui de la « rose des vents » (figures 2 et 11), l'amorce apparaissait comme une aide pour les élèves en difficultés et pour mettre en évidence les traits de construction, notamment en passant par les carrés (voir la figure 6 ou la figure 13 ci-dessous).

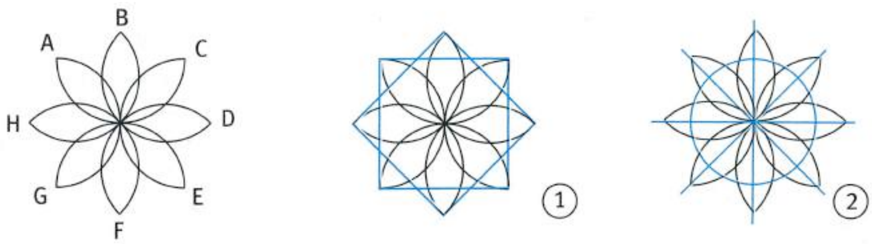


Figure 13 : Extrait de *EuroMaths* CM2 (2009), p. 203

Alors que, dans le cas des problèmes de restauration, au sens proposé par le groupe de Lille, l'amorce consiste à proposer un début de reproduction de la figure-modèle permettant de

[17] La figure 12 est extraite d'un document datant de 2004 et que l'on trouve à l'adresse URL suivante : http://www.lille.iufm.fr/IMG/pdf/Geometrie_au_cycle_2.pdf. Nous l'avons adaptée afin d'exploiter les caractéristiques essentielles d'un problème de restauration.

contraindre les procédures, comme dans le problème donné à la figure 12, dans lequel l'amorce est constituée d'éléments parcellaires de la figure-modèle, donnés avec un changement d'échelle et d'orientation.

Vers de nouvelles problématiques embarquant les problèmes de reproduction et une volonté de diffusion

Jusque là, nous avons pu mettre en évidence que les travaux de Ducel et Peltier (1986) nous semblaient pionniers quant à l'exploitation du potentiel didactique des problèmes de reproduction. Nous avons également mis en évidence les origines des ambitions des problèmes de restauration telles qu'on peut les connaître dans les dernières publications du groupe de Lille (Duval & *al.* 2004 ; Duval & Godin 2005 ; Perrin & *al.* 2013 ; Perrin & Godin, 2014 ; Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian 2014). Ces auteurs décrivent des objectifs ambitieux concernant l'analyse de la figure modèle pour construire des compétences et savoir-faire géométriques à travers notamment un jeu réfléchi de différentes variables didactiques (juxtaposition d'éléments de la figure, changement d'échelles, matériel à disposition, support du papier, *etc*.). Les travaux de Duval puis plus généralement ceux du groupe de Lille permettent ainsi d'analyser plus finement ce type de problèmes dans le but de faire changer le regard géométrique des élèves en instituant notamment un système de contraintes sur les instruments et en jouant sur l'amorce et la figure-différence.

Le développement et l'enrichissement des travaux de ce groupe (qui s'est élargi depuis le début des années 2000 et dont la publication de 2004 se veut une première synthèse) font écho à un foisonnement des recherches en didactique de la géométrie dont une synthèse est présentée dans Perrin-Glorian et Salin (2010). Nous avons, par ailleurs, déjà cité le développement de nombreuses nouvelles problématiques s'appuyant sur des problèmes de reproduction (Barrier, Hache & Mathé, 2014a et b ; Winder Guille-Biel, 2014 ; Mangiante, 2013 ; Venant & Venant, 2014).

Pour autant, malgré ces trente années de réflexions et d'avancées dans la recherche concernant ces problèmes, et dont certains ont réussi à perdurer dans les ressources (par exemple le problème de la « rose des vents » se retrouve à différentes époques : figure 2 en 2009, figure 11 en 1996, et figures 5 et 6 en 1986), nous avons déjà fait le constat au début de cet article que, dans la réalité de la classe d'aujourd'hui ou dans les ressources pédagogiques, on est encore loin de considérer ces problèmes comme cruciaux dans les apprentissages géométriques, malgré une volonté de diffusion par les institutions ou les chercheurs engagés pour la formation. En effet la COPIRELEM[18], lors de ses colloques, encourage les interventions portant sur la géométrie et permet ainsi de faire connaître les travaux qui étudient les problèmes de reproduction[19]. En outre, les membres du groupe de Lille publient de nombreuses ressources[20] destinées aux enseignants dans des revues d'interface (*Grand N*, *Math-École*, *Repère-IREM* : voir bibliographie) ou communiquent lors des rencontres de professionnels de l'enseignement (COPIRELEM, APMEP[21], ARDM[22], formations continues, *etc*.). Plus marginalement dans la formation initiale, des formateurs mettent également à l'étude ces problèmes dans les parcours du master MEEF[23].

Malgré ces différentes initiatives observées depuis plusieurs années, on constate aujourd'hui que

[18] COPIRELEM : Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire.

[19] Relevons à ce propos la publication CONCERTUM (2003), édité par la COPIRELEM, destinée aux formateurs du 1er degré : nous y retrouvons des problèmes de reproduction dont la situation de la « fleur » de M.-L Peltier (*ib*., pp.183-189) adapté pour un scénario de formation type homologie et transposition.

[20] Notons à cet effet que l'un des membres du groupe de Lille a développé un site en ligne : http://www.aider-ses-eleves.com/

[21] Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

[22] Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

[23] MEEF : Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation.

l'une des ressources principales des enseignants, le manuel scolaire, reste relativement peu encline à faire évoluer l'exploitation didactique de ces problèmes de reproduction. Nous allons montrer dans les pages qui suivent que le manuel *EuroMaths* fait figure d'exception dans cet état de faits et que d'autres manuels, comme *La tribu des Maths*, ne semblent pas ignorer ce type de problèmes.

Dans les manuels : des positions contrastées

Rappelons ici que nous limitons notre étude à des ouvrages scolaires de cycle 3. Les deux collections retenues nous semblent être représentatives de positions contrastées quant à l'exploitation des problèmes de reproduction de figures planes. Pour montrer des éléments qui différencient les deux ouvrages, nous avons cherché les pages des leçons consacrées à la reproduction de figures planes ou proposant ce type de problèmes comme prétexte pour traiter des savoirs géométriques, cela dans le but d'identifier la place et le rôle que les auteurs assignent à la reproduction de figures ainsi que les objectifs qu'ils semblent suggérer à l'enseignant.

La collection *EuroMaths* (Hatier)

Les auteurs de la collection *EuroMaths* affichent clairement le fait que les progressions de géométrie des manuels de cycle 3 de cette collection se basent sur des travaux et résultats menés en didactique de la géométrie, comme par exemple Berthelot et Salin (1992), Houdement et Kuzniak (1999) (livre du maître, CM1, p. 40) :

> *La didactique de la géométrie évolue beaucoup depuis une vingtaine d'années. Nous nous sommes largement appuyés sur les travaux de recherche en ce domaine pour construire la progression que nous proposons sur ce thème dans la collection EuroMaths.*

En particulier (ib., p. 41) :

> *la progression* [celle que l'on retrouve en CE2, CM1 ou CM2] *que nous proposons sur les figures planes a pour but d'aider les élèves à passer d'une vision globale des figures […] à une vision plus locale. Les élèves sont amenés à envisager une figure plane comme constituée de lignes et de segments dessinés sur une feuille de papier […] et ayant certaines propriétés.*

Dans la description de cette progression, on retrouve les principales caractéristiques visées par une exploitation des problèmes de reproduction décrites précédemment : la recherche d'alignement de points, l'utilisation d'une bande de papier pour le report de longueur ou la recherche du milieu, l'utilisation de gabarit, le blocage des procédures de mesure, un jeu de juxtaposition-superposition des figures, *etc*. (ib., pp. 44-45) :

> *Les élèves sont ensuite conduits à repérer des alignements de points ou de segments dans différentes figures géométriques […] ; il s'agit d'accompagner les élèves à changer leur regard sur les figures géométriques. […] ; pour cela nous proposons de nombreuses activités de description, reproduction ou construction de figures au cours desquelles les élèves ont à analyser, émettre des hypothèses, les vérifier, les mettre en mots, les communiquer, les traduire par des tracés. […] ; nous conduisons les élèves à se familiariser avec des figures complexes composées de figures simples […] ; les figures proposées comportent des éléments qui sont nécessaires à leur construction mais qui ont été effacés et que les élèves doivent restaurer. […] ; nous avons choisi délibérément de faire reproduire de nombreuses figures en les agrandissant pour que l'analyse du modèle soit indispensable. […] nous souhaitons que les élèves restent dans le domaine de la géométrie et n'utilisent pas le mesurage et la proportionnalité.*

On relève ainsi de nombreuses leçons consacrées à la reproduction de figure (tableau 1, ci-après) ou proposant des problèmes de reproduction pour travailler d'autres savoirs géométriques explicitement visés (le cercle, les droites perpendiculaires, *etc*.).

Livre de l'élève CE2	Livre de l'élève CM1	Livre de l'élève CM2
« Reproduire des figures sur un quadrillage » p. 14	« Reproduire en décalquant » p. 11	« Analyser une figure pour la reproduire » p. 12
« Reproduire des figures : repérer des alignements » p. 26	« Alignements : restauration de figures » pp. 14, 16	« Décrire des figures pour les identifier ou les construire » p. 18
« Cercles » p. 30	« Distance de deux points et Cercles » pp. 38, 40	« Distance de deux points : cercle » p. 27
« Repérer le milieu d'un segment » p. 36	« Reproduire des angles » p. 57	« Triangles » p. 28
« Angles droits » p. 48	« Distance d'un point à une droite, droites perpendiculaires » p. 58	« Quadrilatères » p. 34
« Droites perpendiculaires, angles droits » p. 56	« Droites perpendiculaires et droites parallèles » p. 72	« Droites perpendiculaires et droites parallèles » p. 60
« Figures planes et polygones » p. 68	« Propriétés des polygones » p. 74	« Reproduction, restauration de figures » p. 73
« Construire des carrés, des rectangles » p. 85	« Reproduire des figures » p. 100	« Distance, milieu, cercle » p. 74
« Construire les figures usuelles sur divers supports » p. 98	« Figures : analyse et reproduction » p. 112	« Reproduire et construire des figures » p. 76
« Polygones usuels et figures complexes » p. 113	« Compléter une figure par symétrie par rapport à un axe » p. 156, 194	« Symétrie par rapport à un axe » « Axes de symétrie des figures usuelles » pp. 92-94 , 104
« Décrire et reproduire des figures complexes » p. 156		« Propriétés des triangles et des quadrilatères » p. 132
		« Problèmes pour apprendre à chercher : reproduire une figure » p. 135, 168
		« Reproduction de figures (Europe) » p. 202

Tableau 1 : Les leçons de *EuroMaths* (cycle 3, Hatier) proposant des problèmes de reproduction.

À titre d'exemple, dans le livre de l'élève de *EuroMaths* CE2 (pp. 30-31), on trouve la leçon intitulée « Cercles ». À la suite de la « Découverte », deux exercices sont proposés qui s'appuient sur des problèmes de reproduction pour travailler les propriétés du cercle (figures 14).

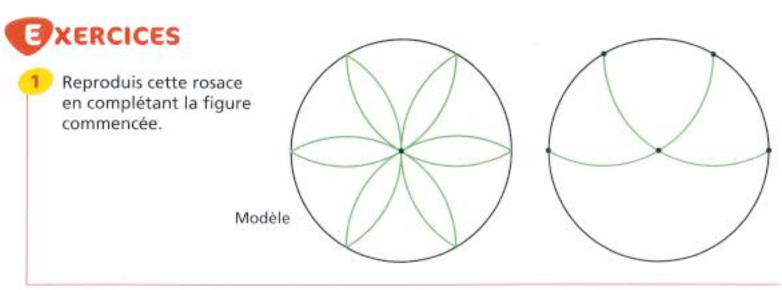


Figure 14a

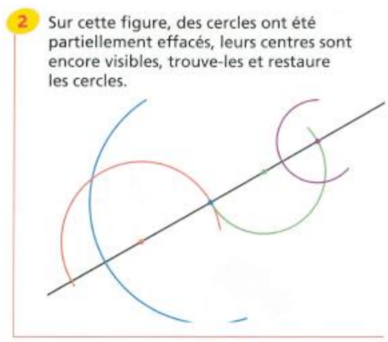


Figure 14b

Figures 14 : Extraits de *EuroMaths* CE2 (Hatier, 2009), pp. 30-31

On peut faire l'hypothèse que la fréquentation de ces types de problèmes pourrait faciliter à terme la dévolution du problème de la « rose des vents » (Figure 2). On peut même aller plus loin et faire l'hypothèse que les auteurs de *EuroMaths* font « fructifier » les travaux de recherche en didactique en particulier ceux liés aux problèmes de reproduction et de restauration. Et pour cause, rappelons que l'un d'entre eux n'est autre qu'un des auteurs de la brochure de l'Irem de Rouen (Ducel, Peltier 1986), citée précédemment. Si l'on procède à un examen plus large des problèmes de reproduction présents dans les manuels de la collection *EuroMaths* au Cycle 3 (cf. tableau 1), tout se passe comme si les auteurs cherchaient à instaurer un contrat spécifique lié à ce type de problème. En effet, les élèves sont préparés (et cela dès le cycle 2) à un vrai travail de visualisation des figures géométriques (visions complémentaires de juxtaposition et superposition), à repérer les milieux et les alignements de points (par prolongement de traits, etc.), à analyser la figure par ses relations, ses propriétés et les sous-figures qui la composent. Selon le niveau considéré, cela peut amener d'ailleurs l'enseignant à présenter les problèmes de reproduction selon un certain découpage qui prend en charge l'analyse de la figure (*« observer la figure »*, *« repérer les alignements ou les milieux »*, *« repérer les propriétés ou les sous-figures »*, voir figure 2 par exemple). Tout se passe donc comme si les auteurs visaient une décomposition stratégique de tous les « passages obligés » pour mettre en œuvre une déconstruction/reconstruction dimensionnelle de la figure dans le but d'éduquer *le regard géométrique* des élèves, au fil des étapes du manuel (et des années). Les variables didactiques exploitées pour y parvenir sont principalement les mêmes que celles décrites dans les parties théoriques précédentes (l'agrandissement des figures à reproduire pour évacuer le recours à la mesure, l'orientation non prototypique pour éviter les stratégies de visée, un jeu sur la juxtaposition/superposition de figures, choix de l'amorce, *etc*.).

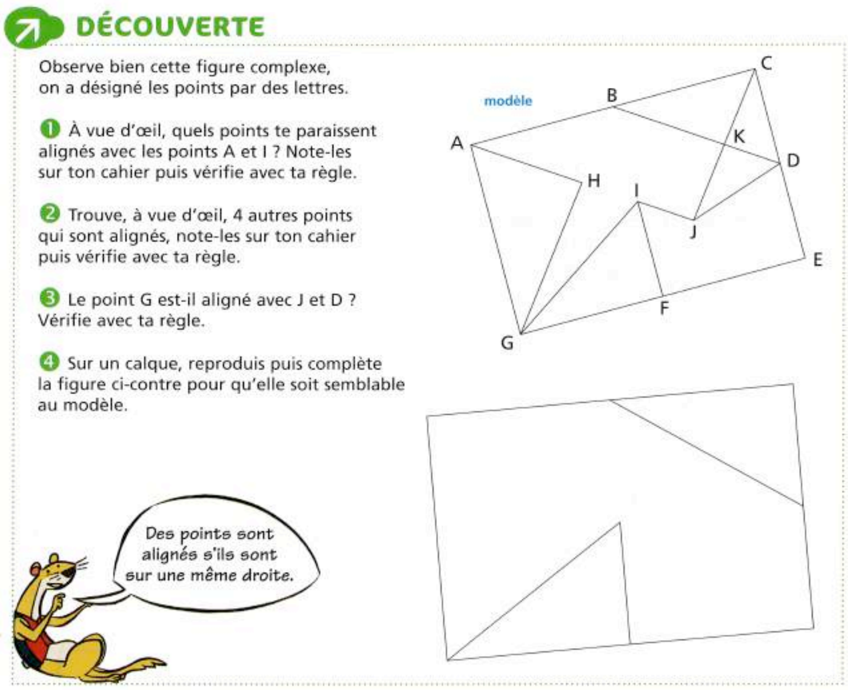


Figure 15 :Extrait de *EuroMaths* CM1 (Hatier, 2009), p. 16

À titre d'illustration, nous reprenons ici les objectifs relatifs à l'extrait de la p. 16 du manuel de CM1 (figure 15) annoncés dans le livre du maître (p. 62):

> *Pour reproduire une figure en plus grand, ou en plus petit, il faut l'analyser, c'est-à-dire repérer des alignements, des milieux, etc. Pour cela, il faut souvent intervenir sur la figure : joindre des points, prolonger des segments […] faire des hypothèses sur les positions de certains points, sur les éventuelles égalités de longueur, […] noter les résultats de cette observation fine non instrumentée — ce qui permet d'utiliser le vocabulaire adapté — puis […] vérifier leurs hypothèses avec les instruments. […] Une fois l'analyse bien menée, il est possible de restaurer la figure agrandie, c'est-à-dire la compléter avec les éléments manquants.*

Dans ce problème (figure 15), on relève un découpage en sous-tâches très guidées qui prennent en charge l'analyse de la figure. Les consignes sont fermées pendant la phase d'analyse mais ouvertes pendant la phase de construction. De la même façon, les instruments sont suggérés pendant la phase d'analyse mais non suggérés pour la phase de reproduction. Nous pourrions également remarquer que le codage de la figure n'est pas non plus à la charge de l'élève et nous pourrions faire l'hypothèse que cela est sans doute fait pour faciliter l'intervention de l'enseignant.

Il semble ainsi que les objectifs des progressions géométriques de *EuroMaths* rejoignent pleinement ceux des auteurs de Rouen et de Lille développés précédemment. En effet, ces objectifs s'inscrivent dans la continuité de ceux déjà reconnus dans la collection *Nouvel Objectif Calcul* des années 90 (voir partie 4) ; et même au-delà, puisque les guides pour l'enseignant font référence de façon plus explicite à un outillage didactique, plus développé sous l'influence des travaux de recherche déjà évoqués jusque là.

La collection *La tribu des Maths* (Magnard)

Dans les *Cahiers de géométrie*, proposés dans cette collection, outre les chapitres où le titre (et/ou sous-titre) indique explicitement la présence de problèmes de reproduction de figures planes (tableau 2, ci-dessous), ces derniers apparaissent aussi dans d'autres chapitres. Dans les intentions, les auteurs semblent en quelque sorte vouloir les faire fonctionner comme fil conducteur pour développer différents savoirs géométriques.

Dans le guide du maître correspondant au manuel de CM1, les auteurs précisent en effet que les problèmes de reproduction permettent de problématiser les tâches de description et de tracés de figures et de donner du sens aux travaux géométriques (p. 247). Toujours selon ces auteurs, ce type de problèmes aiderait en outre l'élève à passer progressivement des aspects techniques de la manipulation des instruments aux propriétés des figures qu'ils permettent de construire (p. 263).

Livre de l'élève CE2	Livre de l'élève CM1	Livre de l'élève CM2
1. Reproduction de figures (1) Je décris et je complète des figures pp. 10-11	1. Reproduction de figures (1) Je connais les propriétés du carré, du rectangle, du triangle pp. 4-7	1. Reproduction de figures (1) Je sais reconnaitre et tracer des quadrilatères pp. 4-7
9. Reproduction de figures (2) Je comprends la construction d'une figure pp. 26-27	2. Reproduction de figures (2) Je trouve le milieu d'un segment pp. 8-11	2. Reproduction de figures (2) J'utilise mes connaissances pour reproduire un cercle pp. 8-9
12. Cercle Je reproduis des figures en utilisant un compas pp. 32-33	3. Reproduction de figures (3) J'utilise la symétrie par rapport à une droite pp. 12-13	3. Reproduction de figures (3) Je connais les propriétés de la symétrie par rapport à un axe pp. 10-11
14. Reproduction de figures (3) Je reproduis une figure sur différents types de quadrillage pp. 36-37	4. Le cercle Je reproduis des figures en utilisant un compas pp. 14-15	4. Résoudre des problèmes (1) J'utilise des propriétés géométriques et j'apprends à reproduire à main levée pp. 12-13
16. S'entraîner à chercher J'observe et je reproduis des figures. J'utilise la symétrie pp. 40-41	6. S'entraîner à chercher J'observe et je reproduis des cercles pp. 18-19	15. Résoudre des problèmes (2) J'utilise les propriétés d'une figure pour la reproduire pp. 38-39

Tableau 2 : Les leçons de *La tribu des Maths* (cycle 3, Magnard) proposant des problèmes de reproduction

Pour les diverses figures proposées pour la reproduction, le support peut être du papier quadrillé ou uni. Elles sont parfois accompagnées d'une amorce : à la même ou une autre échelle, avec la même orientation que le modèle ou non. Le changement d'échelle semble être proposé pour faciliter le maniement des instruments pendant la reproduction du modèle et non pas pour éviter tout recours à la mesure. Lorsqu'elle est présente, l'amorce semble avoir plutôt fonction d'aide pour l'élève ; il s'agit souvent d'un élément supplémentaire du tracé qui devrait permettre à l'élève d'analyser plus facilement le modèle à reproduire. Cela semblerait être le cas, par exemple, de la figure 16 ci-dessous. Sans lui suggérer d'instruments, on demande à l'élève de compléter le dessin en lui conseillant implicitement de partir du carré tracé en pointillé à côté du modèle.

Figure 16 : Extrait du cahier de géométrie *La tribu des maths* CM1 (2009), p. 18

Il est déjà difficile de déconstruire la figure (qui est coloriée et appelle donc davantage une vision en 2D), et on oblige en plus l'élève à « voir » un élément supplémentaire bien précis. Sans prendre en compte l'aide fournie, l'élève pourrait pourtant percevoir un autre carré par lequel démarrer le tracé (cf. figure 16a). En outre, puisque rien n'est précisé sur l'échelle de reproduction, le carré fourni pourrait être exploité de deux manières différentes (figures 16b et 16c).

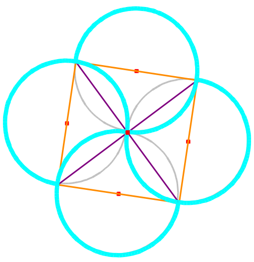


Figure 16a

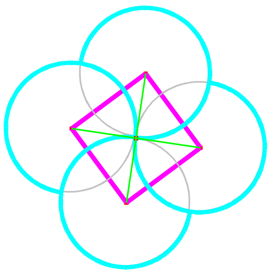


Figure 16b

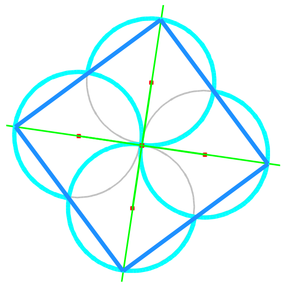


Figure 16c

Dans le guide du maître (p. 264), les auteurs soulignent la difficulté à repérer les centres des différents cercles mais ne fournissent aucune aide à l'enseignant sur ces différentes façons de « voir » la figure et les éléments qui permettent de la reproduire. Seule la solution de la figure 16c est proposée, ce qui ferme l'énoncé et ne donne aucun indice pour que l'activité en question soit réellement problématisée.

C'est aussi le cas de la figure 17, proposée toujours dans le cahier de géométrie de CM1 et accompagnée d'une amorce (un cercle, son centre et un point sur ce cercle) qui n'est pas à la même échelle que le modèle. Dans le guide du maître, on indique seulement que *« l'activité consiste à observer que la figure est une rosace à laquelle on ajoute un cercle reliant le haut des pétales et un hexagone à l'intérieur du cercle central »*. De même ici, l'enseignant n'est pas aidé dans l'analyse du problème : l'amorce peut être exploitée de différentes façons mais les indications fournies réduisent l'énoncé à une seule possibilité.

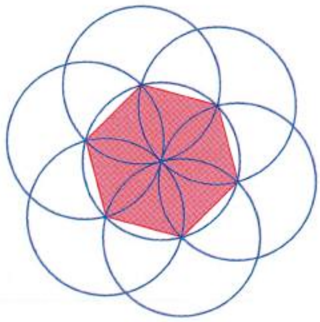


Figure 17 : Extrait du cahier de géométrie *La tribu des maths* CM1
(Magnard, 2009), p. 38

L'exercice relatif à la figure 17 est proposé dans le but d'inciter les élèves à observer attentivement le modèle et ainsi trouver les éléments nécessaires à sa reproduction[24]. Dans les différents guides du maître, les auteurs soulignent en effet à plusieurs reprises l'importance d'une observation rigoureuse dans le traitement de ce type de problèmes mais ils ne suggèrent à aucun moment à l'enseignant de faire travailler les élèves sur le modèle ou de le faire compléter par des tracés supplémentaires pour aller au-delà de ce qu'ils appréhendent perceptivement. En outre, les renvois aux instruments comme un moyen pour vérifier les propriétés de la figure-modèle sont presque inexistants ; ces derniers ne sont mobilisés que comme un moyen pour tracer des figures.

Malgré les intentions des auteurs de lier instruments, figures et savoirs géométriques et malgré la présence d'éléments qui sembleraient prendre en compte les travaux actuels sur la didactique de la géométrie (notamment ceux sur les problèmes de reproduction), on ne retrouve pas d'éléments d'analyse didactique pour que les enseignants puissent véritablement « donner du sens aux travaux géométriques » (livre du maître CM1, p. 247) : il nous semble que le risque est fort d'une récupération d'un discours en surface coupé de son contexte d'origine[25].

Conclusions et perspectives

Nous faisons le constat d'un foisonnement des travaux de recherche prenant appui sur les problèmes de reproduction des figures géométriques et d'une volonté de diffusion de ces travaux par différents canaux (publications, communications dans les colloques et dans la formation initiale et continue, en ligne, *etc*.). Toutefois, les traces des effets de ces tentatives de diffusion sont encore rares ou inégales dans les manuels scolaires, ce qui nous conduit d'ailleurs à avancer l'hypothèse qu'ils le sont également *a fortiori* dans les pratiques.

Nous expliquons en partie ce phénomène par une évolution différée, au cours de ces trente dernières années, entre les textes officiels et la recherche. Au niveau de la recherche, les travaux en didactique de la géométrie (et notamment ceux développant des problématiques en lien avec des problèmes de reproduction) n'ont cessé de se développer et de s'enrichir depuis les années 80 (Perrin-Glorian & Salin, 2010).

L'évolution « institutionnelle », que nous avons identifiée en analysant les textes officiels de ces trente dernières années, ne s'accompagne pas d'un véritable changement dans les ressources pédagogiques : soit ce type de problèmes était déjà mis en valeur (voir, par exemple, la collection *Nouvel Objectif Calcul*, Hatier), soit ils restent encore aujourd'hui des activités marginales.

C'est ce que nous avons essayé de mettre en évidence dans la dernière partie de notre texte en

[24] Les figures 9, 14a et 17 sont les mêmes. Le problème de reproduction de la figure 9 prend néanmoins tout son sens par rapport à un savoir bien identifié : la construction des sommets d'un triangle (équilatéral) à l'aide du compas.

[25] Nous faisons allusion ici aux risques de « transposition didactique » au sens de Chevallard (1991), repris et approfondis dans Arditi (2011).

montrant le positionnement contrasté entre deux collections de manuels d'aujourd'hui. Dans les deux, on retrouve des traces de cette diffusion des travaux issus de la recherche en lien avec les problèmes de reproduction, on y reconnaît des intentions communes concernant leur progression pour la géométrie au cycle 3 et un nombre important de problèmes de reproduction sont proposés comme objets d'étude mais aussi pour travailler d'autres savoirs géométriques (cf. tableaux 1 et 2). Pourtant, à travers la lecture des livres du maître des deux collections et l'analyse de certains problèmes extraits de ces manuels, nous constatons des engagements sensiblement différents : les auteurs de *EuroMaths* (Hatier) semblent chercher à outiller les enseignants pour qu'ils développent véritablement un contrat spécifique autour de ces problèmes alors que, dans *La Tribu des Maths* (Magnard)*,* certains points d'analyse cruciaux semblent rester dans l'implicite, en particulier à propos du jeu entre les différents types d'appréhension de la figure.

C'est pourquoi nous cherchons à mettre à disposition des enseignants un outillage facilitant l'exploitation du potentiel des problèmes de reproduction de figures géométriques à partir de l'existant. Créer les conditions favorables pour provoquer la nécessité d'analyser la figure-modèle en termes de déconstruction dimensionnelle (Duval 2005) et de propriétés de la figure (orthogonalité, alignement, milieux, parallèles, propriété d'incidence, *etc*.) nous semble être la clé de voûte des travaux de recherche menés depuis 1986 sur les problèmes de reproduction de figures planes. Nous retenons en particulier l'idée fondamentale que *« ce n'est pas tant la tâche de reproduction qui est importante que le type d'instrument choisi pour la reproduction »* (Duval & Godin, 2005, p. 13).

Les différentes analyses proposées dans l'article font émerger différents types de leviers (dont des variables didactiques) sur lesquels on peut agir pour viser une mise en œuvre idoine dans la classe, en fonction des objectifs d'apprentissage visés. Ces leviers, sans être exhaustifs, peuvent être de nature différente et concernent :

- la nature des figures et leur complexité (juxtaposition, superposition, *etc*.),
- les adaptations ou intermédiaires à la charge de l'élève (au sens de Robert (2004), comme l'ajout de tracés ou points supplémentaires),
- l'échelle (agrandissement-réduction de la figure modèle),
- le choix de l'amorce (et sa complexité),
- le support (feuille blanche, quadrillée, *etc*.),
- les contraintes sur les instruments mis à disposition,
- les positions relatives de la figure-modèle et de la figure-amorce.

Nous avons porté ici un regard critique sur certains extraits de la *Tribu Des Maths* mais dans Bulf et Celi (2015, à paraître), nous proposons des adaptations d'un problème présent dans cette collection (à partir des leviers précités), notre but étant d'exploiter certains potentiels didactiques qui nous semblent sous-estimés.

D'une certaine façon, notre travail a pour ambition de familiariser les enseignants avec les outils développés par la recherche, sans pour autant chercher à les communiquer de façon « totale » c'est-à-dire sans une nécessaire transformation pour qu'ils n'apparaissent pas coupés de leur contexte d'origine ou comme un discours prescriptif. En effet, à ce sujet, les récentes recherches de Mangiante (2013) et Mangiante-Orsola, Perrin-Glorian (2014) ont mis en évidence que l'appropriation des problèmes de restauration peut donner lieu à des adaptations galvaudées. En outre, nous n'ignorons pas certaines tensions (Briand & Peltier, 2010) et variabilités des pratiques (Arditi 2011 ; Arditi & Briand, à paraître) liées à la diffusion de travaux issus de la recherche dans les pratiques enseignantes.

La suite de ce travail nous amène à nous demander comment les différents travaux de recherche cités ici peuvent être mis au service de la construction d'une progression assurant une certaine continuité des apprentissages tout au long de l'école primaire, voire au début du secondaire, et soucieux de créer les conditions favorables pour exercer le regard géométrique des élèves. Les récentes publications (Perrin-Glorian & *al*., 2013 & Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014) posent des repères à cette fin. Le fil rouge mathématique que nous avons choisi ici (le cercle et le compas), nous a conduit à nous interroger sur l'organisation et les conditions d'apprentissage du cercle à l'école. En particulier, dans le prolongement des travaux précités, quelle progression est-il possible de penser pour enseigner et apprendre les propriétés du cercle depuis la maternelle et jusqu'au début du collège ? Quelle prise en compte et quelle dialectique des différentes conceptions du cercle au sens de Artigue et Robinet (1982) ? Quelle articulation des différents usages du compas (instrument permettant de tracer des cercles, de comparer et de reporter des longueurs) et caractéristiques du cercle (centre, rayon, diamètre) ?

C'est à ces questions que nous nous sommes intéressées en guise de prolongement de ce travail. Et, toujours dans la perspective de développer des outils efficaces pour l'enseignant, c'est-à-dire que ce dernier pourrait facilement s'approprier et faire vivre dans sa classe, nous avons fait le choix original de construire une progression, sur l'enseignement et l'apprentissage des propriétés du cercle, à partir d'une seule et même figure-modèle, en adaptant le choix des instruments mis à disposition et en jouant sur les variables didactiques citées dans cette conclusion. Ceci constitue donc l'horizon de notre recherche à suivre.

Références bibliographiques

ANSELMO B., BRACONNE-MICHOUX A. & GROS D., ZUCCHETTA H. (2014), G*éométrie plane du cycle 3 au collège*, IREM de Lyon.

ARDITI S. (2011), *Variabilité des pratiques effectives des professeurs des écoles utilisant un même manuel écrit par des didacticiens*, Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

ARDITI S. & BRIAND J. (2015), Regards croisés de chercheurs, auteurs de manuels et formateurs. Utilisation effective d'un manuel scolaire par des professeurs des écoles. Pistes pour la formation, *Actes du 41e Colloque de la Copirelem*, Mont de Marsan 2014.

ARTIGUE M. & ROBINET J. (1982), *Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire*, Recherche en Didactique des Mathématiques, 3.2, 5-64.

BARRIER T., HACHE C. & MATHÉ A.-C. (2014a), Décrire l'activité géométrique des élèves : instrument, regard, langage, *Actes du 40e Colloque de la Copirelem*, Nantes 2013.

BARRIER T., HACHE C. & MATHÉ A.-C. (2014b), Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves, *Grand N*, 93, 13-37.

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.

BERTHELOT R. & SALIN M.-H. (1993), L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, 53, 39-56.

BOULEAU N. (2001), Reproduction et géométrie en cycle 1 et 2, *Grand N*, 67, 15-32.

BROUSSEAU G. (1987), Didactique des mathématiques et questions d'enseignement : propositions pour la géométrie, *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*, vol. 1/2, 69-100.

BRIAND J. & PELTIER M.L. (2010), Le manuel scolaire : carrefour de tensions mais aussi outil privilégié de vulgarisation des recherches en didactique des mathématiques, *Actes du 36e Colloque de la Copirelem*, Auch 2009.

BULF C. & CELI V. (2015), Des problèmes de reproduction aux problèmes de restauration : quelles adaptations pour la classe ?, *Actes du 41e Colloque de la Copirelem*, Mont de Marsan 2014.

CELI V. & PERRIN-GLORIAN M.-J. (2014), Articulation entre langage et traitement des figures dans la résolution d'un problème de construction en géométrie, *Spirale — Revue de Recherches en Éducation*, 54, 151-174.

CHEVALLARD, Y. (1991), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* suivi de *Un exemple de la transposition didactique*, La Pensée Sauvage.

COPIRELEM (2003), *CONCERTUM : Carnets de route de la COPIRELEM, dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques*, ARPEME.

DUCEL Y. & PELTIER M.-L. (1986), *Géométrie. Une approche par le dessin géométrique au CM2*, IREM de Rouen (Université de Rouen).

DUVAL R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM*, 17, 121-138.

DUVAL R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.

DUVAL R. & GODIN M. (2005), Les changements de regards nécessaires sur les figures, *Grand N*, 76, 7-27

DUVAL R., GODIN M. & PERRIN GLORIAN M.-J. (2004), Reproduction de figures à l'école élémentaire, *Actes du séminaire national de Didactique des Mathématiques de l'ARDM*, Ed. Irem de Paris 7.

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/actes_seminaire_national_de_didactique/Actes%20du%20S%C3%A9minaire%20National%20de%20Didactique%202004.pdf

FREGONA D. (1995), *Les figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques*, Thèse de doctorat Université de Bordeaux I.

GODIN M. & PERRIN M.-J. (2009), De la restauration de figure à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître, *Actes du 35e Colloque la Copirelem*, Bombannes, 2008.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (1999), Géométrie et paradigmes géométriques, *Petit x*, 51, 5-22.

KESKESSA B., PERRIN-GLORIAN M.J. & DELPLACE J.R. (2007), Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, 79, 33-60.

LABORDE C. & CAPPONI B. (1994), « Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique », *Recherche en Didactique des Mathématiques* 14, pp. 1, 2, 165-209.

MANGIANTE C. (2013), Une étude du processus d'appropriation par des enseignants de situations produites par la recherche pour l'enseignement de la géométrie, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM*, Irem Paris 7.

http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/97/26/56/PDF/actes_sem_2013.pdf

MANGIANTE-ORSOLA C. & PERRIN-GLORIAN M.-J. (2014), Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des Maîtres, *Grand N*, 94, 47-83.

PARZYSZ B. (1988), « Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures », *Educational Studies in Mathematics* 19, 1, 79-92.

PERRIN-GLORIAN M.-J. & GODIN A. (2014), De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés, *Math-École*, 222, Numéro Spécial sur la géométrie (version papier).

PERRIN GLORIAN M.-J., MATHÉ A.C. & LECLERCQ R. (2013), Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ?, *Repères-IREM*, 90, 5-41.

PERRIN-GLORIAN M.-J. & SALIN M.-H. (2010), Didactique de la géométrie : peut-on commencer à faire le point ?, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM*, année 2009, 47-81.

POLYA G. (1967), *La découverte des mathématiques*, tome 2, DUNOD, Paris.

ROBERT A. (2004), Une analyse de séance de mathématiques au collège, à partir d'une vidéo filmée en classe. La question des alternatives dans les pratiques d'enseignants. Perspectives en formation d'enseignants, *Petit x*, 65, 52-79.

SALIN M.-H., CLANCHE P. & SARRAZY B. (2005), *Sur la Théorie des Situations, Questions, réponses, ouvertures. Hommage à Guy Brousseau*, Grenoble : La pensée Sauvage.

VENANT F. & VENANT P. (2014), La technologie au service d'une situation-problème : exemple de la rosace à huit branches, *Grand N*, 93, 59-91.

WINDER GUILLE-BIEL C. (2014), Étude d'une situation de reproduction de figures par pliage en cycle 2 : le PLIOX, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Volume 19, 103-128.

Liste des ouvrages scolaires (livres du maître et livres de l'élève) et ressources institutionnelles cités dans l'article :

BLANC J.-P., BRAMAND P., LAFONT E., MAURIN C., PEYNICHOU D. & VARGAS A. (2013), *Pour comprendre les Maths CM2*, Hachette, Paris.

BOURHIS-LAINE F., DEBAILLEUL A., HELAYEL J., LENOIR E., TRÈVE G. & VINCENT J.-F. (sous de direction de THÉVENET) (2009), *Maths CM2*, Bordas, Paris.

CHAMPEYRACHE G., FATTA J.-C., STOECKLÉ D. & RUYER F. (1998), *Math Élem CM2*, Belin, Paris.

CHAMPEYRACHE G., FATTA J.-C., STOECKLÉ D. & RUYER F. (1997), *Math Élem CM1*, Belin, Paris.

CHAMPEYRACHE G., FATTA J.-C., STOECKLÉ D. & RUYER F. (1996), *Math Élem CE2*, Belin, Paris.

DEMAGNY C., DEMAGNY J.-P., DIAS T. & DUPLAY J.-P. (2008), *La tribu des Maths CE2*, Magnard, Paris.

DEMAGNY C., DEMAGNY J.-P., DIAS T. & DUPLAY J.-P. (2008), *La tribu des Maths CM1*, Magnard, Paris.

DEMAGNY C., DEMAGNY J.-P., DIAS T. & DUPLAY J.-P. (2008), *La tribu des Maths CM2*, Magnard, Paris.

EILLER R. (1980), *Math et Calcul CM1*, Hachette, Paris.

PELTIER M.-L., BIA J. & MARECHAL C. (1995), *Nouvel objectif calcul CM1*, Hatier, Paris.

PELTIER M.-L., BIA J. & MARECHAL C. (1996), *Nouvel objectif calcul CM2*, Hatier, Paris.

PELTIER M.-L., CLAVIER C. & GAUCH A.-M. (1995), *Nouvel objectif calcul CE2*, Hatier, Paris.

PELTIER M.-L., BRIAND J. NGONO B. & VERGNES D (2009), *EuroMaths CM1*, Hatier, Paris.

PELTIER M.-L., BRIAND J., NGONO B. & VERGNES D. (2009), *EuroMaths CM2*, Hatier, Paris.

PELTIER M.-L., BRIAND J., NGONO B.& VERGNES D. (2010), *EuroMaths CE2*, Hatier, Paris.

MEN (2002), *Documents d'accompagnement des programmes, Mathématiques, École Primaire*, Scéren CNDP.

MEN (2002), *Documents d'application des programmes, Mathématiques, cycle 2*, Scéren CNDP.

MEN (2002), *Documents d'application des programmes, Mathématiques, cycle 3*, Scéren CNDP.

MEN (2008), *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire*, BO n° 3, 19 juin 2008.