LA *GÉOMÉTRIE INTUITIVE* DE EMMA CASTELNUOVO

Valentina CELI
ESPE d'Aquitaine – Université de Bordeaux

Résumé. En 1948, Emma Castelnuovo publie la première édition de sa *Geometria intuitiva*, ouvrage scolaire qu'elle déclare avoir écrit en s'inspirant des *Éléments de géométrie* d'Alexis Claude Clairaut (1741). Après avoir évoqué quelques aspects caractérisant l'ouvrage de Clairaut, nous rendons hommage à Emma Castelnuovo en parcourant quelques-unes de ses pages consacrées à l'enseignement de la géométrie pour des élèves de onze à quatorze ans.

Mots clés. Emma Castelnuovo, Alexis Claude Clairaut, géométrie élémentaire, polygones articulés.

Abstract : In 1948, Emma Castelnuovo published the first edition of her *Geometria Intuitiva*; a school textbook inspired, as she explicitly declares, by Alexis Claude Clairaut's Éléments de Géométrie (1741).
After having focused some of the characteristic proposals in the Clairaut's work, we pay homage to Emma Castelnuovo analyzing some of her pages devoted to the teaching of geometry to pupils 11-14 aged.

Key-words. Emma Castelnuovo, Alexis Claude Clairaut, elementary geometry, articulate polygons.

Introduction

En guise d'introduction, laissons la parole à Emma Castelnuovo, qui répond à la question : comment apprendre la géométrie ?

> Quand, en 1945, j'ai commencé à enseigner régulièrement, je me suis rendu compte que le cours de géométrie n'intéressait pas [...] il ne donnait aucune motivation. Juste à cette période-là, j'ai eu l'occasion de lire un livre français, un livre écrit en 1741 par le mathématicien français Alexis Claude Clairaut et intitulé *Éléments de géométrie*. Dans la préface, il dit qu'il est évident que les personnes rencontrent de grandes difficultés en ce début rationnel. Il est convaincu qu'il faut démarrer avec quelque chose de concret. Il porte alors l'attention sur la réalité qui nous entoure, à savoir sur l'intérêt que l'on peut avoir en calculant le périmètre et l'aire d'un champ. Je me suis alors rendue compte que le cours de géométrie pour les élèves de onze à quatorze ans devait s'inspirer de la réalité […] J'ai donc donné aux élèves […] un matériel très simple qui conduisait à construire. Avec cette construction, on se rendait compte de la très grande différence qui existe, d'un point de vue technologique, entre un triangle, par exemple, et un carré […] On se rend compte, en se promenant dans la rue, que tous les échafaudages pour la construction d'édifices ou d'autres choses ont une base triangulaire. C'est le triangle qui aide, non pas le rectangle ou le carré car ils glissent entre les mains et changent de forme. (Castelnuovo, 2009).

À partir de ce qu'elle observe dans ses classes, l'ouvrage de Clairaut est pour Emma Castelnuovo une source d'inspiration, un point de départ pour mener bien plus loin ses réflexions sur l'enseignement de la géométrie dans le secondaire. Convaincue que, pour intéresser les apprenants, il faut partir du concret et leur permettre de manipuler des objets physiques, elle poursuit ainsi :

> Quel matériel peut être utilisé pour motiver les élèves dans l'étude de la géométrie ? Un matériel qu'ils peuvent construire eux-mêmes. Des bandelettes en carton, munies de trous aux extrémités, peuvent s'accoler en faisant passer dans les trous des attaches parisiennes. On aperçoit alors une grande différence, à savoir que le triangle que l'on manipule est figé, même en essayant de le bouger, il ne bouge pas. Alors que le carré, construit de la même manière, bouge entre nos mains. En se promenant dans la rue, on s'aperçoit alors que les échafaudages sont toujours constitués de triangles [...] Tout cela, on ne le voyait pas avant, c'est-à-dire que on le voyait mais on ne l'observait pas. D'une observation de plus en plus riche, d'autres problèmes naissent […] La géométrie devient […] constructive. (Castelnuovo, 2009)

Nous avons ici sélectionné des écrits d'Emma Castelnuovo publiés entre 1946 et 1962 : leur contenu permet de saisir en quoi Clairaut a contribué au développement de ses idées et de caractériser ainsi son point de vue personnel sur l'enseignement de la géométrie pour des élèves de onze à quatorze ans. Le lecteur pourra alors retrouver des réflexions qui sont encore loin d'être partagées dans la réalité de l'enseignement ainsi que des questions qui demeurent encore d'actualité.

Afin de mieux comprendre le lien qui existe entre ces deux personnalités, nous présentons d'abord quelques éléments caractérisant l'œuvre de Clairaut.

Les *Éléments de géométrie* d'Alexis Claude Clairaut

Alexis Claude Clairaut (1713-1765) est un scientifique précoce. À l'âge de treize ans, il présente un mémoire de géométrie à l'Académie des Sciences et il en devient membre cinq ans plus tard, grâce à une dérogation spéciale par rapport aux limites d'âges prévus dans le règlement. Géophysicien et mathématicien, il ne s'intéresse pas seulement aux mathématiques mais aussi à la manière de les enseigner : selon Boyer (1983), ses *Éléments de géométrie* (1741) et ses *Éléments d'algèbre* (1746) font partie d'un projet didactique visant l'amélioration de l'enseignement des mathématiques de son époque.

Comme il l'indique bien dans la préface de son ouvrage sur la géométrie (Clairaut, 1920), Clairaut veut intéresser et éclairer les *commençants* en leur proposant non pas d'apprendre un savoir figé et abstrait, comme c'est d'usage dans les traités ordinaires de géométrie, mais de construire un savoir en réponse à des problèmes concrets[1].

Il est persuadé que les obstacles rencontrés par les apprenants sont le plus souvent d'origine didactique (Brousseau, 1998). On procède selon l'ordre logique qui régit le discours mathématique ; afin de *sauver la sécheresse, naturellement attachée à l'étude de la Géométrie*, des auteurs font parfois suivre les propositions théoriques par des exemples pratiques. Ainsi faisant, ils ne facilitent pourtant pas son apprentissage :

> […] car chaque proposition venant toujours avant son usage, l'esprit ne revient à des idées sensibles qu'après avoir essuyé la fatigue de saisir des idées abstraites. (Clairaut, 1920).

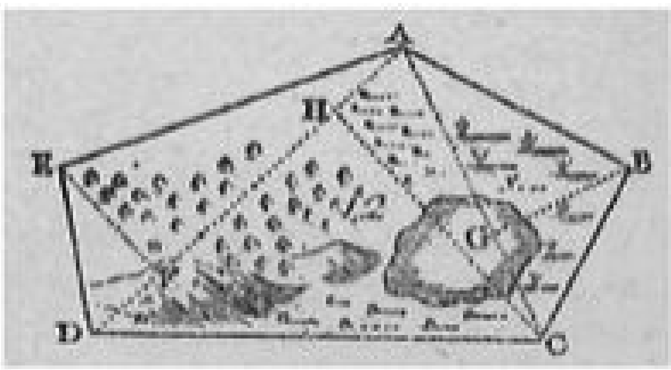
1 Dans la note biographique de l'édition de 1920, l'éditeur indique que cet ouvrage doit son existence au désir que la marquise du Châtelet avait d'apprendre des notions fondamentales de cette discipline.

Il faut à la fois *intéresser et éclairer* les débutants, dit Clairaut : en rappelant que la géométrie s'est développée par étapes et a été inventée pour répondre à des besoins de la société, à des exigences de la vie pratique, l'auteur remonte à ses origines et propose de suivre *une route semblable à celle des premiers Inventeurs* afin d'*encourager ceux qui pourraient être rebutés par la sécheresse des vérités géométriques, dénuées d'applications*.

En concevant le savoir mathématique comme un processus et non pas comme un produit (Barbin, 1991), il s'éloigne ainsi des traités ordinaires et ses choix donnent lieu à un ouvrage qui traite seulement les résultats essentiels de la géométrie : d'une part, il ne démontre pas ce qui paraît évident aux yeux ; d'autre part, il ne privilégie que les propositions utiles pour résoudre des problèmes concrets.

Des questions d'arpentage lui servent alors de prétexte *pour faire découvrir les principales vérités géométriques*. Pour cela, il propose de suivre un chemin visant à accoutumer *l'esprit à chercher et à découvrir* : après avoir traité des questions sur la mesure de longueurs, de distances et d'aires, il enchaîne sur des questions de distances accessibles et inaccessibles et poursuit avec d'autres questions analogues afin de parvenir à présenter les aspects les plus intéressants d'une géométrie problématisée (Barbin, 1991). Il manifeste ainsi sa désapprobation pour les auteurs qui n'occupent pas leurs lecteurs à résoudre des problèmes, élément pour lui essentiel afin de faire acquérir *l'esprit d'invention*.

Dans cette présentation magistrale et ostensive du savoir géométrique, le micro-espace s'articule avec un méso-espace évoqué (Berthelot & Salin, 1993) ; visant à construire ce savoir en partant de problèmes concrets, les questions posées suggèrent une problématique spatio-géométrique[2].



Extrait de Clairaut (1920), p. 24

En effet, les polygones sont des murs à tapisser, des enclos de maison à élever et des champs dont on veut avoir la *mesure* ; les droites parallèles sont tracées pour construire des remparts, des canaux, des rues ; le triangle devient nécessaire lorsqu'il s'agit de

2 « Nous nommons spatio-géométrique la modélisation de l'espace par des connaissances issues du savoir géométrique. Cette modélisation d'un espace s'accompagne la plupart du temps de représentations de cet espace dans l'espace d'une feuille de papier, représentations qui conservent une partie plus ou moins importante des propriétés de l'espace représenté (schéma, croquis, dessins, plans, etc..) » (Berthelot & Salin, 2001).

mesurer l'étendue de terrains qui ne sont pas rectangulaires ; les triangles isométriques et puis semblables arrivent lorsque les terrains que l'on voudrait trianguler présentent un obstacle (par exemple, un bois ou un étang, …) qui empêche *qu'on ne mène les lignes dont on aura besoin*. Sans doute à cause de son esprit avant-gardiste, ce traité ne semble pas avoir eu tout de suite le succès espéré. Voltaire, contemporain et ami de Clairaut, déclare :

> Cette méthode paraît agréable et utile mais elle n'a pas été suivie ; elle exige chez le maître une flexibilité d'esprit qui sait se proportionner et un agrément rare dans ceux qui suivent la routine de leur profession. (cité dans Castelnuovo, 1959a).

Au siècle suivant, l'ouvrage attire néanmoins l'intérêt de la *noosphère* de l'époque et devient un texte scolaire[3]. Dans une édition parue chez Hachette, Saigey (1852) s'occupe de réaménager le texte de Clairaut en l'adaptant *aux indications des nouveaux programmes officiels sans autre changement que la substitution des nouvelles mesures aux anciennes* ; chez l'éditeur Jules Delalain, Regodt (1853) publie une édition mise en accord avec le système décimal et recommandée *par le Ministère de l'Instruction Publique pour l'enseignement de la géométrie dans les lycées*[4].

L'œuvre de Clairaut a donc su traverser le temps et est encore appréciée de nos jours. Barbin (1991) montre entre autres que les propos de cet auteur sont encore d'actualité car, comme dans les prescriptions officielles relatives à la scolarité obligatoire et libellées au cours de ces trente dernières années, ils suggèrent un enseignement qui part de problèmes et construit le savoir géométrique en structurant la réalité. Et encore Étienne Ghys, membre de l'Académie des Sciences, lors de la séance publique consacrée au tricentenaire de Clairaut qui a eu lieu l'an dernier, présente l'ouvrage géométrique de cet auteur comme étant *un petit bijou qui pourrait nous inspirer aujourd'hui, alors que l'enseignement de la géométrie est en pleine crise* (Ghys, 2013).

Et, dans les années 1940, ce *petit bijou* conforte les idées d'Emma Castelnuovo à propos de l'enseignement d'une discipline qui, déjà à son époque, soulevait maintes questions.

La *géométrie intuitive* d'Emma Castelnuovo

En 1948, Emma Castelnuovo publie *Geometria intutiva*, un manuel scolaire à l'intention d'élèves de onze à quatorze ans et de leurs enseignants. Ce texte connaît d'autres éditions dont les deux dernières (1988 et 1998) ont été revisitées avec l'aide de deux collègues, Carla Degli Espositi et Paola Gori, afin de prendre en compte l'évolution du monde des jeunes avec lesquels l'auteure n'était plus en contact direct depuis son départ à la retraite.

Mais comment le projet développé dans ce manuel est-il né ? Quelles sont les idées fondatrices de ce projet ? Pour répondre à ces questions, nous avons retracé le développement des idées d'Emma Castelnuovo à travers ses publications à propos de la géométrie dans l'enseignement secondaire.

3 Pour montrer que l'intérêt porté à cet ouvrage dépasse assez vite les frontières, nous signalons que des traductions en italien sont parues au fil du temps dont celle de 1771 aux éditions Monaldini.

4 cf. http://gallica.bnf.fr/ pour feuilleter les éditions de 1753, 1852 et 1853 (consulté la dernière fois le 10 juillet 2014).

D'une méthode descriptive à une méthode constructive

En 1881, le Ministre de l'Instruction Publique Guido Baccelli propose d'introduire, dans l'enseignement secondaire italien, un cours de géométrie à caractère empirique. Ce nouveau cours doit précéder le cours traditionnel de géométrie *rationnelle*[5], le seul préconisé jusque-là par les concepteurs des programmes scolaires de l'époque. Ces concepteurs sont des insignes mathématiciens qui considèrent les mathématiques comme un moyen pour exercer les facultés rationnelles et non pas comme un savoir utile et applicable aux besoins de la vie réelle :

> […] on ressentit le besoin de faire précéder cours traditionnel de géométrie rationnelle par un cours de géométrie *expérimentale* ou *constructive* ou *intuitive* (cette dernière étant la dénomination de 1881 et d'aujourd'hui). Cette étude devait avoir le but d'introduire l'enfant dans le monde géométrique à travers un ensemble d'observations, d'expériences, de constructions suggérées par le monde réel […] (Castelnuovo, 1958a).

Cette proposition est révoquée trois ans plus tard à cause des difficultés rencontrées pour caractériser les contenus d'un cours de géométrie intuitive. Ce cours est réintroduit en 1900 : les prescriptions officielles précisent alors qu'il faut se limiter à aborder les notions élémentaires relatives au vocabulaire des figures géométriques simples, aux règles de calcul des longueurs, des aires et des volumes ainsi qu'aux rudiments du dessin géométrique (cf. Menghini dans Giacardi & Zan, 2013).

Jean Piaget (cité par Castelnuovo, 1959b) confortera plus tard cette orientation car, d'après ses théories, ce n'est que *vers les quatorze ans que l'adolescent élabore petit à petit un mécanisme formel fondé sur des structures logiques*. Mais, lorsqu'elle commence à exercer son métier d'enseignante auprès d'élèves de onze à quatorze ans, la jeune Emma Castelnuovo constate vite que rien n'a vraiment changé depuis l'introduction du cours de géométrie intuitive voulu par le Ministre Baccelli :

> […] Mais l'influence des prescriptions antérieures … fit en sorte que [...] le cours de géométrie intuitive se distinguât de celui-ci [le cours de géométrie rationnelle] seulement dans le sens de remplacer les démonstrations logico-déductives par des preuves expérimentales à réaliser par le dessin ou à l'aide de matériel. Il est ainsi arrivé jusqu'à nous sans aucune modification déterminante. Le cours avait, et a en général, un caractère *descriptif* et non pas *constructif* ; il s'agit d'un cours *statique* […]. (Castelnuovo, 1958a).

En entrant dans ses classes, elle prend vite conscience que les obstacles rencontrés par les élèves dans le cours de géométrie sont d'origine didactique mais aussi et d'abord ontogénétique (Brousseau, 1998) :

> Le professeur et sans doute les programmes exigent de la part de l'élève un effort d'abstraction et une compréhension de la rigueur qui ne peuvent pas être toujours saisis par un enfant […] la rigueur mathématique est un besoin de l'esprit que l'on ne peut pas comprendre tout d'un coup et qui se rattache étroitement à l'âge mental (Castelnuovo, 1950b).

5 Une géométrie qui n'aborde que des problématiques géométriques au sens de Berthelot & Salin (2001).

Malgré l'institution d'un cours de géométrie qui a pour but de donner des bases concrètes à l'organisation axiomatique de cette discipline, qu'il s'agisse d'un cours de géométrie intuitive ou de géométrie rationnelle, les manuels scolaires proposent la même progression :

> L'ordre suivi est exactement celui du cours rationnel ; le professeur connaît le pourquoi de cet ordre, l'élève l'ignore puisque c'est l'enchaînement des démonstrations qui explique cet ordre et que cet enchaînement, dans son ensemble, ne lui est pas expliqué. (Castelnuovo, 1950a).

Le risque est fort de proposer un cours de géométrie rationnelle édulcoré. Et, si l'on apporte des modifications en se limitant à remplacer les démonstrations par des preuves pragmatiques, le cours demeurera descriptif et statique.

Comme le pédagogue Pestalozzi, Emma Castelnuovo (1959a) conçoit le terme *intuitif* comme synonyme de *constructif* et non pas dans un sens contemplatif, lié à l'origine étymologique du verbe *intueri* (regarder dedans, regarder avec attention). D'où son orientation vers une méthode constructive et un abandon de toute méthode descriptive qui était toutefois davantage répandue dans l'enseignement de l'époque.

Selon Emma Castelnuovo (1950a), il ne faut pas oublier que *le développement historique de la géométrie est un travail actif à travers les siècles.* Elle envisage son cours de géométrie intuitive comme un lieu où l'élève participe au plaisir de la découverte et au travail accompli par l'humanité dans la recherche mathématique.

Et voici alors que ses idées rejoignent celles de Clairaut qui, deux siècles auparavant, proposait déjà de ne pas mettre dans les mains d'un débutant un produit fini mais de lui fournir les moyens pour suivre le processus qui a lentement conduit à une organisation axiomatique du savoir géométrique. Et pour cela, il faut remonter à la source et se poser les questions mêmes qui sont à l'origine de la géométrie, telles que la suivante : comment calculer l'aire d'un champ ?

Comme dans l'ouvrage du mathématicien français, Emma Castelnuovo est alors persuadée que la théorie de l'équivalence des surfaces est le chapitre le plus pertinent et naturel pour démarrer son cours de géométrie.

Mais, en suivant le développement historique, si Clairaut lui suggère la manière d'inverser l'ordre de présentation des contenus, il lui restera toutefois à étudier comment donner un caractère dynamique à ses leçons.

Le dessin géométrique et ses origines

Comme nous l'avons indiqué plus haut, dans les *Éléments* de Clairaut. les objets réels sont modélisés pour résoudre des problèmes : des champs, des murs, des enclos, etc. Mais ces objets sont statiques et, comme l'espace qui les contient, sont uniquement évoqués par l'auteur et représentés par des dessins :

> Le dessin sert à l'auteur pour présenter telle ou telle figure et, par conséquent, pour dégager une définition à partir de la construction graphique. Présentées de cette façon, les figures de Clairaut sont toujours immobiles et l'une ne se rattache à l'autre que par l'observation statique de quelque propriété qu'elles ont en commun, tout à fait comme cela se trouve dans les éléments d'Euclide (Castelnuovo, 1959a).

Emma Castelnuovo envisage autrement le passage progressif du concret vers l'abstrait, la signification qu'elle attribue au terme *concret* la conduit à l'associer au terme *dynamique*. Et pour justifier son point de vue, en suivant les principes qu'elle partage avec Clairaut, elle remonte plus loin jusqu'à parvenir à la préhistoire. À l'époque néolithique, l'Homme sort des cavernes, il commence à construire ses habitations et ses outils, ses dessins stylisés sont proches des dessins géométriques. Les dessins géométriques de l'Homme apparaissent depuis la préhistoire, à une époque où celui-ci commence à construire, et ses tracés schématisent ce qu'il construit matériellement : le triangle pour un toit, le disque pour une roue, etc. :

> […] c'est juste la construction d'un objet qui porte à une analyse beaucoup plus profonde que la seule observation du même objet fait par autrui. La construction, en effet, suppose d'abord la connaissance (et la reconnaissance) des éléments fondamentaux de l'objet […] elle fait comprendre que tous les éléments d'un objet n'ont pas la même valeur. Une telle constatation conduit à cette mentalité […] qui porte à représenter un tout seulement par quelques traits, à styliser. (Castelnuovo, 1959a)

Selon Barbin (1991), les savoirs ne peuvent parfois prendre sens que dans des situations non mathématiques. Emma Castelnuovo va chercher en dehors des mathématiques les raisons de ses choix didactiques futurs. C'est ainsi qu'ell modifie quelque peu le projet de Clairaut et choisit de débuter son cours de *géométrie intuitive* par un chapitre sur la manipulation d'un matériel, dans le but d'aider l'élève à fixer graphiquement les diverses images créées et ainsi l'encourager à étudier des figures déjà connues à l'école primaire en changeant son regard sur celles-ci. Elle ne veut pas remplacer les démonstrations rigoureuses mais, au contraire, conduire les élèves à ressentir la nécessité de la généralisation d'une propriété découverte en manipulant concrètement des objets de nature géométrique (Castelnuovo, 1959c).

Du matériel manipulable pour aller du concret vers l'abstrait

Emma Castelnuovo envisage alors de distribuer à chacun de ses élèves du matériel mobile, par exemple des pièces de meccano ou un mètre de menuisier[6] :

> [...] c'est, en effet, la mobilité qui attire l'attention de l'enfant et qui le conduit du concret à l'abstrait, car ce n'est pas le matériel qui est l'objet de son attention mais plutôt sa transformation, une opération donc qui, étant indépendante du matériel même, est abstraite. À notre avis, le matériel provoque l'inspiration […] pour la formation opératoire. (Castelnuovo, 1958b).

Nous reconnaissons ici une allusion à Piaget (1956) qui attribue à l'action sur les objets physiques un rôle fondamental pour que l'enfant puisse parvenir à combiner différentes opérations. Le lien avec la réalité se fera après coup car ce n'est qu'à l'issue de ces activités de manipulation qu'Emma invitera ses élèves à chercher ces figures ailleurs : par exemple, le triangle comme l'élément clé pour que les échafaudages soient stables ; ou bien, le parallélogramme articulé pour connecter entre elles les roues des vieilles locomotives ; ou encore, le cadre de la fenêtre traversée par le soleil qui se transforme en parallélogramme quand on observe son ombre.

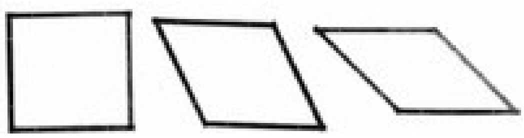
6 En 1961, en s'appuyant sur les travaux d'Emma Castelnuovo, la maison d'édition La Nuova Italia met en vente une mallette contenant du matériel pour la construction et l'étude de polygones articulés. Nous reprenons ici quelques images contenues dans le livret accompagnant ce matériel.

Nous présentons ci-après quelques activités proposées à des élèves de onze et douze ans, la première portant sur le triangle, les autres permettant de parvenir à une classification des quadrilatères particuliers.

On distribue aux élèves un certain nombre de pièces de meccano de longueurs différentes et en faisant en sorte que le choix de certaines pièces ne permette pas d'obtenir un triangle. On leur demande de construire des triangles et de noter tout ce qu'ils peuvent observer. Dans cette activité, les élèves pourront découvrir que le triangle est une figure indéformable et que l'on peut le construire seulement si la longueur de tout côté est plus petite que la somme des longueurs de deux autres côtés. Ce sont les cas impossibles qui conduiront à l'idée de la construction d'un triangle à l'aide du compas (Castelnuovo, 1958a).

En poursuivant le travail, on propose aux élèves de manipuler quatre pièces de meccano de même longueur :

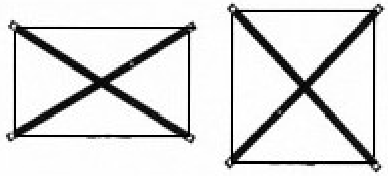
> […] l'élève construira le carré mais il se rendra vite compte que la figure qu'il manipule est articulée […] le carré bouge et peut se transformer en un losange. C'est ainsi que plusieurs problèmes surgissent, ils ne seraient pas surgis en comparant deux dessins. On observe, dans la transformation, que certains éléments changent et d'autres ne changent pas […] la position réciproque des diagonales ou la somme des angles mènent à caractériser cette famille de quadrilatères […].



Quadrilatère articulé

Sans oublier que l'on peut s'intéresser à la relation entre le périmètre et l'aire des quadrilatères de cette famille, cette activité pourrait aussi conduire les élèves à s'intéresser à la somme des longueurs des diagonales du losange pour croire que *ce qui est perdu par une diagonale est gagné par l'autre* !

La construction du losange à l'aide de la règle et du compas pourra se déduire de celle du triangle isocèle que l'on aura apprise auparavant. À son tour, cette construction suggérera une méthode pour construire deux droites perpendiculaires car il suffira de tracer les diagonales du losange pour les obtenir[7] (Castelnuovo, 1959c).



Une famille de rectangles

7 La construction d'un losange suggère aussi la construction de la droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné mais, dans son manuel, Castelnuovo (1959c) ne fait pas ce lien.

Et puis, on fournit deux pièces de meccano de même longueur, articulées en leur milieu et une bande élastique passant par les extrémités libres des pièces de sorte à former le contour d'un rectangle (cf. images ci-dessus) : on demandera aux élèves de construire une famille de rectangles avec les mêmes diagonales, cela dans le but de faire le lien avec le carré.

On pourra encore proposer aux élèves de manipuler quatre pièces de meccano deux à deux de même longueur afin d'étudier le rectangle et le parallélogramme et compléter enfin ce travail en leur proposant deux pièces de meccano de même longueur, articulées en leur milieu et une bande élastique passant par les extrémités libres des pièces de sorte à former le contour d'un parallélogramme, cela dans le but d'étudier le lien entre ce dernier et le losange.

Dans tous les cas, c'est l'étude des cas limites qui fait que le matériel se *dématérialise* et la transition du concret vers l'abstrait commence à se réaliser (Castelnuovo, 1958a).

Quelques cinquante ans plus tard Offre, Perrin-Glorian et Verbaere (2006) ont observé que, dans l'usage des instruments, des élèves de fin de CM2 :

> […] mettent en place des procédures économiques permettant d'obtenir des tracés satisfaisants à l'œil sans relier l'usage des instruments aux propriétés géométriques sous-jacentes. Les difficultés dans l'utilisation des instruments semblent ainsi plutôt résider dans la capacité à isoler une propriété géométrique dont l'instrument est porteur que dans l'habileté motrice que réclame leur usage.

En commençant par un travail sur des objets manipulables, cette séquence semble suggérer une façon non ostensive d'introduire les instruments de dessin géométrique qui permettrait peut-être de relier l'usage des instruments aux concepts géométriques.

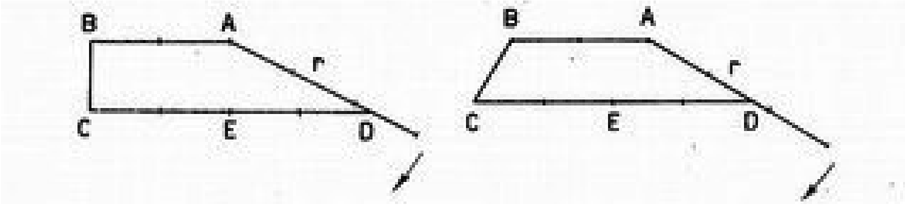
Pour étudier encore les quadrilatères particuliers, on peut fournir aux élèves un mètre de menuisier avec dix barres en leur demandant de disposer ces barres de façon à obtenir successivement certaines figures et d'écrire leurs observations lors des différentes manipulations (Castelnuovo, 1957).

Mètre pliant du menuiser

1) Un losange dont chaque côté est une barre du mètre pliant. Qu'arrive-t-il si l'on incline également deux barres opposées en les laissant parallèles ?

2) Un parallélogramme ayant deux côtés opposés de deux barres et les deux autres d'une barre. Qu'arrive-t-il si l'on incline également deux barres opposées en les laissant parallèles ?

3) Un trapèze rectangle en disposant les barres comme on voit ci-dessous à gauche. Ayant fixé la position des barres [AB], [BC], [CD], faire tourner la barre *r* autour de A dans le sens indiqué et décrire les différentes figures qu'on obtient.



Deux trapèzes construits avec le mètre pliant du menuisier

4) Un trapèze quelconque en disposant les barres comme on voit dans la figure ci-dessus à droite. Ayant fixé la position des barres [AB], [BC], [CD], faire tourner la barre *r* autour de A dans le sens indiqué et décrire les différentes figures qu'on obtient.

Selon Emma Castelnuovo (1957), c'est pour répondre à la troisième et la quatrième question que les élèves rencontrent le plus de difficultés, cela peut-être à cause du manque de symétrie dans la succession des figures. Mais, une fois les difficultés surmontées, outre à reconnaître le cas du rectangle et puis celui du parallélogramme, l'élève ainsi « accroché » ne laissera pas échapper le cas où l'on obtient un triangle qui sera alors considéré comme un cas particulier de trapèze. L'étude de ce cas limite sera aussi utile pour découvrir que la formule de calcul de l'aire du trapèze contient en soi celle du triangle.

En guise de conclusion

Innovateurs chacun à son époque, Emma Castelnuovo et Alexis Claude Clairaut ont en commun une même conception épistémologique des mathématiques : ils considèrent ce savoir non pas comme le produit d'un discours organisé mais comme un processus qui se construit à partir d'une problématique et qui prend du sens dans des pratiques (Barbin, 1991). Ceci a sans doute eu une influence majeure dans leur manière de concevoir l'enseignement et l'apprentissage de cette discipline.

Mais ils ne vivent pas à la même époque et, par conséquent, les influences de la société, de l'école et de la pédagogie ne sont pas les mêmes pour ces deux personnalités.

Lorsqu'il parle de problèmes concrets, Clairaut les associe à des objets de la vie réelle, ces objets étant toutefois simplement évoqués dans ses discours. Pour Emma Castelnuovo, en revanche, un problème concret consiste à mettre d'abord dans les mains de ses élèves des objets physiques et à leur poser des questions en les sollicitant à noter tout ce qu'ils observent lors de la manipulation ; c'est après ce travail qu'elle leur demande d'observer le monde qui les entoure pour reconnaître autrement les figures étudiées.

Clairaut est un scientifique et l'élève qui ouvrira son livre n'a pas d'âge défini, on sait seulement qu'il s'initie à la géométrie élémentaire. Alors qu'Emma Castelnuovo est une professeure et enseigne à des élèves qui ont entre onze et quatorze ans et qui partagent un même espace, leur salle de cours. Ses élèves ont fréquenté l'école primaire et, notamment au début de sa carrière, ils n'appartiennent pas tous à la même classe sociale, certains d'entre eux ne poursuivront même pas leurs études au-delà des quatorze ans.

Dans Celi (2005), nous parlions d'*empreinte euclidienne* en signifiant par là que nous avons emprunté à Euclide non seulement un savoir mais aussi un exemple de style et de méthode pour le transmettre. Des analyses que nous avons menées nous conduisent à affirmer que cette empreinte ne semble pourtant pas favoriser une présentation des contenus en réponse à des problèmes.

Clairaut a eu le grand mérite d'avoir encouragé Emma Castelnuovo à ne pas succomber à cette empreinte euclidienne mais à établir un ordre nouveau dans la programmation de son enseignement de la géométrie. Les sources d'inspiration pour développer ses idées novatrices sur la manière d'enseigner cette discipline sont toutefois, d'après nous, à chercher ailleurs. Issue d'une famille de scientifiques, l'engagement de son père et de son oncle dans la recherche et dans l'enseignement a certainement été un exemple constructif[8]. Son intérêt pour les théories pédagogiques qui se développaient à l'époque où elle commençait à enseigner ainsi que les échanges qu'elle entretenait régulièrement avec ses collègues, italiens et étrangers, ont aussi joué un rôle fondamental dans l'enrichissement de ses réflexions. Et surtout, Emma Castelnuovo a su mettre l'élève au centre de ses préoccupations en repérant ce qui ne l'intéresse pas et ses difficultés, et en cherchant alors ce qui peut solliciter sa curiosité.

Références

BARBIN, E. (1991), Les éléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée, *Repères IREM*, 4, Topiques éditions, 119-133.

BERTHELOT R., SALIN M.-H. (1993), L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, 53, IREM de Grenoble, 39-56.

BERTHELOT R. SALIN M.-H. (2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège, Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ?, *Petit x,* 56, 5-34.

BOYER C. B. (1990), Storia della matematica, Oscar Mondadori.

BROUSSEAU, G. (1998), Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique (http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/09/74/PDF/Brousseau_1998_obstacles_problemes_et_ingenierie.PDF, consulté le 10 juillet 2014).

CASTELNUOVO E. (1946). Un metodo attivo nell'insegnamento della geometria intuitiva. Periodico di Matematiche, 24-IV, 263-269.

CASTELNUOVO E. (1950a), La géométrie intuitive dans l'enseignement italien, *Cahiers Pédagogiques*, 5, 161-164.

CASTELNUOVO E., (1950b), Les erreurs des maîtres d'après nos collègues italiens, *Cahiers Pédagogiques*, 5, 192.

CASTELNUOVO E. (1957), Réactions d'élèves devant les classifications géométriques, *Mathematica & Paedagogia*, 10

CASTELNUOVO E. (1958a), Basi concrete in un primo insegnamento della geometria, *Archimede*, X, 90-97.

8 Son père, Guido Castelnuovo, a été l'une des personnalités clé des mathématiques au début du 20e siècle en Italie ; avec Francesco Severi et Federigo Enriques, son oncle, il a développé des recherches dans le domaine de la géométrie algébrique.

CASTELNUOVO E. (1958b), L'Objet et l'action dans l'enseignement de la géométrie intuitive, dans Gattegno et al., *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques*, Neuchâtel: Delachaux & Niestlé, 41-59.

CASTELNUOVO E. (1959a), Le bases intuitives de l'axiomatique en géométrie, *L'enseignement des sciences,* I(3), 21-24.

CASTELNUOVO E. (1959b), Didattica della geometria, *Ricerche didattiche*, 54, 213-217.

CASTELNUOVO E. (1959c), *Geometria intutitiva*, La Nuova Italia Editrice.

CASTELNUOVO E. (1962), L'insegnamento della geometria intuitiva, *Cultura e scuola,* 3, 199-205.

CASTELNUOVO E. (1966), La via della matematica : la geometria, La Nuova Italia Editrice.

CASTELNUOVO E. (1979), La Matematica : *La Geometria,* La Nuova Italia Editrice.

CASTELNUOVO E. (2009), Come imparare la geometria ?, Treccani.it, l'enciclopedia italiana (www.treccani.it/webtv/videos/Int_Emma_Castelnuovo_come_imparare_la_geometria.jsp consulté le 10 juillet 2014).

CELI V. (2005), Une comparaison de l'enseignement de la géométrie dans le secondaire en France et en Italie, *Revue Canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies,* 5-3, 377-399.

CLAIRAUT A. C. (1920), *Éléments de géométrie*, Gauthier-Villars et Cie éditeurs.

GHYS E. (2013), Les « éléments de géométrie » de Clairaut : une manière moderne d'enseigner la géométrie ?, Tricentenaire de Clairaut, mathématicien et géophysicien, Séance publique de l'Académie des Sciences du 14 mai 2013 (http://www.academie-sciences.fr/video/v140513.htm, consulté le 10 juillet 2014).

GIACARDI L., ZAN R. (2013), Emma Castelnuovo. L'insegnamento come passione, *Rivista della Unione Matematica Italiana,* VI-1.

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.-J., VERBAERE O. (2006), Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Grand N*, 77, 7-34 et Petit x, 72, 6-39.

PIAJET J., BOSCHER B., CHATELET A. (1956), *Avviamento al calcolo*, La Nuova Italia.