HOMMAGE À EMMA CASTELNUOVO (ROME, 1913-2014) … suite ...

Merci, Emma !

Annie BERTÉ
IREM de Bordeaux

Ce texte s'inspire de celui que j'ai écrit à la suite de mon invitation au séminaire de Cenci[1] *(Ombrie, Italie) de septembre 2013, séminaire spécial en l'honneur des cent ans d'Emma. Je raconte ici ma première rencontre avec Emma et nos collaborations successives en faisant ainsi transparaître l'influence de ses idées sur ma conception des mathématiques et de leur enseignement.*

Quelle salutaire bouffée d'oxygène dans mon travail dès l'instant où j'ai rencontré Emma en 1976 ! J'enseignais les mathématiques depuis 1969 selon les programmes français à Niamey, dans l'enseignement secondaire nigérien. J'avais 33 ans, j'en ai 70 aujourd'hui et pendant toutes ces années j'ai puisé sans cesse dans ce qu'elle m'a donné. Retraitée, je travaille toujours avec un groupe de professeurs du secondaire en France, à l'IREM de Bordeaux, et ce qu'Emma m'a apporté me sert encore. Je veux vous parler de ce que j'ai pu faire soit avec elle, soit sans elle, mais encore grâce à elle, pour lui dire un très grand : merci Emma !

C'est en Belgique que je l'ai vue pour la première fois, lors d'une Rencontre de la CIEAEM à Louvain la Neuve. Je suis restée un long moment devant les panneaux d'une exposition faite par ses élèves. Une idée s'imposait à mon esprit : elle devait venir à Niamey pour que les élèves et les professeurs nigériens profitent eux aussi de ce qui était pour moi une ouverture extraordinaire, en fait une révolution. Ce n'est pas du tout parce que les enfants africains ont davantage besoin de *concret* que les jeunes Européens pour apprendre les mathématiques comme je l'ai entendu maintes fois. Les Africains et les Européens, noirs ou blancs, ont la même tête. Bien sûr, direz-vous, il y a le langage. Mais les élèves et les professeurs nigériens avaient appris le français à l'école depuis leur plus jeune âge, sans doute aussi bien que mon père, petit paysan en France en 1930 et qui ne parlait pas français à la maison, même si la syntaxe de son patois était plus proche du français que le haoussa ou le djerma. Les leçons de mathématiques en français ne paraissaient pas plus difficiles et étrangères aux élèves nigériens que les études de littérature ou d'histoire française qu'on leur demandait, plutôt moins je crois. Si je souhaitais la venue d'Emma à Niamey, c'était parce que ses idées étaient bonnes pour tous les élèves du monde. Mais Emma m'intimidait, et je n'ai pas osé l'aborder pendant toute cette Rencontre.

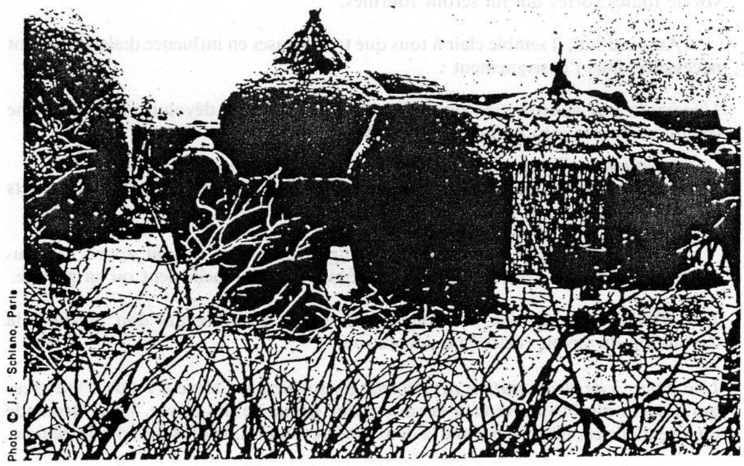
Heureusement, cet été là, après la rencontre CIEAEM, suivait le grand ICME à Karlsruhe. Car je l'ai retrouvée et, cette fois-ci, j'ai eu l'audace de lui parler de Niamey et de l'inviter nous rendre visite. Elle a tout de suite accepté et sa première venue au Niger, pendant une semaine de décembre 1977, a pu se réaliser sur invitation de l'IREM de Niamey. Emma a donné une conférence devant les professeurs de mathématiques du secondaire de la capitale, tous français qui, étonnamment, n'ont guère apprécié. La toile élastique a particulièrement suscité des réflexions désagréables. Ce n'était pas ce qu'ils

1 Pour plus des détails sur ce groupe de travail, cf. LANCIANO N. (2013), L'Officina Matematica, *La mathematica nella societa e nella cultura*, *Rivista della Unione Matematica Italiana*, Bologne p. 113

avaient appris dans leurs études sur les transformations affines. En revanche elle a fait des leçons dans les classes, une dans un collège de Niamey et d'autres dans de petites villes voisines et les élèves, eux, ont tout à fait apprécié. A ma grande surprise, chaque fois, à la fin de la leçon, ils disaient en quittant la salle : « *Merci, Madame* », ce que je n'avais jamais entendu dans une classe venant d'élèves aussi jeunes.

Je voulais vraiment qu'Emma revienne au Niger pour que son exemple entre dans les têtes, y compris dans la mienne. Elle était d'accord pour revenir à Niamey à condition d'enseigner quinze jours dans une classe (les enseignants pouvant observer s'ils le souhaitaient) et terminer par une exposition avec les élèves. Cette fois-ci, son séjour à Niamey a été possible grâce à l'UNESCO. Fin 1978, elle a enseigné quinze jours dans une classe de collège selon l'emploi du temps normal de mathématiques, puis réalisé une exposition avec les élèves sur la base de ce qu'ils avaient appris avec elle. Inutile de dire qu'il y a eu quelques grincements de dents, non seulement de la part de l'enseignant français professeur de mathématique dans la classe qui avait peur de perdre du temps dans le déroulement de son programme, mais aussi de la part du Directeur nigérien de l'enseignement secondaire au Ministère de l'Éducation, ex- professeur de mathématique du secondaire, venu voir l'exposition.

Par chance, le directeur du collège, nigérien lui aussi, ancien professeur de mathématique et syndicaliste, était très satisfait de l'expérience. Ainsi Emma a pu revenir l'année suivante, toujours grâce à l'UNESCO, et reprendre les mêmes élèves pour une autre exposition. Pour cette exposition, qui traitait des transformations affines et de la proportionnalité, nous avions trouvé des feuilles d'une plante, sorte d'euphorbe, assez grasse pour ne pas se dessécher trop vite. Emma m'ouvrait les yeux sur ce que je côtoyais tous les jours sans le voir comme les cases rondes et les greniers à mil cylindriques, qui n'étaient pas le signe d'une civilisation inférieure à celles qui construisent des parallélépipèdes.



Cases et greniers à mil, de **forme ronde** visible dans toute l'Afrique du Sahel

J'avais amené le nécessaire pour que les élèves d'une classe de 6e d'un collège de Niamey mesurent leur taille et celle de leur tête. Ils étaient ravis car la plupart d'entre eux ne connaissaient pas leur taille, personne ne les ayant mesurés. Ils ont été très surpris de constater que la hauteur de la tête était la même pour les plus grands et les plus petits, la même aussi pour les filles et les garçons, alors que plusieurs garçons avaient conjecturé à l'avance que les filles auraient des têtes plus petites. Je leur ai fourni des statistiques sur les mensurations d'enfants de différents pays et ils m'ont dit alors, très contents : « Nous avons la même grosseur de tête que les Européens donc nous pouvons tout faire comme eux ! ». Oui, même raisonner dans l'abstrait.

Et regardez cette poupée ashanti[2] destinée à faire naître des bébés dans les familles : dans l'art, quand la proportionnalité n'est pas respectée, on obtient un effet saisissant.

Tout le matériel des expositions était trouvé sur place car Emma ne pouvait pas amener grand-chose dans l'avion. Elle amenait tout son matériel pour travailler dans une toute petite valise, toujours avec elle, au cas où le bagage se perdrait s'il allait en soute. La première exposition avait pour titre : « Les coniques ». Nous avons couru toutes les deux dans Niamey pour chercher un abat-jour cylindrique que j'ai ensuite gardé longtemps. Certaines réactions ont été violentes. Quel scandale de parler de coniques au collège ! Nous avions quand même quelques soutiens, notamment de la part de Michel et Marie-Françoise ROY, très bons mathématiciens de Rennes, qui étaient arrivés à l'Université de Niamey en 1981.

Lorsqu'en 1982 Emma a pu revenir à Niamey, j'ai obtenu une Land-Rover de l'Université avec un chauffeur pour l'amener sur les pistes en compagnie de Marie-Françoise et moi. Emma a fait des leçons dans des collèges très loin de Niamey, jusqu'à Agadez, près du massif de l'Aïr où la pollution occasionnée par l'exploitation de l'uranium par la France ne s'était pas étendue comme aujourd'hui. Dans ce collège, nous avons été accueillies très courtoisement par un professeur de mathématiques touareg, qui est resté tout à fait impassible derrière son voile en voyant arriver ce trio féminin et blanc, assez improbable dans ce lieu. Au sujet de l'Aïr, Emma avait déjà attiré mon attention sur cette photo qui se trouvait au Musée de Niamey. Il s'agit d'une gravure rupestre datant de l'époque où le Sahara était habité. Le dessinateur avait tenu à rendre la symétrie du char.

2 Il s'agit d'un peuple du Ghana. Ce type de sculpture en bois se trouvait facilement sur le marché de Niamey. On la trouve aujourd'hui un peu partout en France, à l'étal des vendeurs africains sur les marchés.

Le char des fresques de l'Aïr

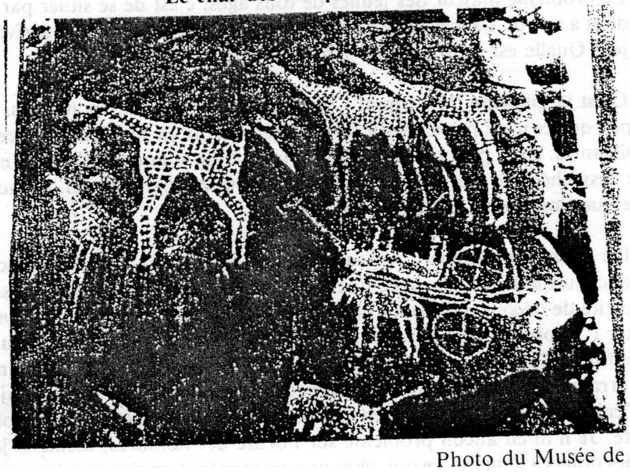


Photo du Musée de Niamey

Lorsque Marie-Françoise et Emma allaient découvrit les lieux, je profitais pour avoir des moments de détente. Et c'est ainsi que, curieusement, ce voyage dans l'Aïr reste associé pour moi au problème de la boîte sans couvercle qu'Emma proposait aux élèves bien avant qu'il se retrouve en abondance dans les manuels français actuels (cf. Annexe). Car c'est bien pendant un de ces moments de repos que j'ai trouvé une interprétation physique du fait que le volume maximal n'est pas celui du cube. C'est là que je me suis rendu compte, en observant mieux le développement au premier ordre de la fonction au voisinage d'un point, que ce volume maximal se produit quand l'aire de la base est précisément égale à la surface latérale. Ce n'était certes pas une grande découverte… mais cela éclairait bien la variation du volume. Je pouvais ainsi expliquer aux professeurs que le maximum se produit pour le volume quand la différence entre ce que l'on gagne et ce que l'on perd est minimale. Comme pour la variation de l'aire du rectangle de ficelle d'Emma (cf. Annexe). Bon résultat à faire découvrir aux élèves et, pour les professeurs, je pouvais ajouter l'écriture formelle de l'analyse.

J'avais appris qu'il faut toujours, pour la formation des enseignants français, mettre le doigt sur les liens entre nos « petites » mathématiques et leurs études universitaires abstraites. Par exemple, pour convaincre mes collègues réticents de Niamey de l'adéquation de la toile élastique matérialisant les transformations affines, j'ai dû les faire revenir à la recherche des vecteurs propres d'une matrice 2×2 et leur montrer qu'on peut se ramener à des valeurs propres réelles en composant avec une rotation. Emma m'a apporté de nombreuses idées pour faire travailler les élèves, les étudiants, les enseignants, sur des programmes allant de l'école élémentaire jusqu'au début de l'université et j'ai pu ainsi continuer seule dans cette voie.

En octobre 1983, j'ai pris un poste à Bamako, pour enseigner les mathématiques à l'Ecole Normale Supérieure (E.N.Sup.) de cette ville ; mes étudiants venaient d'obtenir un baccalauréat scientifique du même niveau que l'examen français et avaient été sélectionnés pour entreprendre des études universitaires durant quatre ans dans le but de devenir professeurs de mathématiques. J'ai passé deux années magnifiques à Bamako sur le plan professionnel avec plusieurs collègues enseignants de mathématiques maliens qui appréciaient ce que je faisais et des étudiants sérieux et merveilleux. A l'occasion d'un anniversaire important à Bamako, le gouvernement a demandé une participation à l'E.N.Sup. J'ai proposé à mes étudiants de fabriquer une exposition sur le thème : « Soleil et mathématiques ».

J'avais gardé cette idée en moi depuis Niamey, grâce à Emma. L'exposition a eu un succès énorme et le Président du Mali lui-même est venu s'en faire expliquer le contenu par mes étudiants. Comme nous traitions des ombres, il est resté perplexe devant l'ombre d'une mosquée. Nous avions un petit miroir parabolique pour expliquer le principe de la cuisinière solaire. Les femmes vont de plus en plus loin couper du bois et doivent transporter les fagots sur la tête pour leur cuisine. C'est une source de grande fatigue pour elles et cela participe à la déforestation. Nous avions écrit : « *le soleil nous amène la sécheresse et la mort* ». Mais si nous savions l'utiliser, il pourrait nous donner de l'énergie, donc la vie. Nous avons montré, au Président, la néphroïde, caustique du miroir circulaire. Il n'en avait jamais vu autant dans une casserole…. Et c'est une demoiselle à la tête bien faite qui, après lui avoir demandé de regarder dans la casserole, l'a informé sur l'équation de la courbe.

L'année suivante, en 1984, j'ai dû rentrer en France pour des raisons familiales et de santé. Avec des élèves des trois niveaux de lycée, travaillant ensemble, nous avons réalisé une exposition. La première s'intitulait « Mathématiques et phénomènes de croissance » et l'autre « Pythagore », l'année suivante dans un autre lycée. A propos de la poupée ashanti associée aux mensurations des enfants, qu'Emma m'avait appris à regarder, nous avions écrit que dans l'art négro-africain, comme dans d'autres arts venus d'ailleurs, l'homme se transforme en transformant la nature, et ainsi il devient humain. Valoriser les civilisations arabes et africaines est fondamental dans les classes en France, pays colonisateur où prospère le rejet de l'émigré. Ces deux expositions devaient beaucoup à l'enseignement d'Emma. Dès 1985, j'ai animé des stages de formation d'enseignants et j'ai dirigé un groupe de professeurs de collège et de lycée à l'IREM de Bordeaux.

Ces expositions et ces stages m'ont permis de recruter à l' IREM des collègues de différents établissements dont j'avais pu mesurer la motivation, indispensable car les moyens matériels qu'on leur donnait pour travailler dans un groupe pendant leurs moments libres étaient dérisoires. C’est toujours le cas, en pire. Les enseignants peuvent rester dans le groupe le nombre d’années qu’ils veulent, certains sont restés un an, d’autres dix, voire davantage. Pendant plusieurs années le groupe s’appelait « Mathématiques et réalités », puis il est devenu « Didactique des mathématiques dans l’enseignement secondaire » et c’est encore son appellation aujourd’hui.

En France, en milieu universitaire, la recherche en didactique des mathématiques s’était développée, initiée dans les années 1970 à Bordeaux et à Paris, pour l’enseignement élémentaire, et refusait ce que faisait Emma. Pendant que j’étais à Niamey, j’avais préparé et soutenu une thèse en didactique des mathématiques à Paris et j’ai continué à m’instruire en arrivant à Bordeaux. J’ai appris beaucoup de choses de la didactique des mathématiques française. J’ai pu les transmettre à mes collègues, après en avoir retenu le meilleur, passé au filtre de l’expérience dans les classes. J’ai ainsi démarré en France en m’accommodant d’une schizophrénie didactique, qui s’est arrangée depuis, dans une heureuse synthèse que notre groupe actuel pratique très bien.

Emma est venue à Bordeaux deux fois. En 1990 elle a parlé notamment de fractals à des étudiants en mathématiques de deuxième année d’université qui voulaient être enseignants et suivaient un module de « pré- professionnalisation » dont j’avais la charge. Grâce à un des collègues du groupe IREM, qui enseignait en Dordogne[3], département où se trouve la fameuse grotte de Lascaux, Emma a fait une conférence dans sa ville. Marie-Françoise l’a également invitée à Rennes pour une conférence. Comme je l’avais constaté avec l’exemple d’Emma, fréquenter quelques années un ou deux « vrais » mathématiciens est important pour ceux qui s’occupent d’enseignement des mathématiques. Des idées suffisamment simples au départ pour des élèves, mais en fait très profondes, sont excellentes pour apporter du sens tout au long des études.

En France, chaque fois que j’assurais une formation d’enseignants, que ce soit un stage court de quelques jours avec des professeurs ou que ce soit un module pour des étudiants, je m’organisais pour donner au moins une heure de cours devant eux, dans une vraie classe, avec des élèves. En voyant Emma enseigner j’avais beaucoup appris moi-même, et compris que l’exemple est irremplaçable pour amener un enseignant à changer sa méthode. C’est bien le moins que celui qui prétend dire aux autres comment enseigner, montre lui-même comment il met ses conseils en pratique. Le petit matériel (ficelle, papier découpé, élastiques) qu’Emma m’a appris à utiliser en classe a cette vertu d’être un objet réel certes mais si épuré qu’on peut modéliser facilement cette réalité, et faire très vite des mathématiques sans risquer de bloquer les élèves comme certaines évocations de la vie de tous les jours peuvent le faire. C’est excellent pour démarrer une leçon. C’est ce que les didacticiens appellent une situation didactique : un problème mis en situation dans un contexte tel que les élèves peuvent prendre immédiatement en charge le problème. Les didacticiens disent alors que les conditions de la dévolution du problème aux élèves sont bonnes.

Quant à l’évocation de la « vraie » réalité, les élèves sont immédiatement intéressés quand ils voient que cela les concerne eux, profondément, en tant qu’êtres humains, quels que soient leurs problèmes familiaux et leur condition sociale. C’était le cas quand je mesurais les tailles des élèves nigériens, mais c’est aussi le cas si le professeur traite

3 Il s’agit de Joël BRELY, qui était à cette date en poste au Lycée Bertran de Born à Périgueux.

de la suite exponentielle avec la division de la cellule au début de la vie, ou le temps de doublement d'une somme en banque qui ne dépend pas de la somme initiale … et tant de choses que j'ai associées pour la première fois au cours de mathématiques dès les années 1980 et cela grâce à Emma.

De sorte que ce que nous faisons dans mon groupe IREM fondé en 1985 n'est toujours pas démodé en France où pourtant les programmes ont été complètement bouleversés depuis cette date [4]. Grâce à Emma, nous avons franchi les décennies sans une ride et nous sommes encore en avance. Grâce à Emma, enfin, j'ai retrouvé le ressort profond qui m'avait fait tant aimer les mathématiques dans mes études : elles me parlaient de l'infini. J'avais été émerveillée de découvrir l'infini des nombres ou les branches de l'hyperbole qui me faisaient passer d'un infini à l'autre d'un seul coup, en franchissant le zéro.

J'ai retrouvé avec Emma la spirale logarithmique qui s'enroule vers son point asymptote, aussi fascinante que les fractals avec leur homothétie interne à l'infini. J'ai donné récemment à mes collègues et à des étudiants futurs enseignants cette photo du tombeau de Bernoulli[5]. Il est écrit : « *transformée je renais, semblable à moi-même* ».

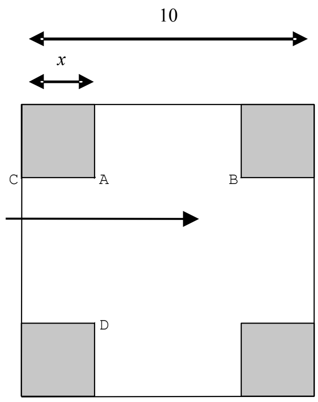
En nous transmettant ton savoir ma chère Emma , tu renais un peu dans nous tous, tes élèves. Avec ton nom, nous le transmettons à notre tour. Certes il est transformé, mais l'esprit demeure.

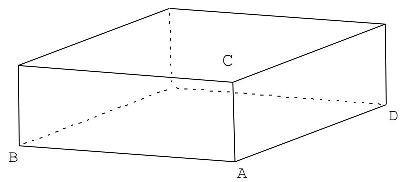
4 J'ai pu fonder ce groupe grâce à Guy DUMOUSSEAU, professeur de mathématiques en lycée à Bordeaux, qui animait un groupe IREM. Il connaissait et appréciait le travail d'Emma qu'il avait pu voir lors des Rencontres de la CIEAEM. Il a demandé à ce que je lui succède à l'IREM de Bordeaux après son départ à la retraite.

5 J'ai découvert cette photo dans CASTELNUOVO E. & BARRA M. (1980), *La mathématique dans la réalité*, Editions CEDIC, Paris. (traduction française de l'édition italienne publiée par Boringhieri en 1976.

ANNEXE. La boîte sans couvercle en relation avec la ficelle[6]

Le problème de la boîte





Chaque élève réalise une boîte à partir d'un carré de papier de côté 10 cm dans lequel il découpe aux quatre coins des carrés de côté x.

Ces boîtes ont-elles toutes le même volume ?

Aujourd'hui, en 2014, ce problème se trouve dans de nombreux manuels scolaires français, souvent à titre de simple exercice, mais quand Emma Castelnuovo me l'a transmis, en 1978, il n'était absolument pas connu. Et encore aujourd'hui, en France, les professeurs l'utilisent en général mal en classe car sa richesse est méconnue.

Le problème de la ficelle

Le professeur prend une ficelle dont il noue les deux extrémités. A l'aide des doigts, en écartant l'index et le pouce, il forme deux rectangles de même périmètre et de formes assez voisines, sans se rapprocher d'un rectangle très aplati pour commencer. Le professeur peut prendre la longueur de ficelle qui convient le mieux pour la manipulation et pour le développement ultérieur selon sa classe. Il ne communique pas dès le départ cette longueur aux élèves.

Ces deux rectangles ont-ils la même aire ?

Ce problème figure aujourd'hui dans quelques manuels français mais... sans la ficelle ! On parle de rectangles abstraits ou de champs rectangulaires de même périmètre, de sorte que les élèves ne se représentent rien et l'exercice, souvent à faire à la maison, n'a plus de sens !

Une conjecture des élèves dans le problème des rectangles de ficelle

Quand le professeur montre la ficelle, les élèves répondent que les rectangles ont la même aire. Un de leur argument est « c'est parce qu'ils ont le même périmètre ». Un autre argument est « parce que ce que l'on perd d'un côté, on le gagne de l'autre » en d'autres termes « le rectangle s'aplatit mais il s'étire en même temps ».

6 Cf. Groupe Didactique des mathématiques (2012), *Les fonctions du collège jusqu'en seconde*, IREM de Bordeaux (irem.aquitaine@u-bordeaux1.fr).

C'est ce deuxième argument qui importe ici pour rapprocher le problème de la ficelle et celui de la boîte. Plusieurs calculs montrent que l'aire change.

On a : $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$, x et y étant les longueurs des côtés du rectangle.
Si $(x + y)$ est constant, le produit est maximum quand $x = y$ et diminue à mesure que la différence augmente. Mais l'argument des élèves se place dans le *cadre* géométrique[7].
Géométriquement on retrouve ce résultat, soit en partant du carré, soit en partant de deux rectangles non carrés. Dans les deux cas, une dimension diminue d'une longueur h tandis que l'autre augmente de la même longueur h.

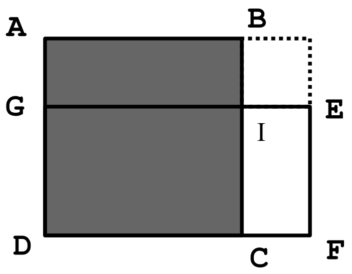


Figure 1

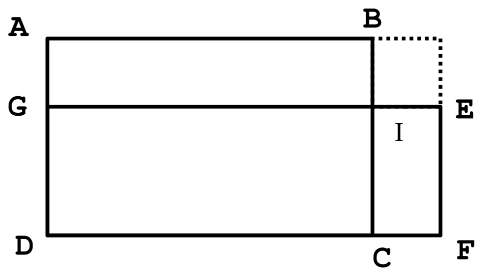


Figure 2

En passant du carré au rectangle (*figure 1*) l'aire ne peut que diminuer car on perd l'aire d'un carré de côté h, ce qui se retrouve algébriquement :
Quel que soit h l'aire du rectangle s'écrit : $(a + h)(a - h) = a^2 - h^2$, et il faut donc que $h=0$ pour avoir l'aire maximale qui est a^2.

Mais la *figure 2*, qui traduit ce que les élèves disent quand le professeur passe d'un rectangle à un autre, permet d'aller plus loin. Les dimensions du rectangle ABCD sont $AB = x$ et $AD = y$. avec $x > y$. On passe au rectangle GEFD dont les dimensions deviennent $x + h$ et $y - h$. On constate que la compensation des aires se fait beaucoup moins bien car cette fois l'aire de ABIG ($x \times h$) est supérieure à l'aire de IEFC (EF $\times$ h) du fait de la différence entre les deux dimensions du rectangle de départ ABCD. Donc plus le rectangle de départ sera aplati, plus on perdra de l'aire en l'aplatissant davantage.

Retrouvons ceci algébriquement. La variation de l'aire s'écrit en ordonnant par rapport aux puissances de h : $(x + h)(y - h) - xy = h(y - x) - h^2$. Pour h petit par rapport aux dimensions des rectangles, la partie principale de la variation de l'aire (terme de degré 1 en h) est proportionnelle à la différence $y - x$ et sera donc d'autant plus grande que le rectangle de départ sera loin du carré.
Si le périmètre est $2a$, l'écriture de la fonction $f(x)=ax-x^2$ et le calcul de sa dérivée donne le variation de l'aire ; le calcul de sa dérivée seconde (constante = –2) donne le renseignement sur la variation de la pente de la tangente à la parabole « renversée ».

Mais, sans cela, le professeur peut montrer ces résultats à des élèves très jeunes par le simple dessin géométrique suggéré par leur argument, même si au départ cet argument était erroné !

7 Cf. Douady R. (1984), *Jeux de cadre et dialectique outil -objet dans l'enseignement des mathématiques*, thèse de doctorat, Paris VII.

Conjecture des élèves dans le problème de la boîte

Si le professeur les sollicite, les élèves font le plus souvent une conjecture sur le volume avant de commencer tout calcul et tout graphique, surtout s'ils ont vu auparavant le problème de la ficelle : on part d'un volume $V(x) = 0$ (feuille plate, pas de découpage $x=0$). Quand x augmente, le volume augmente, puis à mesure que x croît, les élèves se rendent compte que, après avoir augmenté, le volume a dû, à un moment, commencer à diminuer car ils arrivent à nouveau à un volume $V(x)=0$ quand il n'y a plus de papier (pour $x=5$).

Donc le volume doit passer au moins par un maximum. Les élèves conjecturent que le maximum se réalise pour le cube. A leur grande surprise, l'étude de la variation du volume V de la boîte en fonction de *x* prouve que cette conjecture est fausse.

La fonction est $V(x) = x\,(10 - 2x)^2 = 4x^3 - 40x^2 + 100x$
$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = (10 - 2x)(10 - 6x)$ et $V''(x) = 24x - 80 = 8\,(3x - 10)$
L'étude du signe de la dérivée montre que le volume augmente jusqu'à son maximum pour $x= \frac{5}{3}$. Puis le volume diminue constamment jusqu'à 0. On passe par le cube quand x vaut $\frac{10}{3}$, abscisse du point d'inflexion.

Questions à propos de ce résultat

Le point d'inflexion correspond au cube, configuration géométrique particulière de la boîte. Le maximum devrait lui aussi correspondre à une configuration particulière, mais laquelle ? On ne voit pas *a priori* ce que cette valeur de x signifie géométriquement pour la boîte.

La réponse à cette question ne se trouve actuellement dans aucun manuel français.

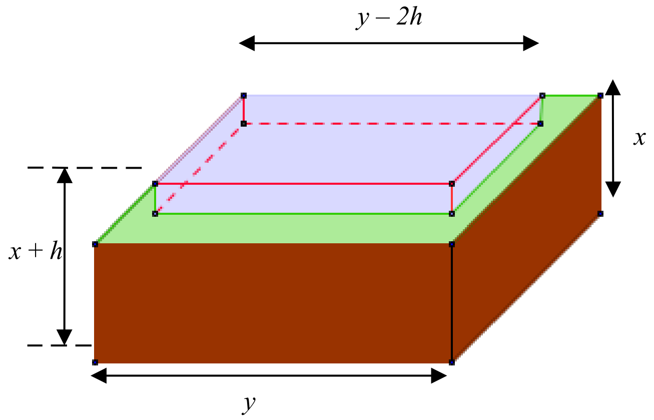
Par un calcul du même type que celui fait pour les rectangles, c'est-à-dire en faisant croître x d'une petite valeur h on trouve :
$V(x + h) - V(x) = (x + h)(y - 2h)^2 - xy = h\,(y^2 - 4xy) + 4h^2\,(x - y) + 4h^3$

Le terme de degré 1 en h s'annule quand $y^2=4xy$, donc pour $y=4x$, soit $10-2x=4x$ soit $x = \frac{5}{3}$. Or y^2 est l'aire de la base de la boîte et $4xy$ est l'aire latérale.

Pourquoi ces deux aires, et notamment l'aire latérale, interviennent-elles ici ?
Le terme en h^2 s'annule si $x=y$ donc pour le cube, mais cette fois nous sommes à l'ordre 2 et non à l'ordre 1. On retrouve pour $x=10-2x$ la valeur $x= \frac{10}{3}$. Mais ici les deux dimensions (x et y) ne jouent pas des rôles symétriques car la seconde intervient par son carré, donc le maximum n'a pas lieu lorsque $x=y$. Le maximum du volume se produit pour l'égalité de deux aires et non pour celle de deux longueurs.

Interprétation géométrique

Quand x augmente de h, la hauteur de la boîte augmente, ce qui permet de gagner en volume, mais l'aire de la base diminue, donc on perd du volume.



Si x augmente de h, y diminue de $2h$. Le volume gagné (en clair sur le dessin) est celui d'un parallélépipède de hauteur h dont l'aire de base est $(y-2h)^2$ soit

$$h\,(y^2 - 4hy + 4h^2) = h\,y^2 - 4h^2y + 4h^3.$$

Le volume perdu (en foncé sur le dessin) est celui d'une couche tout autour de la boîte qui s'appuie sur la surface latérale, soit : $4hxy - 4h^2x$ (on a ajouté les volumes de quatre parallélépipèdes de dimensions y , x et h et retranché ceux des quatre coins de dimensions h, h, et x. Le bilan du gain donne :

$$(h\,y^2 - 4h^2y + 4h^3) - (4hxy - 4h^2x\,) = h\,(y^2 - 4xy) + 4h^2\,(x - y) + 4h^3\,.$$

D'une part nous retrouvons les résultats déjà obtenus par le calcul algébrique à partir de l'expression de la fonction, d'autre part nous comprenons maintenant pourquoi l'aire de la base y^2 et l'aire latérale $4\,xy$ interviennent.

Conclusion

La variation principale du volume est donnée par le signe de $hy\,(y - 4x)$.
Plusieurs cas se présentent :

- **Si $4x<y<10$**, alors $4x < 10-2x$, et donc $0 < x < \dfrac{5}{3}$.

  On gagne davantage qu'on ne perd, donc le volume augmente. Près de l'équilibre la compensation est la meilleure comme avec les rectangles de ficelle.

- **Si $x < y < 4x$**, alors $x < 10 - 2x < 4x$, donc $\dfrac{5}{3} < x < \dfrac{10}{3}$.

  On perd davantage qu'on ne gagne. Le volume diminue.

- **Si $0 < y < x$**, alors $\dfrac{10}{3} < x < 5$.

  La perte se ralentit à partir de $x = \dfrac{10}{3}$ car le terme $4h^2\,(x - y)$ devient positif.

Nous avons utilisé tout à tour :

- le cadre analytique avec le calcul des dérivées,

- le cadre algébrique avec le calcul de $V(x + h) - V(x)$ en prenant soin de conserver les deux variables liées x et y et non de passer à une seule variable x comme cela se fait dans le cadre précédent ; ceci a permis de voir l'intervention de l'aire de la base et de l'aire latérale, mais sans expliquer néanmoins pourquoi elles apparaissent,

- le cadre géométrique qui a, enfin, bien fait comprendre ce qui se passe.

Il est important d'habituer les élèves à effectuer des changements de cadre quand ils doivent résoudre un problème, car c'est une bonne méthode pour chercher en mathématique. Nous l'avons vu à propos du problème de la ficelle et à nouveau avec celui de la boîte.

C'est très souvent possible avec les questions que nous a données Emma Castelnuovo, car ce sont toujours des problèmes riches, profonds, bien que d'apparence simple, utilisant un matériel facile à se procurer et pas cher, aussi efficace pour la construction des images mentales qu'un logiciel de géométrie dynamique. Je m'en suis beaucoup servi au Niger et au Mali. Encore merci pour toutes ces idées merveilleuses.