NOTION DE TEMPS ET PERIODICITE : UNE SEQUENCE EXPERIMENTALE[1]

NGUYEN THI Nga
Université de Pédagogie de Ho Chi Minh ville

Résumé. L'étude de la notion de périodicité présente en mathématiques et en physique ne peut éviter celle de la notion de temps. Dans cet article, nous examinons d'abord les représentations du temps dans ces deux disciplines et les phénomènes périodiques associés ainsi que leur transposition didactique dans l'enseignement en France et au Viêt Nam. Ensuite, nous présentons une séquence expérimentale visant une deuxième rencontre avec les fonctions périodiques par la modélisation de phénomènes périodiques et où le temps est à construire comme variable indépendante.

Mots clés. Temps, périodicité, mathématiques et physique, séquence expérimentale.

Abstract. The study of the concept of periodicity in mathematics and physics is unavoidably linked to the study of the notion of time. In this paper, we first examine the representations of time and periodic phenomena in these two disciplines in education in France and Vietnam. Then, we present an experimental sequence for a second meeting with periodic functions by modeling of periodic phenomena where time is to build as an independent variable.

Key-words. Times, periodicity, mathematics and physics, experimental sequence.

Introduction

Sensevy & Mercier (1999) énoncent deux « raisons d'être » des mathématiques :

> - faire des mathématiques, c'est fabriquer des modèles qui permettront de maîtriser des phénomènes dans la réalité ;
> - faire des mathématiques, c'est utiliser des outils pour résoudre des problèmes et donc aussi, construire des outils permettant de résoudre des problèmes ou encore, étudier des outils et les problèmes qu'ils permettraient de résoudre.(Sensevy & Mercier 1999, p.70)

Ces deux raisons d'être des mathématiques suffisent pour expliquer que les mathématiques interviennent dans toutes les sciences. Leur capacité à fabriquer des modèles pour les phénomènes que les différentes sciences repèrent et étudient crée des relations très fortes avec elles. C'est particulièrement vrai pour la physique, comme le déclare Klein (2000) :

> Les mathématiques offrent incontestablement à la physique une voie privilégiée vers l'unification. L'existence d'une relation très particulière entre la physique et les mathématiques est universellement reconnue. […] Comment concevoir la mécanique classique sans calcul différentiel et intégral, l'électromagnétisme sans équations aux dérivées partielles, la relativité générale sans calcul tensoriel, la physique quantique sans espaces de Hilbert ? (Klein 2000, p. 179)

1 Cet article, issu d'un travail de Thèse (Nguyen Thi 2011) poursuit la réflexion initié dans l'article « Fonctions trigonométriques et phénomènes périodiques : un accès à la modélisation dans l'enseignement secondaire ? » Nguyen Thi (2013).

Selon lui, il y a trois types d'efficacité des mathématiques en physique liés à la modélisation :

- les mathématiques peuvent anticiper les résultats d'expérimentation ou reproduire les données obtenues précédemment. Elles peuvent fournir des résultats numériques qui, dans les limites d'une certaine borne d'erreur tolérée, reproduisent les données expérimentales ;

- elles mettent en évidence des structures « explicatives » ;

- elles permettent d'engendrer de nouvelles idées, de nouveaux concepts, des stratégies inédites ou des solutions originales à des problèmes anciens.

Exprimer et exploiter une propriété physique sous forme numérique exige non seulement qu'on se serve des mathématiques pour indiquer les relations entre les différentes grandeurs mesurées, mais aussi qu'on soit capable d'utiliser ces relations. Pour Gruber et Benoit (1998), les mathématiques sont, au-delà du langage de la physique, la manière de penser du physicien :

> - c'est le langage de la nature que l'homme doit assimiler ;
>
> - c'est le langage de l'homme pour traduire les faits de la nature. C'est cette deuxième interprétation, reliée du reste à la description moderne, qu'adopte Heisenberg quand il affirme : « Les formules mathématiques ne représentent plus la Réalité, mais la connaissance que nous possédons ». Finalement, on remarquera que les mathématiques sont beaucoup plus qu'un langage : c'est la manière de penser du physicien. (Gruber et Benoit 1998, p. 8)

A son tour, la physique avec la résolution mathématique de ses problèmes conduit à développer des connaissances nouvelles et importantes en mathématiques.

> Par l'expérimentation ou l'analyse théorique, le physicien essaie d'établir des relations mathématiques, appelées lois, entre les grandeurs physiques. Les mathématiques forment le langage naturel de la physique parce qu'elles nous permettent d'énoncer ces relations de façon concise. Une fois établi, l'énoncé mathématique peut être manipulé selon les règles mathématiques. Si les équations initiales d'une analyse sont correctes, la logique mathématique peut alors déboucher sur de nouvelles idées et de nouvelles lois. (Benson 1991, p.4)

Ces liens épistémologiquement très forts qu'entretiennent les sciences physiques et les sciences mathématiques nous incitent à mener une enquête sur la modélisation des phénomènes physiques, en particulier ceux relevant de la périodicité. Quels sont les phénomènes que la physique étudie et qu'elle considère comme périodiques ?

Ces phénomènes se déroulent, pour la physique, dans un cadre appelé « espace-temps ». L'espace y est considéré, par les physiciens, comme un continu à trois dimensions (il faut trois nombres pour repérer la position d'un point) et le temps comme un continu linéaire, orienté par la « flèche du temps » qui distingue le futur du passé, la longueur et le temps étant des concepts premiers.

Israel (1996) utilise le terme « mathématique du temps » pour parler de l'outil mathématique de modélisation de phénomènes temporels :

> Par l'expression de « mathématique dynamique » ou de « mathématique du temps », nous nous référons à une conception des mathématiques en tant qu'instrument dont le

> rôle principal est de décrire l'évolution des phénomènes au cours du temps, et donc les changements. D'un point de vue technique, cela signifie que toutes les variables en jeu dépendent d'un paramètre qui représente justement le temps. (Israel 1996, p.222)

I. Le temps en physique

Le temps apparaît dans beaucoup de phénomènes étudiés par la physique comme la cause du changement, de la variation des états. Situation paradoxale pour le physicien, comme le souligne Klein (2000) :

> Les scientifiques de toute discipline sont confrontés au temps. Il peut sembler curieux d'associer le temps et la physique. Celle-ci cherche en effet, sans se l'avouer toujours, à éliminer le temps. Le temps est associé au variable, à l'instable, à l'éphémère, tandis que la physique, elle, est à la recherche de rapports qui soient soustraits au changement. Lors même qu'elle s'applique à des processus qui ont une histoire ou une évolution, c'est pour y discerner soit des substances et des formes, soit des lois et des règles indépendantes du temps. Dans son désir d'accéder à un point de vue quasi divin sur la nature, la physique prétend à l'immuable et à l'invariant. Mais dans sa pratique, elle se heurte au temps. (Klein 2000, p.242-243)

Mais qu'est-ce que le temps ? Quelles sont ses représentations ? Pourquoi la progression périodique des aiguilles d'une montre sur l'espace circulaire de son cadran rend-elle possible une mesure du temps ? Quel lien existe-t-il entre le temps et les phénomènes périodiques temporels ?

D'après Feynman (1963), « un temps » est défini dans le dictionnaire Webster[2], comme « une période », et cette dernière comme « un temps », ce qui ne nous avance guère. Examinons sa conception du temps :

> Peut-être est-il aussi bien d'accepter le fait que « le temps est une des choses que nous ne pouvons probablement pas définir (au sens du dictionnaire) et de dire simplement que c'est ce que nous savons déjà de lui: combien nous attendons ! (Feynman 1963, p.55)

La même idée est présente chez Klein (2000) :

> On peut tenter de définir le temps : dire qu'il est ce qui passe quand rien ne se passe ; qu'il est ce qui fait que tout se fait ou se défait ; qu'il est l'ordre des choses qui se succèdent ; qu'il est le devenir en train de devenir ; ou, plus plaisamment, qu'il est le moyen le plus commode qu'a trouvé la nature pour que tout ne se passe pas d'un seul coup. Mais toutes ces expressions présupposent ou contiennent déjà l'idée du temps. Elles n'en sont que des métaphores, impuissantes à rendre compte de sa véritable intégrité. (Klein 2000, p.237)

Ainsi quand on utilise une expression pour définir le temps, celle-ci présuppose ou contient déjà l'idée du temps ! Cependant les physiciens s'accordent tous sur la nécessité de mathématiser le temps :

> Le temps est un outil mathématique qui permet de mettre en équation l'observation de phénomènes physiques (observables) et d'en tirer ainsi un certain nombre d'informations. Cet outil existe car il existe des êtres pour observer (et mesurer) la nature et ses changements (principe socratique) et de la matière et du mouvement pour qu'il y ait des changements. (Isoz 2011)

2 Le *Dictionnaire Webster* est le nom donné à un type de dictionnaire de langue anglaise aux Etats-Unis et faisant autorité concernant l'anglais américain.

Donc le problème qui doit nous préoccuper ici n'est pas de trouver une définition du temps mais de savoir comment les physiciens le représentent et comment ils le mesurent.

II. La représentation du temps

> Le temps s'incarne en physique sous la forme d'un nombre réel, le paramètre τ . Il n'a donc qu'une dimension (un seul nombre suffit à déterminer une date) et on peut fixer sa direction d'écoulement (il est orientable). Une telle figuration du temps postule implicitement qu'il n'y a qu'un temps à la fois et que ce temps est continu. […] Contrairement à celle de l'espace, la topologie du temps est très pauvre. Elle n'offre que deux variantes, la ligne ou le cercle, c'est-à-dire le temps linéaire, qui va de l'avant, ou le temps cyclique, qui fait des boucles. Ce dernier favorisé par le caractère magique du cercle, a prévalu dans les mythes mais il est aujourd'hui délaissé par la physique parce qu'il ne respecte pas le principe de causalité. […]. (Klein 2000, p.243-244)

Avec sa forme linéaire qui s'est imposée aux dépends de sa forme circulaire, le temps est classiquement représenté par une droite orientée composée d'une suite d'instants infinitésimaux que les mathématiciens appellent la droite réelle $\mathbb{R}$. Le temps intervient donc dans les équations de la physique comme une variable réelle indépendante et graphiquement représentée par un axe, le plus souvent l'axe des abscisses.

Muni de sa représentation mathématique sous la forme d'une droite réelle, le temps possède une structure ordonnée : sur une droite, un point se situe nécessairement avant ou après un autre point.

> Le cours du temps est représenté par l'axe du temps sur lequel on place traditionnellement une petite flèche qui n'est précisément pas ce qu'on appelle d'ordinaire la « flèche du temps ». Elle est mise là pour signifier d'une part que le sens d'écoulement du temps, même s'il est arbitraire, peut être défini, et d'autre part que les voyages dans le temps sont impossibles : sur l'axe du temps, on ne peut pas revenir en arrière ni passer deux fois par un même instant. Cette représentation mathématique du cours du temps invite à définir le temps comme étant ce qui organise et ordonne la continuité des instants, et, ce faisant, ce qui produit de la durée, rien de plus (et donc pas nécessairement du changement). À défaut de produire de la nouveauté phénoménale, le temps produit des instants qui sont tous des instants radicalement « neufs », originaux, même s'ils sont ouverts à l'accueil de phénomènes répétitifs. (Klein 2006, p. 18)

Cette représentation mathématique du temps pose la question de la différenciation entre le passé et le futur. Le temps des Mathématiques se sépare-t-il, sur cette question, du temps de la Physique ? C'est ce que pense Israel (1996) :

> Le paramètre mathématique t permet de définir conventionnellement le « présent » comme l'instant $t = 0$, le « passé » comme l'ensemble des valeurs négatives $t < 0$, et le futur comme l'ensemble des valeurs positives $t > 0$. Cette définition est très éloignée de l'intuition commune du temps. Pour cette dernière, le passé et le futur présentent une évidente dissymétrie : une inversion du temps est inimaginable. […] Dans le temps mathématique, il est possible de remonter le temps, ce qui paraît impensable (même en principe) dans la réalité. (Israel 1996, p. 222-223)

Pourtant la lecture graphique habituelle sur un axe « horizontal » de gauche à droite ne privilégie-t-elle pas le passage du passé vers le futur tendant à transformer, dans le modèle mathématique, la droite du temps en une demi-droite ?

A cette première question sur la représentation mathématique du temps on peut en ajouter une seconde, soulevée en ces termes par Krysinska, Mercier & Schneider (2009) :

> Seules les grandeurs qui varient dans le temps semblent évoquer chez les élèves (*de l'enseignement mathématique secondaire, note de l'auteur*) une quelconque idée de variation. (Krysinska, Mercier & Schneider 2009, p.253)

Schneider (1988) dit avoir observé chez les mêmes élèves, « la propension à associer variation et références au temps même là où la variable temps est absente : par exemple, les rares élèves qui parviennent à interpréter pourquoi dériver l'aire d'un disque par rapport à son rayon conduit à l'expression de son périmètre, parlent de cercles ajoutés successivement comme « accroissement instantané » du disque ».

Ainsi la variable « temps » outrepasserait sa fonction de représentation du temps pour prendre en charge l'appréhension de tout phénomène de variation. Schneider se refuse à ne voir dans ce phénomène qu'un obstacle didactique à l'apprentissage de la notion de variation. Selon elle, la notion de variable temporelle « grandeur que l'on perçoit intuitivement comme variable au cours d'un temps non numérisé » […] « renvoie à l'ambiguïté dont la notion de variable a fait l'objet dans l'histoire des mathématiques ». Cette notion a donc des ressorts épistémologiques et Schneider, à l'appui de cette thèse cite les travaux de Serfati (2005) qui voit dans la notion de variable introduite par Leibniz des « connotations cinématiques ».

III. La mesure du temps

Selon Feynman (1963), n'importe quel mouvement périodique peut servir à la mesure du temps :

> Une manière de mesurer le temps est d'utiliser quelque chose qui se passe et se répète d'une manière régulière – quelque chose qui est périodique. Par exemple, un jour. (Feynman 1963, p.55)

Mais comment reconnaître un phénomène périodique ? Par exemple, y a-t-il quelque manière de vérifier si les jours ont la même longueur – soit d'un jour à l'autre, ou du moins en moyenne ?

Feynman (1963) indique une méthode, celle qui consiste à comparer ce phénomène à d'autres phénomènes périodiques. En effet, pour vérifier si les jours ont la même longueur, on peut faire une comparaison avec un sablier. Nous pouvons « créer » un événement périodique avec un sablier si nous avons quelqu'un qui se trouve à côté à midi (midi ici n'est pas défini comme douze heures d'horloge, mais cet instant où le soleil est à son point le plus élevé), pour le retourner chaque fois que le dernier grain de sable est tombé. Nous pourrions alors compter le nombre de fois que l'on tourne le sablier, de chaque midi au suivant. Nous trouverions que le nombre « d'heures » (c'est-à-dire le nombre de rotations du sablier) est le même pour chaque « jour ».

> Nous avons maintenant une certaine confiance dans le fait que à la fois « l'heure » et le « jour » ont une périodicité régulière, c'est-à-dire découpent des intervalles de temps égaux successifs. […] Nous pouvons dire que nous trouvons qu'une régularité d'une certaine sorte s'adapte à une régularité d'une autre sorte. Nous pouvons simplement dire que nous fondons notre définition du temps sur la répétition d'un certain événement apparemment périodique. (Feynman 1963, p.56)

Donc cette appréhension du temps est fondée sur la répétition d'un certain événement apparemment périodique[3] et accepté comme une unité de mesure. Ceci montre l'imbrication des concepts de temps et de périodicité pour la mesure du temps.

> […] tant qu'un système observable produit un phénomène périodique stable et suffisamment petit pour que toute mesure physique puisse y être réduite, celui-ci peut-être utilisé comme étalon d'intervalle temporel. (Isoz, 2011)

Pour mesurer plus précisément des fractions d'un jour et des fractions d'une heure, on utilise un pendule donné qui oscille toujours dans des intervalles de temps égaux, aussi longtemps que l'amplitude de l'oscillation est maintenue petite. Si ce pendule oscille 3600 fois en une heure (et s'il y a 24 de ces heures dans un jour), chaque période du pendule sera appelée une « seconde ».

> Le temps se découpe dès lors en unités de plus en plus petites. En le « matérialisant » par la succession des engrenages de roues ou les oscillations de pendules, on le mathématise au moyen d'une suite numérique. Le temps acquiert ainsi le statut de grandeur mesurable. (Luminet 1995, p.61)

En conclusion, les mesures de durées nécessitent de se référer à des phénomènes périodiques qui permettent de les ramener à un décompte de périodes. Nous voyons là une raison de nous intéresser aux phénomènes périodiques temporels pour étudier la mathématisation en physique.

Nous trouvons des phénomènes périodiques dans plusieurs branches de la physique : Mécanique, Electromagnétisme, Ondes, et Cristallographie, etc. Parmi ces phénomènes périodiques, trois d'entre eux prennent une grande place dans les traités de physique : le mouvement circulaire (tel le mouvement de la terre autour de son axe et autour du soleil), le mouvement oscillatoire (tel le mouvement d'un pendule simple) et le mouvement ondulatoire (tel le mouvement d'une corde vibrante).

IV. Les modèles mathématiques de la périodicité et le temps

Nous avons montré l'importance du temps dans l'étude de la science physique et l'imbrication des concepts de temps et de périodicité à travers la mesure du temps. Les fonctions sinusoïdales prennent une place essentielle dans la modélisation des phénomènes périodiques temporels.

Ces fonctions sinusoïdales sont d'après les physiciens les acteurs mathématiques principaux de la modélisation à travers des modèles C et O que nous définissons comme suit (Nguyen Thi 2013) :

> - Le modèle C, caractérisé par une trajectoire circulaire et une vitesse angulaire constante, peut apparaître sous deux registres : algébrique (x=Rcosθ, y=Rsinθ, θ=ωt) et graphique (cercle)
> - Le modèle O, présent sous trois registres – algébrique (x=Acos(ωt+φ) ou x''+ω^2x=0), vectoriel et graphique (sinusoïde) – est un modèle fonctionnel au sens où l'objet mathématique central du modèle est une fonction trigonométrique. (op.cité p.30)

3 Dans un article sur « la mesure du temps » publié dans La Valeur de la Science en 1905, cité par Barreau (1996), Henri Poincaré montrait que le postulat relatif à la mesure du temps, sur lequel repose toute la physique, ne se réduit pas à l'affirmation fondamentale selon laquelle « la durée de deux phénomènes identiques est la même ; ou si l'on préfère, que les mêmes causes mettent les mêmes temps à produire les mêmes effets ».

La trajectoire d'un mobile est au cœur du modèle C. A chaque point de cette trajectoire on peut associer le ou les moments du passage du mobile à ce point. En déplaçant le point mobile sur la trajectoire, on peut donc « visualiser » la co-variation avec le temps de toute grandeur associée au mouvement (donc co-variable avec le temps), par exemple la distance du point mobile à un autre point, à une droite ou à un plan. La trajectoire peut servir alors de graphique unidimensionnel.

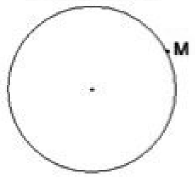
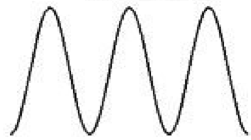
Modèle C	Modèle O
 Trajectoire circulaire et ω constant	 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

Figure 1. *Deux modèles mathématiques de la périodicité*

Un graphique bidimensionnel est au cœur du modèle O. Le temps et les grandeurs co-variables avec le temps y sont séparés sur deux axes différents. Le passage du modèle C au modèle O consiste alors à faire apparaître le deuxième axe porteur des variations de la grandeur modélisée.

V. Qu'en est-il dans l'enseignement ?

L'enseignement de la physique dans le secondaire en France et au Viêt Nam affiche l'objectif d'étudier des grandeurs variables avec le temps : des tensions électriques, des distances, des angles, etc. En arrière-plan, même non nommée ou non formalisée, se trouve souvent une fonction périodique dont la variable indépendante est le temps. Plus prégnante au Viêt Nam qu'en France, la mathématisation des concepts, cependant présente dans les deux institutions, s'enrichit au cours du curriculum en s'appuyant sur le deux modèles C et O.

L'introduction de l'oscillation harmonique en France se fait dès le collège et ce, uniquement par des graphiques présentés comme résultant de prises de mesure (par exemple un oscillogramme). Le rôle du registre graphique est nettement en retrait au Viêt Nam où c'est le registre algébrique qui domine. Or le registre algébrique ne trouve toute sa place qu'après l'étude des fonctions trigonométriques en classe 11[4] de mathématiques. C'est pourquoi l'oscillation harmonique n'est présentée au Viêt Nam qu'en fin du lycée.

Au Viêt Nam, le registre graphique est là pour illustrer le phénomène dont le registre algébrique a été donné et exploré. Au contraire, en France, outre d'avoir un rôle illustratif, le graphique est aussi un objet de travail. L'étude d'un phénomène périodique à partir de son graphique est quasi systématique avant et même après l'introduction des fonctions périodiques en mathématiques. Ce choix didactique sur le rôle du graphique dans l'étude des phénomènes en physique et en sciences expérimentales générales est justifié par Godement (2001) :

4 Équivalent de la classe de Première en France.

> Pour les scientifiques expérimentaux et les ingénieurs, une fonction est tout aussi souvent donnée par son graphe, lieu géométrique des point (x, y) du plan tels que y=f(x) avec une fonction f que, bien souvent, on ne connaît pas vraiment. (Godement 2001, p. 20-21)

Quant à l'articulation entre les deux modèles C et O, elle est faible au Viêt Nam, car réduite au topos de l'enseignant, tandis qu'en France, elle est quasiment inexistante. Dans les deux pays, on privilégie l'étude de l'oscillation harmonique par le modèle O.

Le passage de l'un des modèles C et O à l'autre se traduit, pour la variable temps, en *un déploiement ou en un repliement* :

- Passage de C à O : déploiement du temps circulaire sur un axe en un temps linéaire
- Passage de O à C : repliement du temps linéaire sur l'espace fini du cercle.

Or si le déploiement est institutionnalisé avec la droite du temps en physique, le repliement, quant à lui, n'existe qu'implicitement au travers de l'enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique (classe de seconde).

A partir d'une situation initiale extra-mathématique générique, nous avons construit et expérimenté en 2010 une séquence didactique composée de 3 situations pour introduire les fonctions périodiques, en mettant en œuvre une démarche de modélisation de la périodicité. Ce choix a pour conséquence d'introduire dans la situation le problème de la modélisation du temps. C'est l'un des enjeux de l'expérimentation : amener les élèves à construire le temps dans le modèle.

VI. Présentation d'une séquence expérimentale

Dans cette séquence, une des hypothèses de travail est qu'un environnement de géométrie dynamique rend possible une première étape du processus de modélisation en produisant un *modèle géométrique intermédiaire* d'une situation de co-variation de grandeurs. Nous citons largement (Soury-Lavergne & Bessot 2012) pour justifier cette hypothèse.

> En effet, les objets de la géométrie peuvent être considérés comme des émergents d'un processus de modélisation de la réalité spatiale et sont donc disponibles pour rendre compte de la co-variation de grandeurs spatiales. Dans l'environnement de géométrie dynamique retenu, Cabri 2+, la modélisation de grandeurs variables se fait par la création de points qui se déplacent dans le plan. Un point M peut être libre dans le plan, contraint sur un objet géométrique ou ne pouvant bouger que par l'intermédiaire du déplacement d'un autre point P. Dans ce dernier cas, nous disons que le point P pilote le point M. Les points P et M mobiles à partir d'une origine fixe peuvent modéliser effectivement différentes grandeurs variables possibles, comme la longueur et le temps. Ils sont les prémisses aux notions de variables indépendante et dépendante. Cette modélisation géométrique garde perceptivement la trace matérielle du phénomène de variation (proximité sémantique) qui, en revanche, disparaît dans le symbolisme formel (rupture sémantique), ultime étape du processus de modélisation. Elle peut donc jouer le rôle d'une modélisation intermédiaire. (Soury-Lavergne & Bessot, 2012)

En particulier, le choix de cet environnement va donner la possibilité de différentes modélisations du temps comme nous le montrerons plus loin. Pour cela, l'enchaînement de trois situations didactiques permet au modèle C de jouer le rôle de modèle intermédiaire vers le modèle fonctionnel O dont l'enjeu est la résolution d'un problème fondamental de périodicité, celui de la coïncidence de deux phénomènes périodiques.

Ce problème est le suivant [5] :

M entre dans une cabine quand elle passe au plus près du sol, au point **I**.
La grande roue du manège a un rayon de 20 m et son centre est situé à 22 m du sol.
Un tour dure **T** minutes.
Une lampe rouge éclaire par intermittence un endroit fixe L, à une hauteur **h**, du manège où passent les cabines. La lampe s'allume n minutes toutes les **m** minutes pour éclairer L. Si une cabine est éclairée par la lampe rouge lors de son passage en L, son occupant gagne un voyage gratuit. La lampe s'allume au moment où M monte dans la cabine.
Questions : M va t-il gagner un voyage gratuit ? Si oui, au bout de combien de tours ? Peut-il en gagner d'autres ?

La séquence expérimentale est organisée en deux séances de 2h30 chacune. Nous présentons l'enchaînement des situations dans le tableau 1.

Séance 1	**Situation d'initiation à Cabri**	Amorcer une genèse instrumentale
	Situation 1	Construire un modèle intermédiaire géométrique du déplacement d'une cabine sur un manège (modèle C)
	Situation 2	Faire évoluer le modèle intermédiaire géométrique par l'*introduction du temps*
Séance 2	**Situation 3**	Résoudre le problème de coïncidence (émergence du modèle O)

Tableau 1. *L'enchaînement des situations dans les deux séances de la séquence*

Dans la situation 1, nous cherchons à dévoluer aux élèves une part de responsabilité dans le processus de modélisation fonctionnelle d'une situation de co-variation. La question de la représentation du déplacement d'une cabine sur le manège en fonction du temps devient, dans la géométrie dynamique, celle du déplacement d'un point sur un cercle piloté par un autre point. Cette question est initiée d'abord par la recherche d'une représentation du manège, de la cabine et du déplacement de la cabine. Cela revient à construire un cercle et un point se déplaçant sur le cercle par l'intermédiaire d'un autre point se déplaçant sur une droite.

L'objectif de la situation 2 est de faire évoluer le modèle intermédiaire, déjà construit dans la situation 1. Cette évolution doit déboucher sur une représentation explicite et linéaire du temps alors que cette variable existe implicitement dans la « mobilité » circulaire de la cabine.

5 Les points L et M ont été ajoutés sur la figure pour la compréhension du lecteur. Ils ne figuraient pas dans la fiche de l'élève. Nous indiquons les variables didactiques de la situation en gras dans le texte.

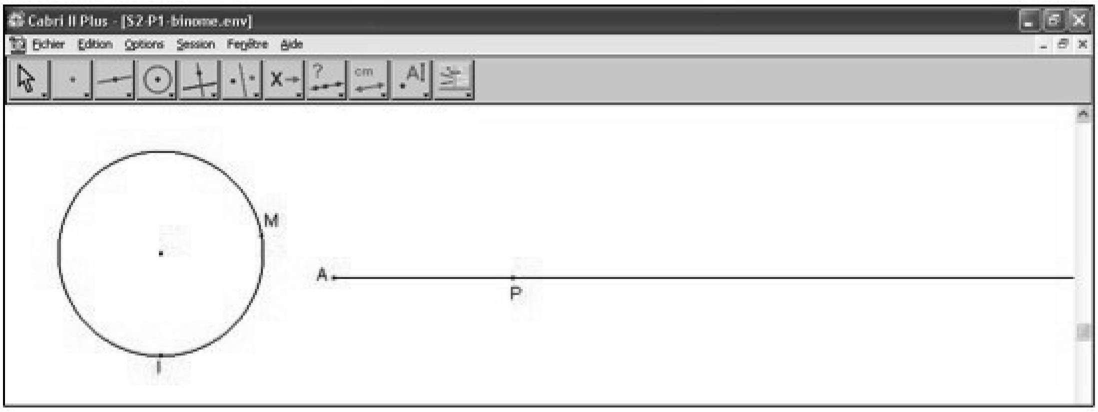


Figure 2. *L'écran Cabri au démarrage de la situation 2*

Quand le point P se déplace sur la demi-droite, le point M se déplace aussi sur un cercle. Le point M ne peut être déplacé que par l'intermédiaire du déplacement de P et il peut faire plusieurs tours. Un point I « origine » a été punaisé sur le cercle : il s'agit d'un point fixe. Le sol n'est pas représenté et la demi-droite est placée à droite du cercle pour qu'il ne puisse pas y avoir confusion. Voici les consignes données dans la première phase de la situation 2.

SITUATION 2
Fiche 1

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S2-P1-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

A l'écran, vous pouvez voir un point P sur la demi-droite d'origine A, un point I fixe sur le cercle et un point M qui se déplace sur le cercle, piloté par le point P.

Travail à faire : placer sur la demi-droite AP le point P1 correspondant à 1 tour de la cabine M, le point P2 correspondant à 2 tours de la cabine M, le point P3 correspondant à 3 tours de la cabine M.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 3. *Situation 2 – phase 1*

Cette situation pose le problème de la représentation du temps, via l*a durée d'un voyag*e. La non donnée de la durée d'un tour dans la première phase initie une première graduation de l'axe AP correspondant au *temps discre*t « nombre de tours ».

Quand P se déplace de A à P1 sur la demi-droite, M se déplace d'un tour sur le cercle. L'unité de temps dans ce modèle est celui d'un tour complet du point M sur le cercle, c'est-à-dire un tour de la cabine sur la grande roue. Cette première graduation permet de problématiser la représentation du temps par une longueur (indépendante de la taille du manège) alors que, dans l'enseignement secondaire que ce soit en mathématiques ou en physique, la représentation linéaire du temps est un donné préconstruit.

L'introduction du numérique par la donnée de la durée (T) d'un voyage en minutes (c'est-à-dire une vitesse angulaire et une référence au temps universel : le « temps-minute ») dans la deuxième phase, introduit une autre unité de temps dans le modèle et conduit à la construction d'une seconde graduation de l'axe AP correspondant au temps continu mesuré en minutes.

Les consignes données dans cette phase sont les suivantes.

SITUATION 2
Fiche 2

Binôme n° …

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S2-P2-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

A l'écran, vous pouvez voir un point P sur la demi-droite d'origine A, un point I fixe sur le cercle et un point M qui se déplace sur le cercle, piloté par le point P.
Vous pouvez voir *aussi* les points P1, P2 et P3 sur la demi-droite d'origine A tels que nous venons de les construire.

On sait de plus qu'un tour complet de la grande roue dure 5 minutes.

Travail à faire :
Placer le point U pour que quand P se déplace de A à U, M se déplace dans la première minute du voyage.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l'enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l'enregistrement.

Figure 4. *Situation 2 – phase 2*

Quand P se déplace de A à U sur la demi-droite, M se déplace dans la première minute du voyage. Une minute correspond donc à 1/T tour du voyage. On passe alors du *temps discret* « nombre de tours » au *temps continu* « minute ».

La situation 3 (séance 2) est organisée autour du problème de la coïncidence des deux phénomènes périodiques temporels que nous avons présentés précédemment :

+ phénomène 1 : la cabine M est en position L (période T minutes)

+ phénomène 2 : la lampe est allumée (*n* minutes toutes les *m* minutes)

Ce problème de coïncidence nécessite la formalisation des deux périodes comme outil de solution et fait évoluer le modèle intermédiaire construit précédemment vers un modèle fonctionnel calculable. De plus, cette séance organise le passage du modèle C au modèle O et favorise la formalisation et l'utilisation des différentes représentations du temps comme un déploiement ou un repliement.

Rappelons que dans la séance 1, l'enchaînement situation 1 – situation 2 vise à mettre en scène des conditions pour favoriser une formalisation graphique (sur une demi-droite) du temps comme variable indépendante. Cet axe du temps permet-il d'accéder à des représentations bidimensionnelles de grandeurs variables avec le temps propres au modèle O ?

Les grandeurs variables en relation avec la réalité à modéliser dans la situation 3 pourraient être la hauteur de la cabine au sol, sa distance à un point fixe, sa vitesse, etc. Notre choix se porte sur la hauteur de la cabine au sol qui dans le modèle géométrique C est la longueur d'un segment vertical, perpendiculaire au sol et à l'axe du temps. Nous faisons l'hypothèse que ce choix favorise l'émergence du deuxième axe de la représentation bidimensionnelle.

Cependant, comme dit précédemment, le processus de construction des modèles temporels lors de la séance 1 s'est appuyé constamment sur le cercle pour aboutir à l'axe du temps. Ainsi, le cercle sera aussi porteur d'un temps (temps circulaire) induit par le co-déplacement des points M et P. Ceci peut rendre difficile l'émergence du deuxième axe de la représentation bidimensionnelle.

VII. Quelques résultats de l'expérimentation de la séquence

L'expérimentation a été réalisée au début de l'année scolaire 2010-2011 avec 12 élèves (répartis en 6 binômes) de classe 12 (équivalent de la terminale en France) dans un lycée d'Hô Chi Minh ville, Viêt Nam. Chaque binôme travaille sur un ordinateur sur lequel a été installé le logiciel Cabri II Plus (version vietnamienne).

Les données recueillies dans la séquence expérimentale sont les suivantes :

- Les rapports des observateurs ;
- Les fiches de réponses des élèves et leurs brouillons ;
- Les fichiers Cabri enregistrés par les élèves après leur travail ;
- Les enregistrements vidéos des manipulations de l'environnement Cabri par les élèves, à l'aide de l'outil « enregistrement de session » dans Cabri ;
- Les enregistrements audios des binômes ;
- L'enregistrement vidéo de l'enseignant.

VII.1. Du temps discret « nombre de tours » au temps linéaire continu « minute »

Dans la situation 2, deux stratégies liées à Cabri II sont a priori possibles et en concurrence :

- *Ajustement perceptif* : déplacer P pour que le point M se déplace sur le cercle d'un tour de I à I pour marquer la position P1 sur la demi-droite donnée.

- *Report de mesure* : Mesurer le périmètre du cercle, soit *p* puis utiliser la commande « Report de mesure » *p* sur [AP) pour marquer P1.

Ces deux stratégies sont distinctes du point de vue de la problématique indépendance / dépendance, le temps devant se construire comme une variable indépendante. L'indépendance du temps émergera de la confrontation des deux types de stratégies : perceptive / report de mesure. En effet, les différences entre les deux modèles construits par ces deux types de stratégies sont les suivantes :

- le premier modèle, obtenu par « ajustement perceptif », est spécifique au cercle proposé à l'ouverture de la fenêtre Cabri et donc *ne résiste pas à un changement de la taille du cercle* ;

- le second modèle, obtenu par « report de mesure » n'est pas attaché au cercle particulier proposé à l'ouverture de la fenêtre Cabri et en ce sens objective l'indépendance du temps.

Une fois le point P1 marqué, il faut encore marquer les points P2 et P3. Or le cercle et le segment représentant la demi-droite [AP) à l'écran de Cabri sont tels que *la longueur du segment est inférieure à deux fois le périmètre du cercle*. Avec ce choix, l'ajustement perceptif permet de placer le point P1 mais *ne permet pas de construire les points P2 et P3 sans diminuer la taille du cercle*. On peut donc s'attendre à une déstabilisation de l'ajustement perceptif au moment du placement de P2 et P3.

Examinons de plus près ce qui s'est passé pour deux binômes (6 et 2). Ils commencent par un ajustement perceptif pour placer P1. Puis ils essaient de marquer P2 et P3 par le même procédé. Mais quand ils déplacent P, le cercle disparaît de l'écran : « *Avec deux tours, le point P est très loin. On n'a pas assez de place.* » (binôme 6). Ceci conduit ces deux binômes à changer de procédure.

- Le binôme 6 anticipe le placement de P2 et de P3 par l'utilisation de la commande report de mesure AP1 et de la calculatrice. Leur graduation ne va pas résister au changement de la taille du cercle puisque la mesure reportée n'est pas le périmètre du cercle mais une mesure obtenue par ajustement perceptif. Faute de temps il ne reporte que la mesure « perceptive » AP1 à partir de A bien qu'il ait tenté de multiplier AP1 par 2 pour construire P2.
- Le binôme 2 utilise l'outil « report de mesure » mais il reporte la mesure AP sur le cercle à partir du point mobile M !

L'usage de la commande « report de mesure » est donc bien présente dans les tentatives de ces deux binômes et aussi des quatre autres, mais seuls deux binômes reportent la mesure du périmètre du cercle sur la demi-droite pour obtenir la graduation P1, P2, P3.

A la fin de cette première phase, l'enseignant différencie les modèles « report de mesure » (binômes 1 et 5) et « ajustement perceptif » (binômes 2 et 6) par la résistance au changement de la taille du cercle, qui prend le sens d'un « changement d'échelle ». L'invalidité du modèle produit par ajustement perceptif résulte de sa non-résistance au changement d'échelle. Ceci conduit à une première modélisation discrète du temps P1, P2, P3.

Pour la phase 2, la stratégie optimale (report de mesure) est prédominante : tous les binômes sauf un la mettent en œuvre en utilisant la calculatrice pour diviser le périmètre (ou la mesure AP1) par 5, puis reportent cette mesure (3,08) sur la demi-droite donnée. Par exemple, voici la « figure Cabri » du binôme 5 :

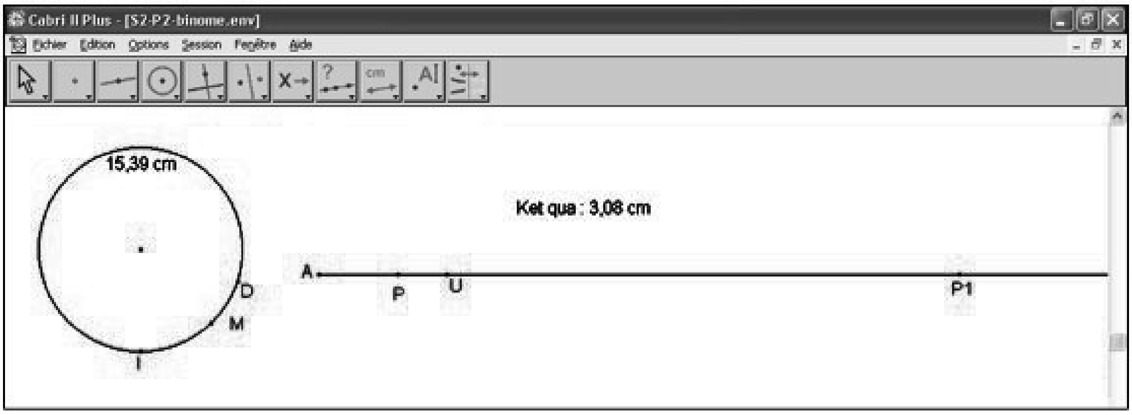


Figure 5. *Écran Cabri du binôme 5*

A la fin de la première séance, les élèves ont construit un premier modèle fonctionnel, de nature géométrique, où un point M représentant une cabine du manège se délace sur un cercle en fonction du temps, variable indépendante dont les valeurs sont accessibles sur un axe distinct de la trajectoire du mobile. Ce modèle est l'aboutissement d'une succession de modèles intermédiaires dans les situations 1 et 2 :

+ un premier modèle « mécanique » : un point P sur une demi-droite pilote le déplacement d'un point sur le cercle.

+ deux modèles « temporels » successifs : le point sur la demi-droite représente graphiquement une variable indépendante, d'abord discrète puis continue, formalisant un axe du temps gradué en minutes.

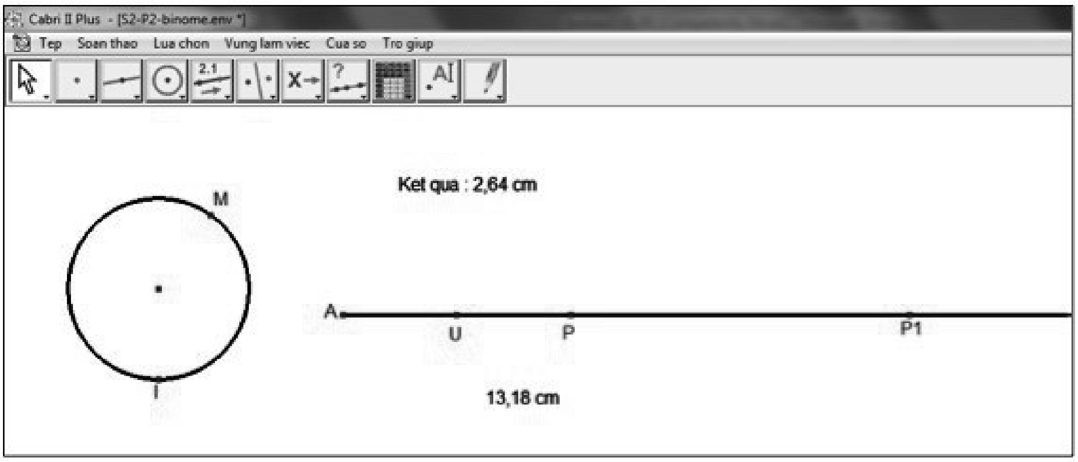


Figure 6. *Le modèle intermédiaire C et l'axe du temps à la fin de la situation 2*

La longueur AP1 correspond à 1 tour de la cabine de M ; la longueur AU correspond au déplacement de M sur le cercle à partir de I pour 1 minute de voyage : quand P se déplace de A à U, il pilote le déplacement de M à partir de I pour 1 minute.

VII.2. Temps et périodicité

Dans la situation 3, la périodicité est reconnue et utilisée par tous les élèves pour résoudre les problèmes de coïncidence. Dans les différentes phases de cette situation, les binômes la formalisent de quatre manières attachées à des représentations différentes du temps, qui peut être replié ou déployé. C'est ce dont nous allons rendre compte.

• Replié sur le cercle : temps circulaire discret (modèle C)

Le binôme 6 construit sur brouillon papier un cercle divisé perceptivement en cinq parties, chaque partie représentant *1 minute*.

Il suit le cercle avec un stylo à plusieurs reprises, simulant les tours du manège (Figure 7). Ces tracés sont des observables de l'utilisation de la périodicité, le cercle étant à la fois trajectoire de la cabine M et porteur du temps et de la durée du déplacement.

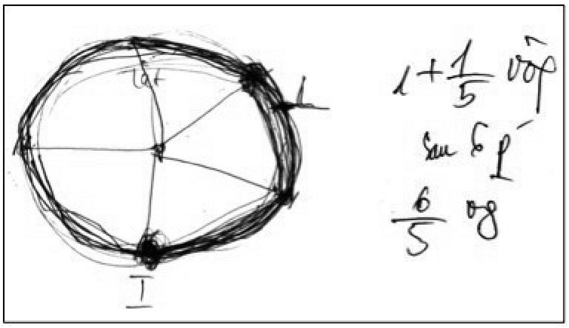


***Figure 7.** Brouillon papier du binôme 6 dans la phase 1*

La réponse associée est la suivante :

> 1 minute = 1/5 trajet → après 3 minutes + 1 minute où la lampe s'allume, c'est 4/5 trajet. Selon des calculs, L est à 2/5 trajet. Donc après un tour, M ne gagne pas. Dans la deuxième tour, il manque 1/5 trajet du 1er tour donc la cabine de M ne passe que 2 minutes et elle est allumée. On sait que L et I distants de 2/5 trajet qui est égale à 2 minutes. Donc M peut gagner un voyage gratuit au bout de 2 tours. De manière similaire, M peut en gagner d'autres. (Binôme 6)

• Déployé en segments sur une demi-droite graduée : temps linéaire continu

Le binôme 4 raisonne dans le modèle fonctionnel Cabri II issu de la séance 1 (Figure 8) en utilisant la demi-droite portant le temps en minutes.

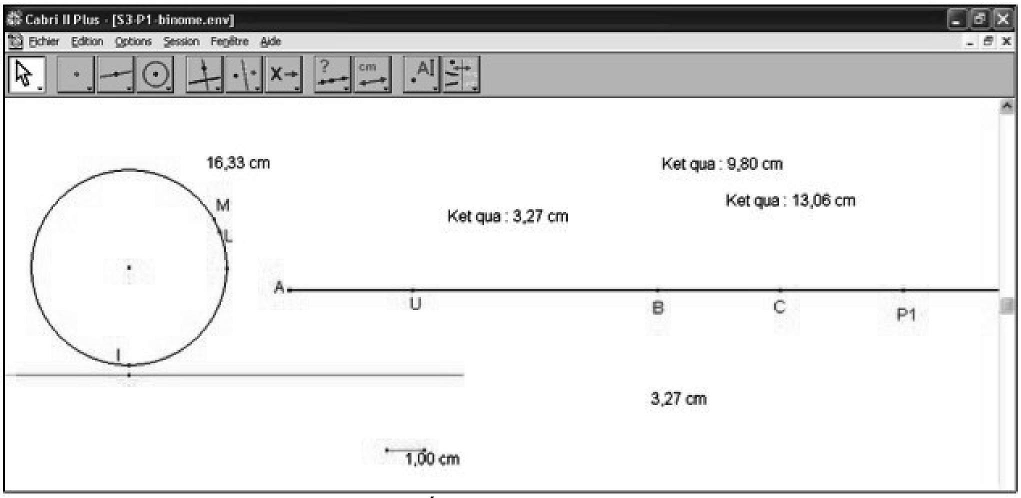


***Figure 8.** Écran Cabri du binôme 4*

La réponse de ce binôme s'appuie sur le travail dans le modèle et en particulier sur le marquage des points B et C :

> M peut gagner un voyage gratuit après 1,2 tours. Il peut en gagner d'autres. Appelons B le point correspondant à la position de M après 3 minutes. C est le point correspondant à la position de M après 4 minutes. Quand P se déplace de A à U, L s'éteint. Quand P se déplace de U à B, L s'allume et de B à C, L s'éteint. Donc après 6 minutes, M va gagner un voyage gratuit. (Binôme 4)

• *Déployé en arches sur une sinusoïde : temps linéaire continu (modèle O)*

L'articulation des modèles C et O ne peut éviter le recours à un graphique bidimensionnel. Or aucun des binômes n'a de stratégie bidimensionnelle pour résoudre le problème de coïncidence proposé initialement. C'est pourquoi nous décidons d'introduire un tel graphique et un nouveau problème de coïncidence avant de mettre en concurrence les modèles C et O dans la phase 4. Préalablement à l'introduction d'un graphique bidimensionnel, un algorithme de construction d'un point M' dans Cabri est proposé aux élèves. La suite des constructions élémentaires est la suivante : droite passant par M et perpendiculaire au sol en H / demi-droite passant par P et perpendiculaire à (AP) / report de mesure MH sur la demi-droite perpendiculaire à (AP) : marquage du point M' obtenu. Puis on demande aux élèves d'*anticiper le chemin de M' quand P se déplace*. On utilise la commande « trace » dans Cabri II pour valider les propositions des élèves.

On distribue ensuite aux élèves une feuille quadrillée sur laquelle est représenté, dans un repère cartésien, le chemin de M' avec seulement trois arches dessinées ; les axes du temps et de la hauteur de la cabine au sol y sont légendés. Puis on pose un nouveau problème de coïncidence :

> Le gérant décide de changer la hauteur de la lampe : il la met à 20 mètres à droite de la grande roue. La lampe s'allume désormais 1 minute toutes les 4 minutes.

Seul le binôme 1 utilise le « graphique bidimensionnel » pour résoudre ce problème, les autres binômes reprenant leurs procédures initiales malgré leur coût prohibitif (la première coïncidence n'a lieu qu'au 4ème tour). Le binôme 1 réalise une graduation pour indiquer des durées d'éclairement de la lampe *mais sur la sinusoïde elle-même* : pour cela il la prolonge d'une arche (Figure 9).

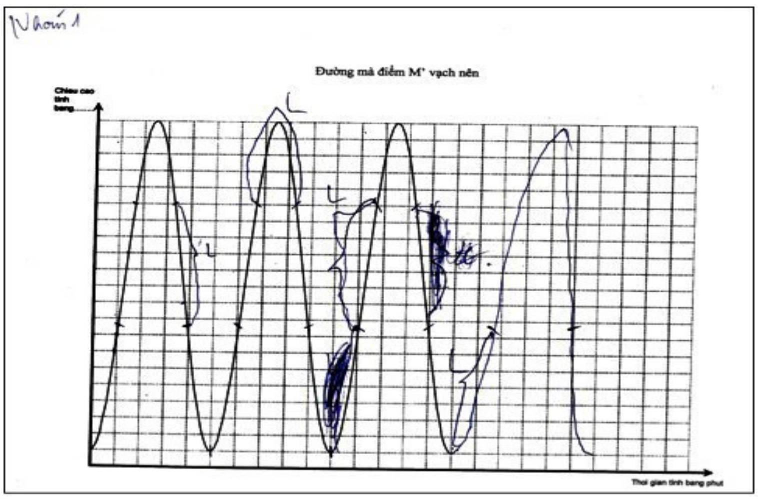


Figure 9. *Les marques du graphique du binôme 1*

L’erreur sur les grandeurs variables mises en relation par le graphique et celle sur la lecture des valeurs des grandeurs sur le graphique témoignent d’une articulation mathématiquement inadéquate entre les deux modèles C et O.

• ***Replié sur des segments parallèles : temps linéaire discret***

Le temps linéaire est replié sur des segments parallèles (chaque segment représente une période – 5 minutes) comme la production du binôme 1 dans la phase 4.

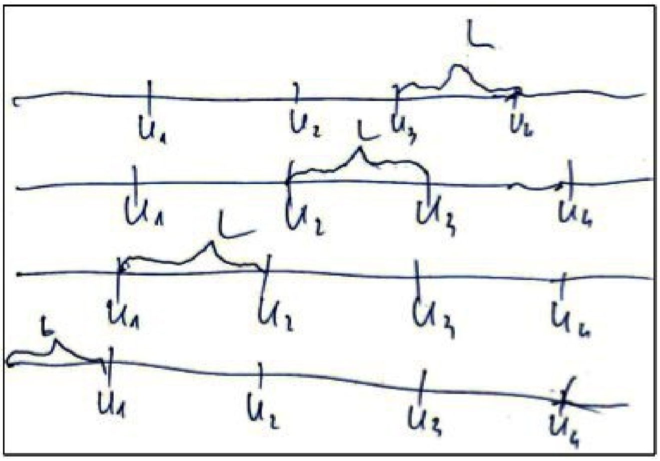


Figure 10. *Brouillon papier du binôme 1 dans la phase 4*

Ainsi, les procédures utilisées par ce binôme relèvent d’une stratégie « graphique bidimensionnel » (temps segmenté et tour). Les erreurs sur la position de L et sur les moments d’éclairement de L se compensent et la stratégie employée lui permet alors de trouver les réponses attendues. Voici comment il les formule :

Questions	**Réponses**	**Comment avez-vous fait ?**
M va-t-il gagner un voyage gratuit ?	Oui	Car la position de M varie chaque 4 minutes (1 tour= 5 minutes) donc le point M peut coïncider avec des temps éclairés
Si oui, au bout de combien de tours ?	4 tours	La hauteur de la lampe est 20 m qui correspond à la position 1/5 tour de cercle. Donc selon la figure et le calcul on peut calculer le nombre de tours pour que M gagne
Peut-il gagner d'autres voyages ?	Oui	Après 5 tours, le jeu et les temps éclairés se répétent. Donc M peut jouer 4 tours de plus et gagner.

Figure 11. *Réponse du binôme 1 dans la phase 4*

Conclusion

Pour introduire les fonctions périodiques par la modélisation, nous avons choisi un problème extra mathématique concernant les coïncidences de deux phénomènes périodiques « la cabine de M est en position L » et « la lampe est allumée ». L’expérimentation montre que le problème de coïncidence choisi est pertinent pour concevoir la périodicité de chacun des phénomènes étudiés et opérer avec eux.

Mise en évidence dans l'enquête épistémologique, l'imbrication des concepts de temps et de périodicité est apparue avec force dans la séquence expérimentale. La topologie du temps offre deux variantes, le cercle portant le temps circulaire qui fait des boucles (modèle C) ou la ligne portant le temps linéaire qui va de l'avant (modèle O).

L'expérimentation a montré la difficulté du passage du modèle C au modèle O et de leur articulation : cette difficulté résulte de la nécessite de détacher la grandeur choisie de sa représentation dans le modèle C pour la placer sur le deuxième axe d'un repère cartésien où le premier axe porte le temps déployé. On retrouve ici la difficulté pointée par Falcade (2006) de l'émergence du deuxième axe de la représentation fonctionnelle.

Le passage entre les modèles C et O se traduit, pour la variable temps, en un déploiement ou un repliement. Or si le déploiement est institutionnalisé avec la droite du temps, le repliement, quant à lui, n'existe qu'implicitement à travers l'enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique.

L'observation de la séquence atteste de la polymorphie de la formalisation de la périodicité chez les élèves. Elle met en évidence un autre repliement du temps que celui du cercle, celui en segments de droite parallèles que nous avons qualifié de bidimensionnel discret. Ainsi la typologie du temps n'est-elle pas aussi pauvre que le déclare Klein quand il dit : « Elle n'offre que deux variantes, la ligne et le cercle ».

Cette inventivité de la formalisation du temps contraste fortement avec l'absence, dans l'enseignement secondaire, de construction de représentations du temps opérationnelles dans les différents problèmes où la variable temps intervient. La richesse et la diversité des formalisations de la périodicité sont à mettre à l'acquis d'une conception de la situation 3 de l'expérimentation qui vise une deuxième rencontre avec les fonctions périodiques au-delà de leurs seules représentantes institutionnelles que sont les fonctions trigonométriques. En cela, cette deuxième rencontre peut être qualifiée de *nouvelle rencontre avec les fonctions trigonométriques*, provoquée par un processus de modélisation en rupture avec les pratiques institutionnelles puisque la construction des connaissances sur la périodicité est le produit d'un processus de mathématisation d'un phénomène du monde réel.

Références

BARREAU H. (1996) *Le Temps*. PUF. Que sais-je ? n°3180.

BENSON H. (1991) *Physique.* Adaptation de M. Séguin, B. Villeneuve, B. Marcheterre, R. Gagnon, De Boeck, 2009.

BIREBENT A., NGUYEN THI N. (2010) Une étude didactique de la modélisation des phénomènes périodiques. *Deuxième séminaire franco-vietnamien de didactique des mathématiques Didactique, Méthodologie, et Enseignement/ Apprentissage des Mathématiques.* Viêt Nam, Ho Chi Minh Ville, 26 et 27 avril 2010.

FALCADE R. (2006) *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier et Università degli studi di Torino.

FEYNMAN R. (1963) T*he Feyman lectures on Physics.* Version française de G. Delacote et M. Bloch. InterEditions : Paris, 1979.

GODEMENT M. (2001) *Analyse mathématique I, Convergence, fonction élémentaires*. 2ème édition corrigée. Springer.

GRUBER C. & BENOIT W. (1998) *Mécanique générale.* Presses polytechniques et universitaires romandes.

ISOZ V. (2011) Mécanique. http://www.sciences.ch/htmlfr/mecanique/mecanprincipes01.php , consulté le 25 février 2011.

ISRAEL G. (1996) *La mathématisation du réel*. Editions du Seuil : Paris.

KLEIN E. (2000) *L'unité de la physique.* Presses universitaires de France.

KLEIN E. (2006), Faut-il distinguer cours du temps et flèche du temps ? T*exte de la conférence présentée au colloque des Journées Nationales de l'UdPPC à Besançon* le 27 octobre 2006.

KRYSINSKA M., MERCIER A., SCHNEIDER M. (2009) Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels . *Recherches en didactique des mathématiques*, **87**, 247–304, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

LUMINET J.P. (1995) Matière, espace, temps, in E. Klein et M. Spiro (eds) *Le temps et sa flèche*. Editions Frontières. 59-80.

NGUYEN THI N. (2011) *La périodicité dans les enseignements scientifiques en France et au Viêt Nam : une ingénierie didactique d'introduction aux fonctions périodiques par la modélisation*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

NGUYEN THI N. (2011) Une étude didactique de la modélisation mathématique des phénomènes périodiques temporels. *Actes de la 16ième école d'été de Didactique des Mathématiques*. 21 – 28 août 2011, Carcassonne.

NGUYEN THI N. (2013) Fonctions trigonométriques et phénomènes périodiques : un accès à la modélisation dans l'enseignement secondaire ? *Petit x*, **91**, 27-48.

SCHNEIDER M. (1988) *Des objets mentaux 'aires' et 'volumes' au calcul des primitive*s. Thèse défendue à l'Université catholique de Louvain.

SENSEVY G. & MERCIER A. (1999) Pourquoi faire encore des mathématiques à l'école ? Le Télémaque, **15,** 69-78. Université de Caen.

SERFATI M. (2005) *La révolution symbolique.* Editions Pétra : Paris.

SOURY-LAVERGNE S. & BESSOT A. (2012) Modélisation des phénomènes variables à l'aide de la géométrie dynamique. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone*. 3 – 7 février 2012. Genève.