DE L'ASSIMILATION D'UNE THÉORIE DIDACTIQUE À SA MISE EN ŒUVRE DANS LES CLASSES. L'EXEMPLE DES PARCOURS D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

Nathalie CHEVALARIAS
IREM de Poitiers

Résumé. Ces dernières années, les recherches de l'IREM de Poitiers ont pris appui sur les travaux d'Yves Chevallard sur la théorie anthropologique du didactique, en particulier sur l'organisation des contenus à enseigner par des parcours d'étude et de recherche. Dans ses textes, plusieurs aspects nous ont amenés à nous interroger sur l'organisation de nos propres cours : Quel doit être le rôle de l'école en général ? Quelle place y prend le cours de mathématiques ? Quelles connaissances doit-il apporter pour ne pas paraître déconnecté des problèmes de la société ? Cet article met en regard des extraits des textes d'Yves Chevallard, la manière dont nous les avons assimilés au sein du groupe Lycée et les conséquences qu'ils ont eu sur la mise en œuvre des programmes dans nos classes. Au fil des années, notre recherche a évolué. Nous détaillons ici deux expériences menées en Seconde et un exemple en Première S. Ils permettent de mettre en évidence les éléments de la théorie qui sont restés la base commune de toutes nos expérimentations et ceux que nous avons plus ou moins privilégiés selon les cas.

Mots-clés. Activité d'étude et de recherche, Parcours d'étude et de recherche, Programmes et progressions, Construction du sens

Abstract. During the last years, the investigation of the IREM of Poitiers have been based on Yves Chevallard's works on the anthropological theory of the didactic, especially on the organization of teaching contents by study and research courses. In his texts, several aspects have led us to wonder about the organization of our own classes. What should be the role of school in general? What place is taken by mathematical lectures? What knowledge should be given to avoid school being disconnected from problems of society? This article makes links between some extracts of Yves Chevallard's texts, the way we have assimilated them in the group "Lycée" and their consequences for the implementation of the curriculum in our classes. Gradually, our research has changed. We develop here two examples for the French Seconde (students 15-16 years old) and an example for the Première S (scientific students 16-17 years old). They enable us to show the elements of the theory which remain the common basis of all our experimentations and those that have been more or less selected in each case.

Key-words. Study and Research Activities; Study and Research Courses; Curriculum; Construction of meaning

Introduction

Depuis près de huit ans, l'IREM de Poitiers est engagé dans une recherche qui guide les travaux des différents groupes et leurs interventions. Même si le questionnement initial reste le même, au bout de plusieurs années, la réflexion ne manque pas d'évoluer. Cet article se présente donc comme un bilan à la fois des textes assimilés et des rénovations didactiques qu'ils ont motivées dans nos classes. La première partie est organisée autour de nombreuses citations de Chevallard pour mettre en évidence les passages qui nous ont marqués et nous ont incités à réorganiser complètement nos cours : ceux sur le rôle de l'école et ceux sur la rupture entre l'école et la société. Ils sont suivis par des extraits sur les différents types de questions, sur la définition des activités d'étude et de recherche et celle des parcours d'étude et de recherche, leurs places par rapport à un cours traditionnel. Ce sont ceux qui nous ont guidés pour mettre en œuvre ce nouvel enseignement. Nous souhaitions qu'ils soient réunis pour faire comprendre nos démarches et les rendre accessibles à tout enseignant. La seconde partie de l'article est centrée sur la recherche de questions qui permettent d'organiser l'année entière. Sans rentrer dans les contenus précis des activités menées en classe[1], elle montre l'évolution qui s'est opérée dans notre manière d'appliquer les théories étudiées dans les constructions de nos différents cours ainsi que les questions que cette expérience soulève.

1. Le point de départ de nos expérimentations

Depuis leur création, un des rôles des IREM est d'assimiler les théories didactiques pour mieux les comprendre, les mettre en œuvre et les transmettre aux collègues. Cette phrase ne me paraît pas refléter la réalité. Je la remplacerais par celle-ci :
Les IREM ont été créés dans les années soixante-dix pour permettre de réfléchir à l'enseignement des mathématiques et essayer de l'améliorer ; ils se voulaient un lieu de rencontre et de réflexion des enseignants de mathématiques sur leurs pratiques. Ils se sont ensuite naturellement intéressés aux recherches sur les théories didactiques pour mieux les comprendre, les mettre en œuvre et les transmettre aux enseignants.
De 1999 à 2002, une précédente recherche s'appuyant sur des moyens de l'INRP et des différents IREM, dont celui de Poitiers, a ainsi permis d'utiliser des outils empruntés à différentes théories de didactique des mathématiques (théorie des situations, approche anthropologique, jeux de cadres, débat scientifique) pour observer et analyser des pratiques dans les classes[2]. A partir de 2005, la commission Inter-IREM Didactique initie, à nouveau avec l'aide de l'INRP[3], une nouvelle recherche avec l'idée de « refonder l'enseignement des mathématiques dans le secondaire »[4]. Son but est de pouvoir appliquer dans les classes des éléments de la théorie anthropologique du didactique développée par Chevallard dans plusieurs articles parus entre 1998 et 2003. Au fil des années, ces articles initiaux ont été complétés par d'autres ; on en trouvera une liste (non exhaustive !) en bibliographie.

1.1. Le rôle de l'École

Dans ces écrits, plusieurs aspects vont orienter cette recherche. En tout premier lieu, Chevallard insiste sur le rôle actuel de l'école et celui qu'il estime qu'elle devrait tenir. Il déplore en particulier la forme que prennent certains savoirs qui y sont enseignés :

> L'École devient alors un lieu où la rencontre avec ces étranges bibelots culturels en quoi se transmuent les savoirs scolaires semble largement immotivée, et, finit-on par penser,

1 Pour le détail des exemples correspondants aux progressions de seconde commentées dans cet article, on pourra consulter Gaud & Minet (2009), IREM de Poitiers (oct 2011 et fev 2011). Pour la classe de Première, une brochure est en cours d'écriture.

2 Cette recherche a donné lieu à la publication de *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes* coordonnée par Jacques Colomb, Jacques Douaire et Robert Noirfalise, 2003, INRP.

3 Devenue Ifé depuis 2010.

4 En référence au titre de la réunion de la CII Didactique, La Grande-Motte, 13 et 14 mai 2005.

> presque forcément arbitraire ; où, par obligation sociale et habitude culturelle, on passe quelques années de sa jeune vie à fréquenter des savoirs que la tradition impose sans autre motif que, au mieux, le bénéfice éventuel d'une valeur formative réputée sans doute par quelques-uns « essentielle », mais en vérité abstraite, indicible, en suspens par rapport à la vie extrascolaire présente et à venir – surtout à venir. (Chevallard 2005, p.249-250)

L'école apporte donc des connaissances qui, paradoxalement, apparaissent déconnectées des besoins des hommes. Pour renouer le lien et ainsi retrouver des savoirs qui soient motivés, non arbitraires, Chevallard les replace en relation avec des questions. A l'école, dans le temps d'enseignement, les élèves doivent pouvoir être confrontés à des questions : un travail formateur est alors de les comprendre, de progresser dans une réflexion, d'y trouver des réponses personnelles qui pourront être discutées. Ils doivent être capables d'analyser leur propre réponse (que Chevallard nomme réponse « cœur ») par rapport à une réponse institutionnelle (réponse « poinçon ») qui n'a pas à leur être imposée d'emblée :

> Des questions Q se posent ; faire la vie meilleure, c'est concourir à apporter à ces questions Q des réponses R jugées les meilleures possibles. Quelle contribution l'École peut-elle donc apporter à cet effort pour aller vers la vie bonne ? L'École a d'abord une fonction critique : elle doit aider à déconstruire les questionnements tout faits, les questions Q obligées, qui sont posées mais qui, peut-être, ne se posent pas, ou ne se posent plus, etc. Elle doit aussi aider, bien entendu, à analyser, à évaluer les réponses R toutes faites qu'apporte la culture, ces réponses que j'ai pris l'habitude de noter $R^{\lozenge}$, ce que je lis « r poinçon », parce qu'il s'agit là toujours, peu ou prou, des réponses « estampillées » en quelque institution ou en quelque ensemble d'institutions – des réponses institutionnelles, donc. Mais l'École a encore et surtout une fonction essentielle d'aide à la production de réponses R, que je nomme cette fois $R^{\heartsuit}$ (« r cœur ») en les référant ainsi à ceux qui les produisent – ce sont des réponses selon leur cœur –, mais en soulignant qu'elles seront pour tous les autres, ou pour les mêmes mais plus tard ou ailleurs, simplement, des réponses $R^{\lozenge}$. (Chevallard 2005, p.252)

De plus, si le fait d'imposer des réponses institutionnelles est un premier aspect qui peut être critiqué, on peut même trouver des situations où l'école donne de telles réponses à des questions qu'elle ne transmet même plus aux élèves, voire qu'elle a oubliées. On étudie des réponses pour leur technicité, pour leur beauté, pour leur facilité, etc., mais plus pour leur apport à un questionnement !

> Au départ, dans une histoire des enseignements scolaires que je brosse en la stylisant, l'enjeu didactique ♥ est une *question* Q – une question en *Comment ?*(« Comment effectuer mentalement la division d'un entier par un entier que l'on sait décomposer en facteurs plus petits que 10 ? »), qui appelle en réponse une technique, ou une question en *Pourquoi ?*(« Pourquoi peut-on "laisser tomber" les restes dans les divisions successives d'un entier par les différents facteurs d'une décomposition donnée du diviseur ? »), qui appelle une réponse *technologico-théorique*. Mais bientôt, par un court-circuit culturel et didactique, « étudier Q » est regardé comme un synonyme inutile d'une expression qui, institutionnellement, la supplante : « apprendre R ». Alors, sans encore que R perde tout à fait son statut de réponse, les questions commencent à s'effacer […] les réponses R cessent d'être regardées comme telles et se trouvent hypostasiées en *œuvres* de la culture ayant valeur en soi et pour soi, œuvres dont les *raisons d'être*– d'être *là*, dans la culture, mais aussi dans le programme scolaire – *se sont perdues*. (Chevallard , 2007, p.725)

1.2. La rupture avec la société

Enseigner des savoirs en apparence inutiles, ne pas apprendre à se questionner, ne pas chercher à résoudre de vrais problèmes, tous ces constats mettent en évidence la rupture entre notre école et la société. Envisager l'enseignement des mathématiques sous un angle de réponses à des questions permet alors au contraire de motiver les connaissances des programmes actuels ou celles qui doivent être choisies quand un nouveau programme est élaboré. En effet, pour Chevallard, « ce qui fait la puissance praxéologique d'un savoir, ce sont les *problèmes* qu'il permet de résoudre ; ce sont les questions auxquelles il permet d'apporter réponse. C'est le désir – s'il existe ! – de résoudre mathématiquement tel problème (et non « l'amour » idéalisé de telle ou telle notion mathématique) qui conduit à recourir à tel ou tel outil de plomberie mathématique. » (Chevallard 2009, p.25) De plus ce point de vue rétablit les liens dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique :

> Au-dessus de la discipline – des disciplines – se trouvent les échelons de la *pédagogie*, de l'*École*, de la *Société*, de la *Civilisation*. Je ne les commenterai pas davantage ici, sauf en énonçant ce principe essentiel que traduit l'échelle proposée : ce qu'on peut faire à tel échelon – par exemple dans l'étude de tel *thème* mathématique – dépend des *contraintes* imposées et des *conditions* créées par les échelons supérieurs (c'est ce que signifient les flèches descendantes du schéma). […]
> Il est bien entendu que, inversement, le fait de parvenir, en un certain échelon de détermination didactique, à modifier le jeu des conditions et des contraintes a, en règle générale, des répercussions *aux autres niveaux*, jusqu'au niveau de la civilisation si l'on suit le schéma proposé ! C'est ce que signifient, bien sûr, les flèches ascendantes du schéma. (Chevallard 2005, p.242-243)

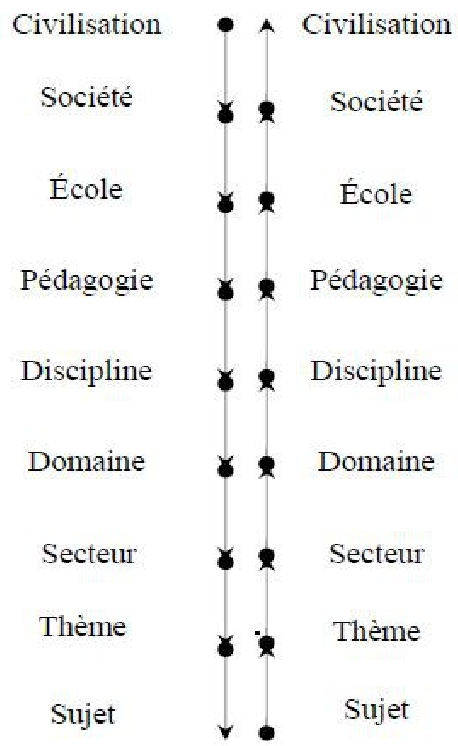

Figure 1. *Échelle des niveaux de codétermination didactique*

Le cours de mathématiques fait partie d'un cadre bien plus large qui ne doit pas se réduire aux seuls contenus de la discipline déconnectés de la vie extérieure à l'École. Si l'enseignement est soumis à un certain nombre de contraintes directes (les programmes, la forme de l'examen, les horaires, …) ou indirectes (besoins de l'industrie, de la recherche, développements de nouvelles connaissances,…), il se doit d'apporter en retour des éléments de savoirs utiles à cette société. Si les mathématiques enseignées n'ont pas d'autre intérêt que de former l'esprit au raisonnement abstrait, elles prennent le risque d'être jugées inutiles par une société qui décide des contenus de l'éducation de ses enfants. Chevallard cite souvent à ce propos l'exemple de l'enseignement du latin. Longtemps jugé comme fondamental dans la formation au lycée, il est réduit actuellement à quelques heures d'option pour une poignée d'élèves.

Actuellement, l'enseignement des mathématiques souffre déjà de ce ressenti négatif de la part des élèves. Dans le texte de 2009 « Quel avenir pour les mathématiques au collège et au lycée ? Les mathématiques dans la cité » Chevallard cite quelques résultats d'une étude sur le lycée[5] qui montre une différence négative entre les opinions positives en faveur des mathématiques (27%) et les opinions négatives (73%). Elles arrivent derrière les sciences physiques, puis très loin derrière les autres disciplines dont les sciences économiques (78 % de citations positives et 22 % de citations négatives). Cette position est illustrée par le graphique suivant, extrait de l'étude précédemment citée (Chevallard 2009, p.11) :

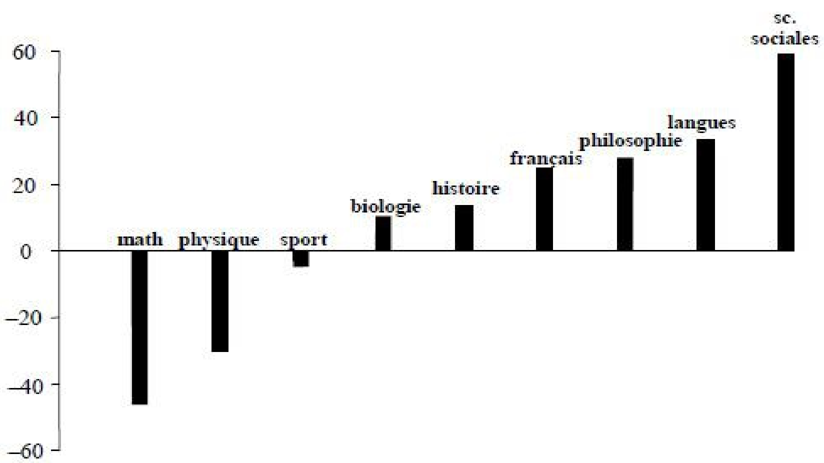

Figure 2. *Différences entre opinions positives et négatives sur les disciplines*

Une lecture plus fine de cette étude montre aussi que les mathématiques sont jugées légèrement plus importantes pour la vie professionnelle que la biologie ou l'histoire-géographie, mais qu'elles sont nettement dépassées par le français ou les langues. Elles figurent parmi les matières les plus jugées « ennuyeuses » et « inutiles »[6]. Il devient donc indispensable de réagir.

5 Étude de Roger Establet, Jean-Luc Fauguet, Georges Felouzis, Sylviane Feuilladieu et Pierre Vergès, *Radiographie du peuple lycéen. Pour changer le lycée,* ESF, Paris, 2005.

6 Voir les différents graphiques comparatifs dans Chevallard (2009).

2. But de nos expérimentations : redonner du sens à travers des PER

En jouant sur les choix pédagogiques et didactiques, notamment autour du rôle des questions déjà évoqué, le professeur de mathématiques doit avoir la possibilité de resituer sa discipline dans la société. Dans ce but, Chevallard fait des propositions pour réorganiser les cours, tout en restant dans le cadre institutionnel.

2.1. PER et AER

Chevallard propose de structurer le cours de mathématiques à l'aide de PER « parcours d'étude et de recherche », eux-mêmes composés par différentes AER « activités d'étude et de recherche ». Partant d'une question, le PER va permettre d'élaborer un certain nombre de réponses, apportées par la réflexion autour de chaque AER, et de dégager les savoirs mathématiques utiles à la constitution de ces réponses.

> Le point de départ d'une AER se trouve, en principe, dans l'évocation (au moins), voire dans la réalisation dans la classe (au plus) d'une *situation du monde* $\mathsf{S}=\{\sigma;\checkmark; \mathsf{X}, \mathsf{X}',\mathsf{X}'',...\}$ incluant un *système* σ et des *acteurs* X, X', X'', etc., ayant à accomplir une *tâche* $\checkmark$ – la tâche « coche » – relative à σ. (Chevallard 2007, p.734)
>
> Au point de départ d'un PER ainsi entendu, il y a bien sûr une question première Q, mais une question à laquelle on n'assigne pas pour objectif la rencontre, le « forçage » de tel élément mathématique déterminé – de tel théorème, de telle définition, de telle notation, de telle technique, etc. Il convient au contraire que l'étude au long cours de Q ait une puissance génératrice forte, qu'elle puisse se spécifier à travers un grand nombre de questions « secondes », faisant l'objet d'AER particulières. (Chevallard 2007, p.744)

Reprenant l'idée première des recherches normalement menées en TPE à partir d'une problématique qui amène à rencontrer diverses connaissances de plusieurs disciplines, ces PER doivent permettre de réorganiser les contenus au sein même du cours de mathématiques. Les rencontres avec des situations à étudier ont lieu à travers les AER. Concrètement, lors de la présentation du parcours aux élèves, le professeur pose une question, il peut montrer différents domaines de la vie dans lesquels elle se pose, différents aspects qu'elle recouvre, différents problèmes auxquels elle correspond. Mais attention, si ce temps est fondamental pour que les élèves comprennent l'enjeu du parcours, il n'est pas suffisant :

> Il ne suffit pas pourtant de *déclarer* les raisons d'être d'une entité mathématique : encore faut-il organiser la *rencontre vécue* avec elle dans une *situation* où son utilité – pour résoudre d'une certaine façon des problèmes d'un certain type – s'impose de façon éclatante.
>
> Dans la formation du citoyen, il s'agit là d'une exigence fondatrice, qui conditionne le développement de la capacité, si essentielle dans tous les aspects de la vie sociale, à affronter un problème sans pour autant avoir reçu sur le sujet un enseignement en bonne et due forme ! (Chevallard 2003, p.22)

Cette introduction doit bien être suivie de travaux qui prolongent et approfondissent la réflexion sur la question soulevée. Tout le temps de classe s'articule alors autour d'elle. Nous avons expérimenté plusieurs types de questions, qui seront détaillées dans la suite de l'article, mais dans tous les cas, le point commun de nos démarches a été de chercher à redonner du sens aux mathématiques enseignées grâce à une réorganisation du temps de classe autour des AER.

2.2. La réorganisation du temps de la classe

L'affirmation de l'intérêt d'une notion par le professeur ne suffit pas si elle est suivie d'un cours traditionnel déconnecté du problème initial. Les élèves doivent eux-mêmes se confronter véritablement au problème posé par le PER à travers les AER. Peu importe le type de question choisi comme point de départ, les AER sont le moment privilégié de la réflexion puis de la rencontre avec les connaissances à partir d'un vrai problème. Elles obligent à une réorganisation du cours :

> Contre la domination de la structure binaire Cours-Exercices, à l'authenticité épistémologique rien moins que certaine (elle décrit de manière figée une mise en forme elle-même contestable du *produit* du travail mathématique, non l'organisation du travail de *production* lui-même), il convient alors de faire vivre une organisation didactique qui, pour reprendre la terminologie de Bouligand, assume le dualisme problèmes-synthèse en organisant la *rencontre en situation* avec la matière des savoirs à étudier, dans le cadre *d'activités d'étude et de recherche* (AER) incluant des *inventaires* régulièrement actualisés, préparatoires à une *synthèse* qui assure la mise en forme des produits de l'activité, pour aboutir à une organisation de savoir que l'on soumettra à un « *travail* » réglé qui autorise tant la mise au point et l'évaluation de l'organisation émergente que l'amélioration et l'évaluation de la maîtrise que l'on en a. S'impose ainsi une structure *ternaire* de l'étude (AER-Synthèse-Exercices et problèmes) qui dessine à gros traits l'organisation didactique de base d'un enseignement rénové de la *production* des mathématiques – et non des seuls *produits* mathématiques. (Chevallard 2003, p.21)

Quelle que soit la question de départ du PER, les AER doivent être organisées pour y apporter des réponses qui peuvent être de plus en plus précises, ou de plus en plus techniques, qui peuvent couvrir différents aspects de la question ou différents domaines où elle se pose. Dans tous les cas, une AER n'est pas un travail isolé mais elle s'intègre avec d'autres AER à l'intérieur du parcours. Le temps de cours ne doit pas être une « succession d'AER dont chacune ne ferait guère que représenter, telle une ambassade avenante, un savoir monumental prenant sa place dans une procession pour l'essentiel inchangée. » (Chevallard 2005, p.259) De plus ces AER, même si elles incluent le nom d' « activité », se distinguent par leur contenu de ce que sont devenues concrètement les activités dans les classes :

> L'observation des classes ordinaires montrait que, loin en général de cannibaliser l'organisation binaire de l'étude en « cours » et « exercices (d'application) », les activités en étaient réduites – quand elles n'étaient pas bientôt éliminées – à un rôle introductif, de « préparation », comme le souligne d'ailleurs l'expression d'activités *préparatoires* utilisée par certains professeurs, alors même que cette expression ne figure nulle part dans les programmes et autres textes officiels. Par contraste, une AER n'a pas vocation à assumer une fonction didactique d'« échauffement », de *warm-up* comme on dit en anglais, mais vient occuper *le cœur même de la vie mathématique* de la classe. (Chevallard 2007, p.734)

L'AER est donc le temps de la réflexion, où s'élabore le questionnement, où se mettent en place des réponses qui vont amener aux contenus mathématiques du programme. D'une situation posée vont ainsi se dégager des techniques spécifiques que les connaissances mathématiques plus théoriques vont justifier, préciser, améliorer.

L'aspect général, interdisciplinaire, utilitaire[7] de l'AER ne doit pas faire alors oublier tout le versant technique et abstrait des mathématiques, au contraire :

> Le moment de l'institutionnalisation, c'est donc d'abord le moment où, dans la construction « brute » qui, peu à peu, a émergé de l'étude, vont être séparés, par un mouvement qui engage l'avenir, le « *mathématiquement nécessaire* », qui sera conservé, et le « *mathématiquement contingent* », qui, bientôt, n'apparaîtra plus que comme un épisode parmi d'autres de l'aventure intellectuelle vécue pour créer l'organisation mathématique visée. Le moment du *travail de l'organisation mathématique*, et en particulier du travail « *de la technique* », est occupé tout à la fois à améliorer la technique en la rendant *plus efficace et plus fiable* (ce qui exige généralement d'en retoucher la technologie, voire la théorie) et à accroître *la maîtrise qu'on en a*, […] (Chevallard 2007, p.731)

Une fois d'accord avec ce choix de structure pour le cours, puisque le point de départ d'un PER est une question, le problème reste donc de trouver des questions pertinentes à étudier dans les classes.

2.3. Les PER comme réponse à une question

Comment trouver des questions ? Où les chercher ? Comment choisir celles qui seront pertinentes à étudier avec les élèves ? Ce souci, qui peut être celui du professeur, doit être avant celui de toute la profession, et dans cette optique, les IREM ont leur rôle à jouer. En participant à la recherche initiée par la commission Inter-IREM Didactique et l'INRP, l'IREM de Poitiers a étudié des questions qui doivent permettre concrètement, dans les classes, de redonner du sens à l'enseignement des mathématiques. Chevallard insiste sur cette importance du « sens » dans plusieurs de ses conférences et de ses textes comme par exemple dans une conférence en 2003 à Metz :

> « Redonner sens » aux mathématiques et aux sciences, au fait de les enseigner (d'un côté) et de les apprendre (de l'autre), telle est l'une des formulations les plus usuelles du problème d'ensemble auquel l'état de la société et des mathématiques nous confronte aujourd'hui. En bien des cas, une question de mathématiques Q naît au sein d'une « situation du monde » dans laquelle certaines personnes doivent accomplir une certaine tâche *non mathématique*– mais, en quelque façon, *mathématiquement problématique*– engendrée par une activité sociale que l'on se borne alors *à évoquer* et qui se trouvera bientôt expulsée de la scène mathématique ou n'y figurera plus qu'à titre de lointain décorum. Ainsi, alors même que les mathématiques et les sciences nourrissent leur développement des problèmes que soulève la vie sociale dans son infinie diversité, celle-ci n'y apparaît-elle au mieux, dans l'état actuel des choses, que comme un horizon dénué de signification à l'endroit des gestes propres aux disciplines de connaissance qui y trouvent pourtant leur premier moteur. Les mathématiques, on l'a suggéré, se retirent alors du monde ; et le monde, en conséquence, s'éloigne des mathématiques. Que faire ? (Chevallard 2003, p.22)

Avant même d'être capable de poser des questions aux élèves et de les faire étudier, il faudra déjà que le professeur lui-même sache pourquoi il enseigne telle ou telle notion plutôt qu'une autre. Si les différents contenus ont des raisons d'être, celles-ci sont souvent oubliées depuis longtemps. Chevallard utilise pour décrire ce phénomène une comparaison bien imagée : « l'enseignement des mathématiques ressemble aujourd'hui à une boutique dont les employés ne sauraient plus clairement *à quoi servent* – ou

7 Même si ce terme prend un côté très péjoratif chez certains collègues de mathématiques.

peuvent servir – ce qu'ils vendent pourtant tous les jours, dans ce qui ressemble fort à une vente forcée. » (2009, p.20).
Il serait au minimum souhaitable que le professeur situe, pour lui et pour ses élèves, l'ensemble des connaissances mathématiques les unes par rapport aux autres, par rapport aux domaines mathématiques pour que le tout apparaisse comme une réflexion organisée et non pas comme un ensemble de petits bouts de mathématiques dissociés :

> Il en irait autrement, par exemple, si l'usage était établi que le professeur présente en début d'année, dans le cadre d'une « leçon inaugurale », le *programme d'études* de la classe, en exposant pour cela chacun des *domaines* qui le composent, un tel exposé étant ensuite complété, au cours de l'année, par une présentation des différents *secteurs* d'études composant un domaine, en relation avec l'avancée de la classe dans l'étude du programme.
>
> C'est évoquer là un *dispositif* didactique, producteur d'effets qui n'ont pas aujourd'hui motif à exister : l'obligation pour le professeur de présenter *domaines* et *secteurs* et d'y situer les *thèmes* et *sujets* qui seront ensuite étudiés. Le fait que[…] le professeur de mathématiques ne soit pas amené à situer les thèmes qu'il enseigne dans les secteurs et les domaines que dessine le programme le conduit à faire défiler ces thèmes, et les sujets qui leur sont associés dans le cours d'études, les uns après les autres, à la queue leu leu […] (Chevallard 2002, p.43)

Pour trouver cette cohérence, le professeur doit se demander pourquoi telle connaissance mérite d'être étudiée, dans quel domaine des mathématiques elle s'impose, dans quelle situation plus générale elle peut être un élément de réponse ou de compréhension. Ce qui est souhaitable c'est que la profession toute entière s'empare de ce questionnement. Chaque professeur individuellement peut trouver des thèmes qu'il aime et qu'il veut faire étudier à ses élèves, mais l'enseignement ne peut se contenter de s'organiser autour de goûts individuels et l'ensemble des professeurs doit pouvoir connaître les raisons d'être de tous les contenus enseignés.

> Dans l'enseignement des mathématiques contemporain, on suppose sans doute que ce qu'on étudie a ou aura des usages, qui en seraient des raisons d'être. Mais, en bien des cas, on ne sait plus *dire* lesquels. Pourquoi par exemple la notion d'angle ? Pourquoi les triangles ? Pourquoi le concours des médianes (ou des hauteurs, etc.) ? Pourquoi les angles saillants et les angles rentrants ? Pourquoi les polynômes ? Pourquoi les fonctions continues ? Pourquoi les droites ? Pourquoi le parallélisme de droites ? À cela, nulle réponse explicite, claire, fondatrice d'un pacte d'étude républicain. Les savoirs mathématiques s'imposent aux élèves (et aux professeurs) sans que l'on rende jamais raison de leur présence dans le curriculum, ce qu'il appartiendrait pourtant à *la profession* de faire (en entendant ici par profession le vaste collectif des professeurs de mathématiques auxquels s'ajoutent formateurs, chercheurs, responsables associatifs, etc). (Chevallard (2006), p.446)
>
> *La profession* (et non, certes, chaque professeur, agissant comme s'il était seul au monde) doit pouvoir exciper de *raisons d'être* qui soient à la fois authentiques au plan épistémologique et social, cohérentes au plan curriculaire, et susceptibles d'être rencontrées, reçues, vécues, intégrées par les élèves du niveau d'études visé à travers des situations didactiques appropriées. (Ibidem, p.453)

A ce type de question, « Pourquoi les triangles ? Pourquoi le concours des médianes (ou des hauteurs, etc.) ? Pourquoi les angles saillants et les angles rentrants ? Pourquoi les polynômes ? », des réponses internes aux mathématiques peuvent être apportées. Mais ce ne sont pas les seules, les raisons d'être des notions peuvent être certes trouvées dans des questionnements mathématiques mais beaucoup d'entre elles vont nécessiter de regarder en dehors des mathématiques :

> Permettre aux mathématiques enseignées de sortir de leur splendide isolement pour retrouver le monde, alors, c'est non seulement faire « travailler » les mathématiques sur des questions Q non nécessairement mathématiques (comme il en va dans les TPE ou les IDD), mais les y faire travailler *de concert avec d'autres savoirs*, en une symphonie *codisciplinaire* où les mathématiques concourent avec d'autres disciplines à élucider des conditions et contraintes de toute nature qui déterminent la production de réponses R à des questions Q. Mais le même schéma vaut en vérité tout autant si la question posée, Q, est de nature mathématique. (Chevallard 2005, p.256-257)

Cet isolement complet est récent, des situations existaient il y a plusieurs décennies encore à travers les mathématiques « mixtes »[8]. En 1902, le programme de mathématiques intègre de la cinématique, de la statique, de la dynamique, de la géométrie descriptive, de la cosmographie. Les problèmes issus de ces domaines appellent des réponses nécessitant des savoirs mathématiques. La topographie fournit des problèmes où intervient la géométrie jusqu'au milieu du XX^{e} siècle. La cosmographie fait encore partie des programmes des séries littéraires en 1982 : les lois de Kepler, les calendriers, les satellites naturels, … « La longue intégration à la discipline mathématique des éléments de topographie prendra fin dans la première moitié du XX^{e} siècle. Tout au long de ce siècle, les mathématiques enseignées au secondaire n'ont en fait pas cessé d'être progressivement expurgées de leurs organisations mathématiques *« mixtes »*, c'est-à-dire des organisations praxéologiques mettant en jeu, à côté d'objets mathématiques, un certain nombre d'objets *non mathématiques*. » (Chevallard 2002, p.48)

Cette disparition de ces branches de l'enseignement des mathématiques nous a fait oublier des questions qui pouvaient motiver les contenus théoriques, il faudrait être capable de les retrouver. De plus il est urgent de ne pas perdre non seulement cette culture interdisciplinaire mais aussi celle plus interne aux mathématiques. Chevallard tire ainsi la sonnette d'alarme :

> Il y a belle lurette qu'on n'étudie plus que par hasard, dans la classe de mathématiques, les usages extramathématiques autrefois les plus classiques des mathématiques étudiées. Mais un nouvel effondrement guette. Peu à peu, les usages *intramathématiques* eux-mêmes deviennent méconnus, en sorte que l'univers mathématique enseigné est désormais largement *immotivé*. On touche ici au thème de l'*utilité* des savoirs, de leurs *raisons d'être*, de leur motivation, […] (Chevallard 2006, p.445)

8 Yves Chevallard cite dans Chevallard 2006, p.443, un extrait de *l'Encyclopédie ou Dictionnaire raisonnée des Sciences, des Arts et des Métiers* où D'Alembert définit ces mathématiques mixtes : Les Mathématiques se divisent en deux classes ; la première, qu'on appelle *Mathématiques pures*, considère les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite : or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable : dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue : dans le premier cas, les Mathématiques pures s'appellent Arithmétique, dans le second, Géométrie [...] La seconde classe s'appelle *Mathématiques mixtes* ; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable ; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers [...]. Du nombre des Mathématiques mixtes, sont la Méchanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, &c.

Un vaste travail s'ouvre donc devant nous : être capable de retrouver les motivations à la fois internes et externes aux notions mathématiques que nous enseignons au collège, au lycée, à l'université. Les programmes sont une longue suite de contenus. Les raisons et les questions qui les motivent doivent permettre d'y retrouver une certaine cohérence à travers des PER :

> « L'ensemble des PER d'une année scolaire doit idéalement permettre de « couvrir » le programme sans lacune, mais non sans un certain nombre de redondances utiles aux apprentissages. » (Chevallard 2005, p.259)

3. Le choix des questions à la base des PER

Depuis le début de nos recherches, nous avons mené différentes expérimentations, en seconde tout d'abord, puis en Première S. Modifier l'organisation de toute une année a été une démarche progressive. Au fil du temps, nos choix de questions et la manière d'organiser les réponses ont évolué.

3.1. Se questionner sur les items du programme

Puisque les programmes restent les textes officiels qui régissent les contenus enseignés, une première idée pour chercher les questions qui guideront les PER est de partir des grands domaines du programme, ses paragraphes et ses items et pour chacun, se demander pourquoi il est là. C'est une première piste qu'envisage Chevallard dès 2003 en insistant à nouveau sur le sens à retrouver pour chaque notion enseignée :

> Si l'on veut échapper à un enseignement *insensé* des mathématiques, il convient ainsi de retrouver, pour chaque objet mathématique à enseigner – notion, notation, technique, résultat, etc. –, ce qu'on a appelé plus haut son *utilité*, ses *raisons d'être*, ses *motivations*, identifiées à ses *fonctionnalités*. Pourquoi, ainsi, étudie-t-on avec tant d'insistance, en géométrie plane, le *triangle* ? Pourquoi, de même, s'obstine-t-on à vouloir « *chasser les radicaux* » des dénominateurs des fractions numériques ? Dans le premier cas, on s'approchera de la réponse si l'on est déjà capable de rapprocher la question soulevée de celle-ci : pourquoi, en géométrie *dans l'espace*, met-on tant d'énergie à étudier le *tétraèdre* ? Dans le deuxième cas, on sera sur la voie de la vérité en soulevant d'autres questions de même forme : pourquoi simplifier une fraction, développer une écriture algébrique, décomposer un vecteur sur une base, etc. ? Tout ainsi doit retrouver son sens, sa place, sa pertinence – celle que fonde le bon usage de la connaissance.(2003, p.21)

La profession pourrait alors, suivant cette idée, établir une longue liste de réponses pour que chaque enseignant dispose d'un bagage culturel sur les raisons d'être de tout ce qu'il enseigne, disponible pour organiser ses cours avec le souci que les contenus prennent sens pour les élèves.

Ce questionnement a été l'un des premiers travaux de l'IREM de Poitiers au tout début de la recherche, en particulier sur le programme de la classe de seconde. En nous demandant pourquoi étudier la géométrie, les fonctions, les statistiques, nous avons établi une liste de questions et de réponses qui nous a guidés pour organiser une progression.

Au début de notre recherche en 2005, le programme en vigueur était celui du BO hors-série n°2 du 30 août 2001, il a ensuite changé à la rentrée 2009 pour celui du BO n° 30 du 23 juillet 2009. Le travail entrepris a pu se prolonger sans trop de difficultés car, même si certaines formulations de contenus avaient changé, si certains avaient été remplacés, les questions (mathématiques ou non) dont la résolution fait appel aux connaissances du niveau « seconde » restent valables.

Notre démarche initiale a été expliquée dans un article de Dominique Gaud et Nicolas Minet (2009) où ils détaillent un parcours de géométrie construit à partir de la question « Comment construire une figure géométrique astreinte à des conditions ? ». Cette dernière était une des questions que nous avions retenues après une réflexion sur l'ensemble du programme, reprenant les grandes parties une par une. Pour chaque partie, nous avons cherché ses raisons d'être dans et hors des mathématiques, dans les mathématiques passées et actuelles[9] puis les travaux mathématiques qu'elle génère ; ces travaux nous ont permis d'écrire des exemples de questions pour lesquelles nous avons enfin cherché quels contenus du programme pouvaient alors être traités dans ce cadre.

Pour la géométrie, des recherches dans les textes historiques et dans les utilisations actuelles nous ont permis de relever son intérêt en architecture, en astronomie, en géographie, dans les arts. Nous avons ensuite listé des tâches mathématiques comme construire des figures, comparer des grandeurs, juger si une figure est exacte, étudier des lieux, calculer des éléments métriques, étudier des courbes, exprimer la dépendance entre deux éléments métriques, se repérer, construire des nombres, représenter un solide dans le plan, repérer des régularités d'une figure, etc.

Nous avons alors extrait des questions comme « Comment inscrire ou circonscrire une figure à une autre ? », « Comment comparer des aires (ou des volumes) ? », « Comment construire des figures ? », « Comment représenter un solide dans le plan ? », « Comment construire des nombres ? », … Chacune permet d'aborder de nombreux contenus du programme. Par exemple la question « Comment comparer des aires ? » conduit à calculer des longueurs, des angles, des aires, à utiliser les configurations de collège (théorème de Thalès, théorème de Pythagore, angles, …), à utiliser les triangles isométriques et semblables, à déterminer des relations algébriques, à travailler la notion de valeur exacte ou approchée, à transformer des écritures.

Nous avons effectué cette même recherche pour les fonctions et pour les statistiques, retenant par exemple des questions comme « Comment comparer des phénomènes quantifiables ? », « Comment optimiser ? », Comment prévoir à partir de données ? », « Comment estimer une proportion ? », « Comment résumer une série de données ? ».

Enfin, en opérant des choix parmi toutes ces questions nous avons construit une première progression, que nous avons mise en œuvre à partir de septembre 2006. Elle s'organise en chapitres classiques pour lesquels nous avons cherché quelles étaient les grandes questions qui pouvaient être en jeu.

---

9 Il est intéressant de remarquer que toutes les époques fournissent des exemples de situations du monde qui ont donné lieu à des problèmes mathématiques, dans la géométrie grecque (cf. Vitrac, 2005) comme dans la géométrie descriptive de Monge. On trouvera des exemples et des références dans les deux brochures IREM de Poitiers (fev 2011) et IREM de Poitiers (oct 2011).

Chapitre	Questions en jeu	Contenus succincts du programme
Statistiques	Comment résumer une série de données ? Comment estimer une proportion ?	Médiane, mode, étendue, moyenne, … Simulations, fluctuation d'échantillonnage, sondages
Géométrie élémentaire	Comment construire des figures ? Comment inscrire ou circonscrire une figure à une autre ?	Reprise de la géométrie de collège sur des problèmes. Calcul algébrique Triangles isométriques
Fonctions 1	Comment optimiser ? Comment prévoir à partir de données ?	Courbe représentative, lecture graphique Notations, vocabulaire, exprimer une quantité en fonction d'autre ; mise en équation ; Résolutions d'(in)équations
Nombres	Comment construire des figures ? Comment construire des nombres ? Comment algébriser un problème de géométrie ?	Arithmétique ; Calcul algébrique, géométrie de collège ; Ensemble de nombres, valeurs exacte et approchée. Triangles semblables
Géométrie dans l'espace	Comment représenter un solide dans le plan ?	Positions relatives, règles d'incidence Orthogonalité
Fonctions 2	Comment optimiser ? Comment prévoir à partir de données ?	Fonction de référence, fonctions linéaires et affines ; Étude algébrique d'extremum, de sens de variation
Transforma-tions	Comment construire une figure ?	Utilisation des transformations dans des démonstrations, triangles isométriques
Géométrie repérée	Comment algébriser un problème de géométrie ?	Repérage dans le plan, sur une droite ; Vecteurs ; Équation de droites, droites parallèles ; Intersection de droites (systèmes)

Tableau 1. *Première progression de seconde en 2006*

Ces grandes questions ont alors guidé les choix d'activités que nous proposions pour découvrir les contenus du chapitre, sans nécessairement être clairement identifiées pour l'élève. Dans certains chapitres, ces AER pouvaient se suivre sur des points différents du programme sans forcément donner l'impression d'un parcours à travers une question. Cas extrême, dans certains chapitres, il n'y avait qu'une seule AER, donc pas de parcours. Le chapitre de géométrie plane était sûrement alors le plus abouti[10]. Il comportait une introduction générale qui situait la géométrie dans les activités humaines présentes ou passés. Des activités s'enchaînaient ensuite autour de la question « comment inscrire ou circonscrire une figure ? », chacune faisant découvrir de nouvelles notions ou de nouvelles méthodes de démonstration.

Nous avons donc travaillé dans cette optique pour d'autres chapitres, en particulier ceux sur les fonctions pour lesquelles les questions que nous avions relevées se mêlaient dans chaque chapitre. Les questions « Comment optimiser ? » et « Comment prévoir à partir de données ? » étaient abordées dans les deux chapitres dont le découpage restait

10 Voir le détail des choix des questions et la construction du parcours dans Gaud & Minet (2009) et dans IREM de Poitiers (oct 2011).

relativement arbitraire. Ainsi, à la rentrée 2009, nous avons modifié les chapitres sur les fonctions pour mieux organiser leurs contenus autour d'une seule question chacun. Cette partie du programme se trouve alors découpée selon les trois chapitres suivants :

Chapitres	Question en jeu	Contenus succincts du programme
Fonctions (1)	Comment optimiser une quantité ?	Lecture de tableaux et de graphiques Modifier une expression algébrique selon le but poursuivi ; Résolution d'équation ; Notations et vocabulaire sur les fonctions (image, antécédent, courbe représentative, extremum)
Fonctions (2)	Comment étudier les variations d'une quantité ?	Contenus de « fonctions 1 » Définition de fonction croissante ou décroissante Fonctions de référence, caractérisation des fonctions affines ; variations d'une fonction du second degré
Fonctions (3)	Comment comparer des quantités variables ?	Contenus de « fonctions 1 & 2 » Résolution d'inéquation graphiquement et algébriquement (tableau de signe)

Tableau 2. *Modification de la partie "Fonctions" dans la progression de seconde en 2009*

Si les chapitres gardent un titre neutre, la question prend un rôle dominant dans l'organisation des contenus. Elle est posée aux élèves, présentée en introduction du chapitre, elle est mise en lien avec des situations de la vie courante ou des sciences. Elle sera reprise à chaque AER qui y apportera un nouvel élément de réponse, permettant ainsi de constituer un véritable parcours. Tout au long du parcours, les techniques disponibles sont utilisées, complétées, améliorées. Ainsi on pourra par exemple apporter une réponse graphique à une première situation, une réponse numérique avec une plus grande précision dans une deuxième situation enfin une réponse à l'aide d'un calcul exact dans une dernière[11].

3.2. Des grandes questions aux genres de tâches

Cette prédominance de la question par rapport aux titres de chapitres classiques et sa dévolution aux élèves ont pu nous conduire à réorganiser davantage encore l'année complète autour de quelques questions. De plus le précédent découpage conserve la séparation des grands domaines des mathématiques ciblés par le programme : géométrie, fonction, statistiques et probabilités. Seule l'algèbre se trouve volontairement mêlée aux différents chapitres.

Or certaines questions peuvent amener différents types de réponses selon le contexte que l'on considère. Par exemple, si on demande à des élèves quelles sont les quantités que l'on peut être amené à comparer, certains formulent des questions du type « est-ce que le forfait téléphonique de tel opérateur est plus ou moins cher que celui de tel autre ? » ou bien « est-ce que je suis plus petit ou plus grand que mes camarades ? ». La première question appelle mathématiquement à comparer deux fonctions (ici par exemple, le tarif en fonction du temps de communication), la seconde appelle à

11 Voir le détail et l'enchaînement des trois parcours dans IREM de Poitiers (fév 2011).

comparer une valeur à une série de données statistiques. On ne compare pas les mêmes choses mais la question de la comparaison est centrale dans les deux cas. Partant de ce constat, nous avons alors aussi expérimenté dans certaines de nos classes de seconde une progression basée sur des questions qui sont davantage des 'genres de tâche' (pour cette notion voir Chevallard, 1999).

Question	Sous-questions déclinées en AER	Contenus succincts du programme
Comment optimiser ?	Comment estimer un extremum à partir d'un relevé de mesures ? Comment déterminer la valeur d'un extremum à partir d'une formule ?	- Lectures de tableaux & graphiques (images, antécédents, extrema) - Modifier une expression algébrique selon le but poursuivi - Notations & vocabulaire sur les fonctions (image, antécédent, courbe représentative, intervalle, extremum, sens de variation)
Comment construire ?	Comment juger l'exactitude d'une construction ? Comment construire de manière itérée ? Comment construire point par point et reconnaître une courbe ? (ex : la cardioïde, la parabole) Comment construire un solide ?	- La démonstration en mathématiques, la logique ; réinvestissement de la géométrie de collège - Calcul littéral et algébrique - Coordonnées, équation, distance entre 2 points, milieu - Patrons, calculs dans l'espace
Comment comparer ?	Comment comparer deux grandeurs qui varient ? Comment comparer une donnée à une série de données ? Comment comparer des vitesses de croissance ?	- Résolutions d'équations - Résolution d'inéquations (tableau de signes) - Moyenne (calcul à partir des fréquences, classes,...) - Médiane (cas discret, continu) - Caractérisation des fonctions affines "par l'accroissement"
Comment représenter ?	Comment représenter un déplacement, une translation, une direction ? comment se repérer ? Comment représenter un objet 3D en 2D ?	- Notion de trigonométrie - Notion de vecteur - Somme de vecteurs, relation de Chasles - Vecteurs colinéaires - "Règles d'incidence" : position relative de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan.
Comment prévoir ?	Comment choisir un modèle de fonction adapté à une situation donnée ? Comment déterminer une proportion ?	- Fonction de référence : définition, variations, courbe représentative. - Variations d'une fonction trinôme du second degré - Simulations (distribution des fréquences, fluctuation d'échantillonnage, sondages,..) - Probabilités

Tableau 3. *Progression de seconde à partir de genre de tâche en 2011*

En début d'année, l'ensemble des questions choisies peut être présenté aux élèves à la suite d'une réflexion ensemble sur les domaines des mathématiques, sur les situations de la vie où servent les mathématiques, les situations où l'on rencontre des données numériques, de la géométrie, des quantités qui varient. Chacune d'entre elles sera ensuite reprise plus en détail, puis les différentes AER constituées en parcours donneront des éléments de réponse à ces questions.

3.3. Vers des questions plus concrètes

Dès 2004, Chevallard présente une proposition de graduation entre des types de questions, depuis les plus proches du contenu mathématique (par exemple sur l'écriture des nombres) aux plus larges ouvertes sur des questions de société (par exemple sur les modes de scrutin) en passant par celles qui, ciblées sur une notion mathématique, s'ouvrent aussi sur les autres disciplines (par exemple sur les volumes) :

> On pourra, dans ce cadre, envisager par exemple un PER portant sur la question « Comment calculer sur des "grands nombres" ? » – comment, par exemple, obtenir de manière fiable l'expression décimale exacte de l'entier 123456789123456789^2 quand on ne dispose que d'une « petite » calculatrice ? On pourra encore lancer un PER centré sur la question « Comment contrôler au mieux ses calculs (numériques, mais aussi algébriques) à l'aide d'une calculatrice ? » – comment, par exemple, s'assurer qu'on a bien $420/595 = 12/17$ ou $(5x + 1)(2x - 3) = 10x^2 - 13x - 3$? On pourra, de même, proposer aux élèves de s'interroger au long cours sur la question « Comment déterminer si la réciproque d'un théorème est démontrable ou, au contraire, réfutable ? » […]
>
> Du fait même de son caractère ouvert, le questionnement engendré par un PER « disciplinaire » (en mathématiques, en physique, en biologie, en histoire, etc.) déborde généralement du cadre strict de la discipline au sein de laquelle il est envisagé.[…] « Comment calculer le volume d'un objet ? » – comment, par exemple, calculer le volume d'un tas de pierres, d'un talus, d'un fossé ? On touche, avec cette dernière question, à des pratiques sociales immémoriales, dont toute trace a été anciennement gommée de l'enseignement général et qui devront pourtant, sauf à limiter arbitrairement le travail à accomplir, faire l'objet d'une *enquête* même rapide – par exemple autour de la question « Qui se soucie de calculer des volumes aujourd'hui ? » […]
>
> Le phénomène de débordement disciplinaire sera évidemment plus net encore si l'on choisit de s'interroger, fût-ce à partir des mathématiques ou de telle autre discipline que l'on voudra, sur des phénomènes qui relèvent plus franchement encore d'une sphère *a priori* tout autre : ainsi en irait-il, par exemple, si l'on décidait d'un parcours d'étude et de recherche impulsé par la question « Pourquoi existe-t-il différents modes de scrutin ? » (Chevallard 2005, p.259-260)

Quand elles restent internes aux mathématiques, les questions donnent au moins au professeur la possibilité d'organiser son cours en sachant les raisons d'être de ce qu'il enseigne. Cette connaissance lui apporte davantage de recul sur le programme pour trier, hiérarchiser, présenter les notions aux élèves. Mais plus les questions recouvrent de disciplines, plus elles sont en lien avec des problèmes de société, plus elles devraient permettre aux notions mathématiques enseignées de prendre davantage sens aussi pour les élèves. En se situant dans d'autres domaines, dans les autres sciences, dans l'histoire, dans la société, les savoirs mathématiques devraient pouvoir être moins jugés inutiles et ennuyeux par les élèves et le lien devrait se resserrer entre les derniers échelons de l'échelle de codétermination didactique.

Cette optique, davantage tournée vers des questions extra-mathématiques, mais conduisant en partie à des réponses mathématiques, est celle travaillée actuellement par l'IREM de Poitiers, en particulier à partir du programme de première S. Avec des questions comme « Comment se réfléchit une onde sur une surface ? », « Comment se raccordent des voies (rails, autoroutes) ? » ou « Comment prévoir l'évolution de la population humaine ? », la démarche offre un questionnement de base plus concret aux élèves. Certaines de ces questions peuvent même s'intégrer dans un thème plus global, ce qui pourrait être une troisième manière d'envisager l'enseignement des mathématiques. A l'intérieur d'un thème, plusieurs questions se poseraient et amèneraient à aborder différents points du programme. Par exemple, « Comment prévoir l'évolution de la population humaine ? » pourrait être une question parmi d'autres dans un thème sur les phénomènes d'évolution. Cette idée est évoquée par Chevallard en 2009 : « À l'instar du programme actuel (entré en vigueur en 2000-2001), ce programme comporte des *thèmes d'étude*, parmi lesquels figure celui des *phénomènes d'évolution*. Ce qui est ici un simple thème d'intervention de notions supposées élaborées *par ailleurs* pourrait, dans la perspective que j'ébauche, constituer l'un des grands problèmes « portant » un enseignement des mathématiques en donnant lieu à un ou plusieurs *parcours d'étude et de recherche* (PER). » (Chevallard (2009), p.28)

L'analyse du programme de première S nous a conduits à mettre en évidence des questions mathématiques auxquelles les contenus sont liés : Comment déterminer des tangentes à une courbe ? Comment décrire un phénomène périodique ? Comment calculer des grandeurs géométriques ? Comment modéliser un phénomène discret ? Comment optimiser une quantité dépendant d'une autre ? Comment prendre une décision à l'aide de probabilités ? Cependant pour mieux répondre à l'exigence de résoudre des problèmes qui se posent réellement, ces questions initiales ont été alors déclinées ainsi pour les élèves :

1. Comment se réfléchit une onde sur une surface ? Comment fonctionne une antenne parabolique ?
2. Comment se raccordent des voies (rails, autoroutes) ?
3. Comment décrire la hauteur d'eau dans un port, la durée d'ensoleillement… ?
4. Comment calculer des grandeurs inaccessibles ?
5. Comment prévoir l'évolution de la population humaine ?
6. Comment expliquer les taux d'amortissement d'un emprunt ?
7. Comment optimiser une quantité dépendant d'une autre ?
8. Comment prendre une décision à l'aide de probabilités ?
    - Faut-il préférer la roulette aux jeux de la FDJ ?
    - Comment s'expliquent les normes AFNOR des tests sensoriels ?

Ces questions permettent de couvrir le programme de Première S. Certaines questions abordent un seul thème, comme les suites avec « Comment prévoir l'évolution de la population humaine ? ». Des études de documents récents (vidéo en ligne sur le site de l'INED) ou historiques (texte de Malthus) servent de support à la réflexion.L'organisation du chapitre correspondant et les documents utilisés sont disponibles dans l'article « Evolution de la population mondiale, un parcours d'étude en première S » du groupe lycée en ligne sur le site de l'IREM de Poitiers. D'autres conduisent à aborder plusieurs parties classiquement distinctes du programme. Par exemple la première fait travailler l'élève sur la notion de tangente, les équations de droite et de cercle ou encore la résolution de l'équation du second degré. Cette idée de lien entre ces notions prend en partie sa source dans les travaux de Descartes (méthode des cercles tangents). Ce parcours sera détaillé dans une prochaine brochure de l'IREM de Poitiers. Le tableau de la progression figure ci-après.

Question	**Enquête initiale, introduction**		**AER**	**Contenus du programme**
Comment se réfléchit une onde ?	Exemples vus en sciences physiques ou en SVT : – lois de l'optique - réflexion des ondes sismiques sur le Moho - fonctionnement d'une antenne parabolique	Deux cas : réflexion sur une surface plane réflexion sur une surface courbe	AER 1 : Comment construire un rayon réfléchi par un miroir plan ? AER 2 : Comment construire un rayon réfléchi par un miroir cylindrique ? AER 3 : Comment construire un rayon réfléchi par un miroir parabolique ?	Équation de droite, intersection, condition de parallélisme Équation de cercle, équations du second degré, condition d'orthogonalité Notion de tangente (pour une courbe autre que le cercle), équation de parabole, fonctions du second degré.

Tableau 4. *Organisation du parcours de première S sur la réflexion d'onde*

Dans ce travail, on distingue les questions mathématiques que le professeur doit avoir en tête pour organiser les connaissances du cours et les questions proposées aux élèves. Ainsi celles qu'ils traitent sont des questions de société ou de civilisation. La section S permet des liens avec les sciences physiques mais pas exclusivement. Des questions comme « Comment prévoir l'évolution de la population humaine ? », « Comment expliquer les taux d'amortissement d'un emprunt ? » ou « Comment prendre une décision à l'aide de probabilités ? » ont tout à fait leur place en série ES. On redonne du sens non seulement aux notions enseignées mais à l'École. On favorise la démarche d'investigation et on forme à l'enquête tout en apportant des éléments de réponses qui seront ensuite institutionnalisés, généralisés, travaillés sur d'autres situations.

4. Bilan de nos expérimentations : points positifs, réserves et questions

Ces différentes démarches posent la question de la forme et du contenu du « cours » de l'élève. Présentés ainsi, les contenus ne suivent pas nécessairement les chapitres classiques des manuels. La grande question est un fil conducteur pour l'avancée des connaissances, des méthodes, des techniques qui émergent des différentes AER qui ponctuent le parcours ; on peut alors se demander si elle doit être aussi un fil conducteur pour le cours lui-même ou si les contenus, une fois institutionnalisés, doivent constituer divers petits chapitres déconnectés de la question.

Par exemple la dernière progression expérimentée en classe de Seconde pose le problème de la question à dévoluer aux élèves. Doit-on donner la question la plus générale ? N'est-elle pas qu'une question pour le professeur, pour organiser son exposé ? Doit-on ne leur donner que les sous-questions contextualisées avec la situation de chaque AER ? Pour la question « Comment optimiser ? », il peut être possible de ne donner que la déclinaison de cette question en lien avec des AER comme par exemple : « Comment estimer un angle de vue maximum ? », « Comment obtenir la boite de volume maximum en pliant une feuille A4 ? », « Comment tracer le rectangle d'aire maximum inscrit dans un demi-cercle ? ». Il est possible aussi de leur présenter la distinction des différentes situations par le type de données. Selon qu'on dispose d'un relevé de mesures ou d'une formule, des questions différentes se posent sur la représentation graphique, la précision des valeurs, les valeurs manquantes. Les différents temps d'avancée dans le parcours correspondent à des questions comme « Comment déterminer un maximum à partir d'un relevé de mesures ? », « Comment déterminer un maximum avec une précision donnée à partir d'une formule ? », « Comment déterminer un maximum de manière exacte à partir d'une formule ? »[12].

De même, les chapitres de cours doivent-ils porter le nom des questions ou au contraire garder un découpage et des titres classiques déconnectés ? Pour la question « Comment comparer ? », on peut envisager un chapitre au titre éponyme qui se découperait en paragraphes comme « Comparer graphiquement deux fonctions », « Comparer algébriquement des fonctions », « Comparer des vitesses de croissances », « Comparer des séries de données ». Mais on peut choisir d'insister sur la question lors des AER, puis à sa suite, de synthétiser le cours dans des chapitres classiques comme « Équations et inéquations », « Fonctions affines » ou « Statistiques descriptives ».

Que le professeur centre davantage son exposé sur les chapitres ou sur les questions, la méthode expérimentée en seconde permet de s'approprier des écrits de Chevallard tout en gardant une structure rassurante, proche d'un cours classique mais en intégrant l'idée de problématiser les notions rencontrées. Cependant, elle présente en contrepartie le risque de rester sur une organisation construite avec des questions exclusivement internes aux mathématiques selon les choix d'activités qui seront faits, jusqu'à travailler sur des situations vides de sens réel, simplement créées pour l'introduction de tel ou tel point du programme, simples habillages d'exercices techniques.

Dans ce cas, cette organisation seule n'apporterait pas de réponse au risque de rupture entre l'enseignement et les niveaux de co-détermination supérieurs que dénonce Chevallard. Le choix d'AER en lien avec de vraies situations problématiques serait déterminant à côté de questions très mathématiques pour ne pas opérer cette rupture.

Au contraire, les choix mêmes des questions de la démarche suivie en première placent d'emblée l'élève dans un questionnement sur le monde qui l'entoure. L'aspect mathématique du problème n'arrive que dans un deuxième temps. La recherche de réponses peut conduire à différents types d'arguments dont certains, peut-être pas tous, seront mathématiques. Alors les notions du cours seront introduites, motivées par cette recherche. Cette démarche peut être déconcertante pour les élèves et loin des pratiques habituelles de l'enseignant. Elle nécessite pour le professeur d'avoir à l'avance une vision très claire de l'ensemble de l'année pour ne pas se perdre dans l'exploration de réponses qui seraient des impasses. Si les questions permettent d'aborder les contenus

12 En Seconde, sur cette dernière étape du parcours, la réponse peut être seulement apportée dans le cas des fonctions polynôme du second degré mais elle peut être ensuite prolongée en Première avec la fonction dérivée.

mathématiques de manière différente, elles nécessitent donc d'avoir une organisation mathématique construite et à laquelle le professeur se tient.

Cependant, quel que soit le type de question privilégié, le but commun de ces démarches reste bien de redonner du sens aux mathématiques enseignées. Que la question posée reste formulée en termes mathématiques ou bien qu'elle soit résolument ancrée dans la vie courante, elle doit permettre de faire travailler des mathématiques « signifiantes », des mathématiques qui répondent à autre chose qu'à des exercices purement scolaires qui ne se rencontrent qu'en milieu scolaire. Les questions ou les thèmes ont pour but de faire réfléchir les élèves et de leur faire comprendre où interviennent les mathématiques. Une question comme « Comment prévoir l'évolution de la population humaine ? » situe immédiatement le problème dans un contexte à la fois géographique, historique, politique et scientifique. Mais une question plus mathématique comme « Comment comparer des nombres ? » peut aussi conduire, selon la présentation que l'on en fait, à replacer la tâche mathématique dans un contexte plus large. Quels nombres compare-t-on ? que représentent-ils ? des prix ? des volumes ? des productions ? à quoi les compare-t-on ? Autant de sous-questions qui tendent vers le même but, vers la recherche du « sens » de ce qu'on enseigne à nos élèves.

5. Conclusion

Même si la réalisation concrète en classe de notre recherche évolue avec le temps et les expérimentations dans différentes classes, la base en reste les écrits de Chevallard sur le rôle de l'école et en particulier celui des mathématiques dans la formation du citoyen. S'ils ont un sens, les contenus de nos programmes doivent être utiles pour répondre à des questions. La principale difficulté de la mise en œuvre de ce projet est de trouver effectivement ces questions. Notre recherche met bien en évidence qu'elles peuvent être de nature différente, plus ou moins mathématiques, plus ou moins générales, plus ou moins proches des problèmes de société. Dans tous les cas, elles guident alors l'organisation du cours. Ainsi, grâce à cette organisation didactique, les contenus du cours sont motivés par des vraies situations problématiques amenées par les AER, par l'introduction à la question choisie, voire par la question elle-même. La réflexion de l'élève revient au cœur de l'activité de la classe. L'inévitable travail de la technique est justifié par un but de compréhension et de maîtrise des types de problèmes posés. Le professeur peut ainsi enseigner sereinement

> « des mathématiques qui manifestent clairement aux yeux des jeunes générations que l'École ne les abandonne pas, mais qu'au contraire elle se préoccupe au plus haut point de leur donner les moyens de penser le réel et d'entrer en lui armées de savoir et de raison. » (Chevallard 2005, p.263)

Références

CHEVALLARD Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In Noirfalise R. (éd.) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: actes de l'Université d'été de la Rochelle, 89-118. IREM de Clermont-Ferrand.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique », Recherches en didactique des mathématiques, 19/2, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (2002) Les praxéologies didactiques : Organiser l'étude. Cours n°1: Structures et fonctions. In Dorier J.L. et al : Actes de la 11e école d'été de Didactique des mathématiques, 3-22. Grenoble, La Pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (2002) Les praxéologies didactiques : Organiser l'étude. Cours n°3 : Ecologie et régulation. In Dorier J.L. et al, Actes de la 11e école d'été de Didactique des mathématiques, 41-56. Grenoble, La Pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (2002) Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques, Communication aux 3es Journées d'étude franco-québécoises, Université René-Descartes Paris 5, 17-18 juin 2002. In S. Maury S. & M. Caillot (éds), Rapport au savoir et didactiques, 81-104. Éditions Fabert, Paris.

CHEVALLARD Y. (2003) Quel avenir pour l'enseignement des mathématiques ? In J-P Ferrier, M. Henry, P-H Terracher, Actes du colloque L'enseignement des mathématiques du collège au premier cycle de l'université, 9-24. IUFM de Lorraine.

CHEVALLARD Y. (2005) La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. In C. Ducourtioux, P.-L. Hennequin (Eds.), La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire. Publications de l'APMEP nº 168, 239-263. Paris, APMEP.

CHEVALLARD Y. (2006) Les mathématiques à l'école : pour une révolution épistémologique et didactique, Bulletin de l'APMEP, 471, 439-461.

CHEVALLARD Y. (2007) Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éd.), Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Universidad de Jaén (705-746)

CHEVALLARD Y. (2009) Quel avenir pour les mathématiques au collège et au lycée ? Les mathématiques dans la cité, Disponible en ligne, consultation le 08 février 2014 :
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=154,

GAUD D., MINET N.(2009) Parcours d'étude et de recherche en géométrie pour la classe de seconde », Petit x, 79, 49-71.

IREM de Poitiers, groupe lycée, (2011) Enseigner les mathématiques en seconde : trois parcours sur les fonctions.

IREM de Poitiers, groupe lycée, (2011) Enseigner les mathématiques en seconde : deux parcours sur la géométrie plane.

IREM de Poitiers, groupe lycée (2012) Evolution de la population mondiale, un parcours d'étude en première S, sur le portail de l'IREM de Poitiers consultation le 24 janvier 2014: http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/ressources/productions-en-ligne/111-un-parcours-en-1s

VITRAC B. (2005) Les Géomètres de la Grèce antique, revue Les Génies de la Science, 21.