
UN DUO D'ARTÉFACTS VIRTUEL ET MATÉRIEL POUR APPRENDRE À CONSTRUIRE UN TRIANGLE À LA RÈGLE ET AU COMPAS

Anne VOLTOLINI

Enseignante en collège et Doctorante

Équipe EducTice, Laboratoire S2HEP, IFE, ENS Lyon

L'institution Éducation Nationale préconise l'usage des technologies à l'école. Il nous semble donc important de penser cette introduction du numérique dans l'enseignement des Mathématiques.

Notre projet de recherche a pour objectif de développer et d'évaluer des environnements informatiques pour l'apprentissage des mathématiques à l'école et au collège qui incluent d'une part une approche expérimentale sur la base de manipulations directes de représentations d'objets mathématiques à l'interface de l'ordinateur et d'autre part l'articulation entre le virtuel et l'utilisation d'outils matériels.

Nous interrogeons l'apport sur les apprentissages de tels environnements informatisés articulés avec l'utilisation d'outils matériels concrets. L'environnement numérique peut-il être une valeur ajoutée à l'objet matériel qui aide à franchir certaines difficultés ou certains obstacles épistémologiques ? Nous illustrons ce propos à partir d'une situation géométrique sur l'utilisation du compas pour construire un triangle.

La construction géométrique du triangle et l'utilisation du compas

L'expérience de la géométrie dynamique ainsi que les travaux de Duval (2005) identifiant les difficultés des élèves liées à la déconstruction dimensionnelle des formes nous ont conduits à nous intéresser à la conception de deux cahiers d'activités informatisés articulés avec l'usage du compas matériel pour des apprentissages relatifs aux triangles. Duval insiste sur la déconstruction dimensionnelle des formes comme processus central de la visualisation géométrique. Pour faire de la géométrie, il faut décomposer toute forme en une configuration d'autres unités figurales du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions. La déconstruction dimensionnelle des formes permet la descente dans les dimensions, avec, dans le cadre de la géométrie plane, le passage des surfaces (dimension 2) aux lignes (dimension 1) puis aux points (dimension 0). Le champ réel du travail sur les figures est principalement constitué par la trame des unités figurales 1D et 0D et les propriétés qui les relient. En particulier, en géométrie dynamique, pour avoir des figures robustes (Soury-Lavergne, 2011), on oblige les élèves à arriver aux points objets de dimension 0 qu'ils appréhendent difficilement.

La situation que nous proposons a pour objectif d'apprentissage la construction géométrique à la

règle et au compas d'un triangle, étant données les longueurs de ses trois côtés. Il s'agit, d'une part, d'amener l'usage du compas dans cette construction, et, d'autre part, d'aboutir à la nécessité de tracer des cercles pour construire un triangle de longueurs des côtés données. Le compas n'est pas l'outil choisi et retenu pour cette tâche par les élèves. En effet spontanément, ces derniers utilisent uniquement la règle. Ils tracent un premier segment puis un second en anticipant l'espace nécessaire pour le troisième. Puis par tâtonnements successifs ils obtiennent le triangle. Plusieurs types de difficultés peuvent être mis en évidence quant à l'usage du compas dans la construction d'un triangle de longueurs des côtés données. Le compas n'est pas l'outil qui permet de tracer le contour du triangle. De plus, l'écartement du compas ne rend pas visible le segment côté du triangle et le compas produit des arcs de cercle, leur intersection va définir le troisième sommet du triangle, objet géométrique de dimension 0. Ainsi cette construction géométrique repose sur une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D au triangle déterminé par ses trois sommets de dimension 0. De surcroît, l'utilisation du compas dans cette construction génère des actions et de nouveaux schèmes (Vergnaud, 1990) qui n'appartiennent pas aux schèmes déjà constitués d'utilisation du compas. Les genèses instrumentales (Rabardel, 1995) du compas pour tracer des cercles ou reporter des longueurs ne permettent pas aux élèves de l'utiliser pour construire un triangle.

Analyse cognitive préalable relative à la tâche construire un triangle à la règle et au compas

Connaissances antérieures des élèves

Les élèves de l'école primaire apprennent dès la maternelle à reconnaître la forme triangle parmi d'autres, puis à reproduire des triangles sur du papier quadrillé ou pointé. Ces premières activités de tracés de triangles sont réalisées à l'aide de la règle qui, la plupart du temps, est graduée. Nous avons pu constater dans les manuels, que le triangle est majoritairement présenté comme une surface ou un contour. Un triangle est un polygone à trois côtés mais il n'est pas présenté comme une figure constituée de trois sommets. D'autre part, la distance entre deux points est assimilée, à l'école primaire, à la longueur du segment ayant ces deux points pour extrémités. Pour tracer une longueur, un segment de longueur donnée, l'outil utilisé est aussi, la plupart du temps, la règle graduée.

Le cercle, pour les élèves de l'école primaire, est avant tout un objet spatial rond comme le rectangle, le carré (Ermel, 2006). Les enfants ont dans un premier temps des conceptions globales du cercle. Artigue et Robinet (1982) ont montré que son aspect ponctuel n'est pas naturel pour eux. En effet, il leur est difficile de voir un ensemble de points derrière un trait. Cependant, les manuels de mathématiques actuels de l'école ou du collège donnent des définitions ayant un aspect uniquement ponctuel : « Le cercle de centre O et de rayon R est, dans le plan l'ensemble des points situés à la distance R de O » ; « Un cercle est formé de tous les points situés à une même distance d'un point appelé centre ». Or l'aspect ponctuel, ainsi que le concept de cercle comme un point fixe et une distance constante sont difficilement saisis par les élèves de l'école primaire.

L'outil compas est utilisé dans un premier temps pour tracer la ligne cercle (programme de CE2), puis dans un deuxième temps pour comparer ou reporter une longueur (programme de CM1). Comme Artigue et Robinet (1982), nous pensons que suivant la tâche proposée, les conceptions et les concepts mis en œuvre dans l'utilisation du compas sont différents. Ce n'est pas parce que les élèves ont la capacité d'utiliser l'outil compas pour tracer un cercle qu'ils savent expliquer pourquoi cet outil est approprié pour cette tâche. Dans l'enseignement élémentaire, le lien entre l'utilisation du compas pour produire la trace du cercle et sa caractérisation comme une distance

constante et un point fixe n'est pas systématiquement établi.

Les obstacles à franchir

Brousseau (1998) étudie la notion d'obstacle en didactique des mathématiques. Pour lui, un obstacle est une connaissance, une conception, pas une difficulté ou un manque de connaissances. Nous avons identifié un certain nombre d'obstacles dans la tâche de construction du triangle à la règle et au compas.

- Le concept de longueur associé à la règle graduée. Pour tracer des polygones, leur contour, une longueur donnée, l'outil spontanément utilisé par les élèves est la règle.
- Le concept de triangle comme un objet 2D ou 1D. Trois points ne déterminent pas un triangle pour les élèves. Ils disent "il est où le triangle ?" L'enfant fait confiance à sa perception et avec trois points il ne perçoit pas le triangle.
- Le concept de cercle comme un objet spatial rond ou comme une ligne et non comme l'ensemble des points équidistants d'un point fixe.

De plus, dans les programmes de l'école primaire on préconise *l'utilisation d'instruments et de techniques* : le compas est utilisé pour *construire un cercle, pour reporter une longueur, pour reproduire un triangle* (MEN, 2008, BO N°3 p 39). Dans les manuels, le compas renvoie souvent à une compétence technique comme illustré dans l'Annexe 1. Il est utilisé, au travers de procédures, soit pour tracer un cercle, soit pour reporter une longueur, soit pour tracer un triangle. La finalité de l'utilisation du compas n'est généralement pas mentionnée. « *Il y a confusion entre les capacités de tracés précis de la figure cercle avec un compas et la connaissance des raisons de l'adéquation de l'outil.* » (Artigue et Robinet, 1982, p 9) Nous avons aussi interrogé les élèves sur l'utilité d'un compas. Leurs réponses font référence à une succession de tâches différentes ce qui corrobore l'acquisition de techniques d'utilisation du compas (voir Annexe 2).

Le cercle dans la construction du triangle

Comme l'ont noté Artigue et Robinet (1982, p 43), « *dans la construction du triangle à la règle et au compas, les cercles interviennent comme outil. Cette intervention suppose la reconnaissance du cercle comme ensemble de points équidistants d'un autre.* » Il y a deux difficultés dans cette phrase, la caractérisation ponctuelle du cercle et l'équidistance, c'est-à-dire la caractérisation du cercle comme une distance constante et un point fixe. Artigue et Robinet (1982) soulignent aussi une difficulté supplémentaire, créée par « *l'attribution à un même point de la conjonction de deux propriétés.* »

La construction du triangle à la règle et au compas

Dans l'apprentissage de la construction d'un triangle à la règle et au compas, l'élève devra franchir certains obstacles cités précédemment et surmonter des difficultés afin de construire un nouvel instrument (Rabardel, 1995) compas et renforcer son appréhension du 0D.

Nous identifions certaines connaissances à acquérir ou à renforcer pour cet apprentissage :

- La déconstruction dimensionnelle du triangle 2D à ses trois sommets 0D et la détermination du triangle à partir de ces trois sommets.
- La conception ponctuelle du cercle et le concept de distance associé au cercle.
- L'adaptation du compas pour tracer un cercle à la définition du cercle comme ensemble de points équidistants d'un autre en revenant à la définition du compas comme outil de transport de distance : on fait pivoter le rayon autour d'une de ses extrémités qui reste fixe.

Un duo d'artefacts virtuel et matériel pour favoriser la genèse instrumentale du compas comme instrument pour construire un triangle

La situation¹ que nous proposons combine les environnements informatique et papier-crayon. Elle inclut, d'une part, une approche expérimentale sur la base de manipulations directes d'objets à l'interface de l'ordinateur, et, d'autre part, l'articulation entre ces manipulations d'objets virtuels et l'utilisation de l'outil matériel compas par les élèves. L'articulation entre outils matériel et virtuel dans la mise en œuvre de cette situation permet de tirer profit des manipulations d'objets à l'interface de l'ordinateur pour aider les élèves à franchir les obstacles d'apprentissage liés à l'utilisation du compas dans la construction du triangle. Dans cette situation, la technologie est une valeur ajoutée à l'outil matériel compas pour les apprentissages relatifs à la construction du triangle. Nous présentons dans la suite de ce paragraphe des éléments d'une analyse *a priori* de la situation ainsi que les choix faits dans l'environnement informatisé.

Un environnement informatisé

Les environnements informatisés² que nous élaborons sont organisés sous forme de cahiers de plusieurs pages dans lesquels l'utilisateur navigue. Un cahier informatisé comprend plusieurs tâches qui conduisent le sujet à mettre en place des stratégies appropriées à la résolution de chaque tâche. Dans un tel cahier, nous créons tous les éléments avec lesquels l'élève va interagir : les objets à manipuler, ainsi que les possibilités d'actions avec ces objets et les rétroactions de l'environnement. La conception de tels environnements informatisés articulés à l'usage d'un outil matériel nécessite de penser la situation. La théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) offre le cadre théorique et les outils pour concevoir et analyser la technologie et des tâches dans l'environnement numérique en articulation avec des outils matériels. Pour Brousseau « *l'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres (...)* Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage. ». Mackrel, et al. (2013) précisent que « *la connaissance se construit si la situation offre un espace d'incertitude et de liberté dans lequel le sujet pourra choisir les actions à réaliser et mettre en place des stratégies pour résoudre la tâche.* » Au fil des pages d'un cahier, il est possible de faire évoluer les valeurs de certaines variables didactiques afin d'agir sur la validité d'une stratégie, ou sur le coût d'une autre ou encore sur la complexité de certaines. Les différentes pages d'un cahier informatisé permettent de structurer la progression des apprentissages grâce aux choix de valeurs des variables didactiques de la situation qui affectent les stratégies de résolution et provoquent l'évolution des connaissances. Un cahier informatisé constitue un milieu riche par le choix des objets à manipuler, leurs comportements et les rétroactions en lien avec les variables didactiques de la situation.

¹ L'intégralité du contenu de cette situation : les deux cahiers d'activités informatisés ayant des fonctionnalités de géométrie dynamique, les activités papier-crayon, les descriptifs des cahiers informatisés ainsi qu'une fiche technique est téléchargeable sur le site Éducmath.

² Ces environnements informatisés sont créés à l'aide du logiciel CabriElem développé par la société Cabrilog et utilisé dans ce projet dans le cadre d'un partenariat entre la société Cabrilog et l'Institut Français de l'Éducation.

(ndlr) Il existe des **solutions libres** (donc installables par les élèves) qui permettent de créer de tels environnements informatisés ; nous pouvons citer **CaRMetal** (<http://carmetal.org>), visuellement plus convivial, dont les développeurs sont bénévoles et n'ont aucune décharge horaire.

Une situation, un scénario de mise en œuvre

Un premier cahier informatisé : pivoter des segments pour former des triangles

Le premier cahier d'activités informatisé nommé « À la découverte des triangles », permet d'amener l'usage du compas dans la construction géométrique d'un triangle dont les longueurs des trois côtés sont données. L'élève est amené à traiter deux tâches : former des triangles par manipulation directe de segments donnés de longueurs fixes, (Figure 1), et déterminer si trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle (Figure 2). La deuxième tâche à propos de l'existence ou non d'un triangle est une question mathématique qui problématise la recherche et la formation d'un triangle et donc le recours aux déplacements des segments.

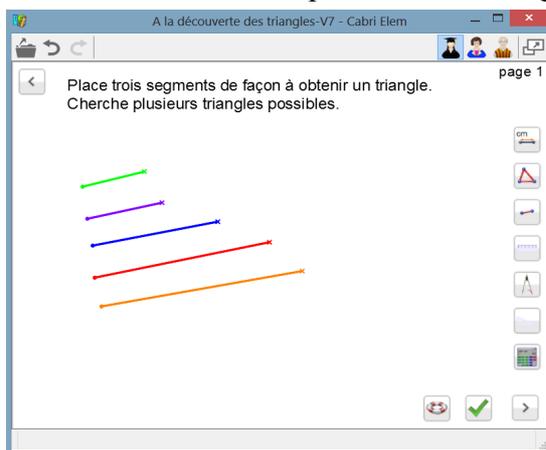


Figure 1 : image écran de la première page d'activité de l'environnement informatisé « À la découverte des triangles »

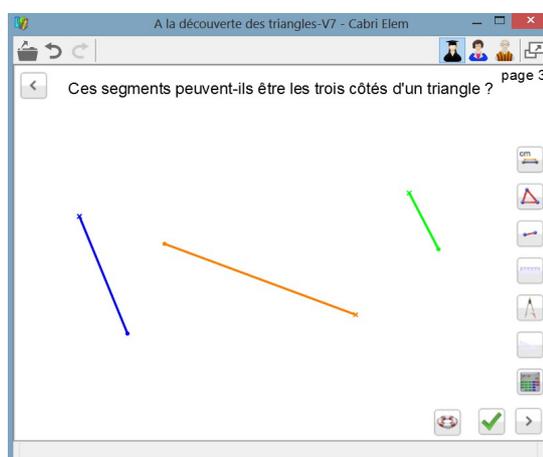
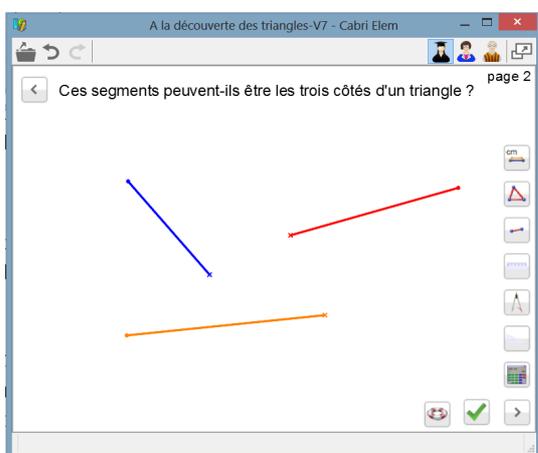


Figure 2 : image écran des pages d'activité 2 et 3 de l'environnement informatisé « À la découverte des triangles »

Les segments proposés sur ces pages sont asymétriques à l'écran dans leur représentation et au cours de leur mouvement. Deux types de déplacements sont possibles pour un segment : déplacer le segment entier par translation en attrapant le segment ou son extrémité ronde, et faire pivoter le segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe en attrapant le segment par son extrémité cruciforme. La distinction graphique des extrémités, ronde ou cruciforme permet à l'utilisateur d'anticiper le mouvement avant de bouger le segment.

Une stratégie gagnante efficace pour former un triangle à partir des segments proposés dans

l'environnement informatique, consiste à former, avec trois segments, une ligne brisée dont les extrémités sont cruciformes. Le triangle sera ensuite obtenu en faisant pivoter les deux segments extrêmes de la ligne brisée (Figure 3).

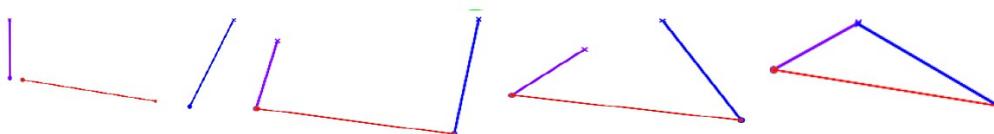


Figure 3 : illustration d'une stratégie gagnante efficace pour former un triangle dans l'environnement informatisé « À la découverte des triangles »

Cette stratégie gagnante efficace est une première étape dans la déconstruction dimensionnelle du triangle. L'activité de formation du triangle dans l'environnement informatique à partir de trois segments en passant par la ligne brisée repose sur une reconstruction du triangle (2D) à partir de la ligne brisée (1D). Cette montée dans les dimensions permet le passage d'une ligne à une surface et constitue une étape dans la construction géométrique du triangle à la règle et au compas qui elle, repose sur une reconstruction du triangle (2D) à partir du point d'intersection des deux arcs de cercle (0D) qui représente le troisième sommet du triangle.

La manipulation des segments est plus efficace lorsqu'elle donne au grand segment un rôle particulier. En effet, la ligne brisée avec le plus grand segment entre les deux autres est plus efficace pour former le triangle car il est alors plus facile d'anticiper la position du troisième sommet. Le troisième sommet est dans une bande dont la largeur est donnée par le grand segment. Cette ligne brisée avec le grand segment placé entre les deux autres est aussi plus efficace pour montrer la non-existence du triangle (Figure 4). Ainsi c'est cette stratégie qui sera adaptée dans l'environnement papier-crayon.

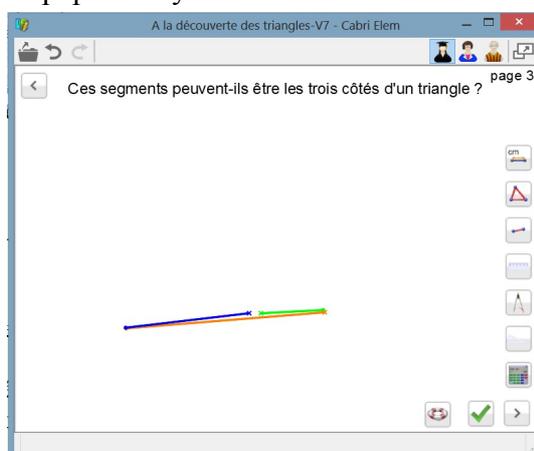


Figure 4 : illustration d'un cas de non existence du triangle page 3 de l'environnement informatisé « À la découverte des triangles »

La manipulation des segments numériques est une plus-value par rapport à des segments matériels ou dessinés sur du papier. En effet, l'environnement informatique oblige à dissocier les deux déplacements, par translation et par rotation, contrairement aux manipulations d'objets sensibles lors desquelles les déplacements sont réalisés conjointement. Ainsi l'environnement informatique met en évidence la rotation indispensable pour former un triangle à partir des segments numériques. C'est la mise en valeur de cette rotation qui peut ensuite être mobilisée dans l'utilisation du compas matériel pour construire un triangle dans l'environnement papier-

crayon. Comme Laborde et Marcheteau (2009) nous pouvons dire que la manipulation des segments dans l'environnement informatique sert à produire la solution et est porteuse d'informations. En effet, les rétroactions de manipulations directes, l'affichage continu du segment au cours du déplacement, les positions successives du segment, la trajectoire de l'extrémité dans le déplacement par rotation permettent à l'utilisateur d'avoir un contrôle sur le segment, côté du triangle qui est déjà présent mais pas dans la bonne position. Ceci n'est pas le cas lors de l'usage du compas dans la construction géométrique du triangle. Dans la construction du triangle à la règle et au compas, le compas produit des arcs de cercle et le segment qui représente le côté du triangle n'est pas rendu visible.

Afin de permettre la mise en place de stratégies d'anticipation, page 4 du cahier (Figure 5), une modification de valeur de la variable déplacement rend impossible la stratégie précédente.

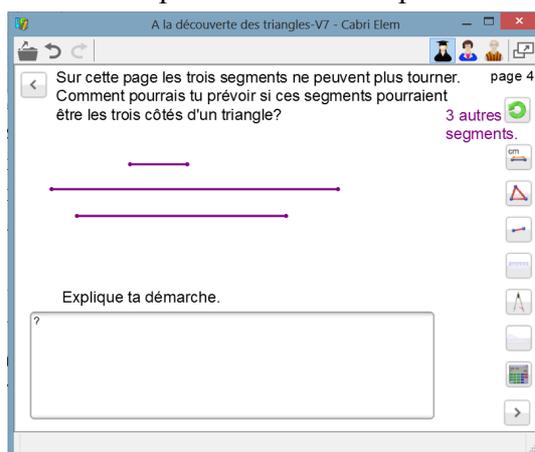


Figure 5 : Image écran de la page 5 de l'environnement informatisé « À la découverte des triangles »

Sur cette page, seul le déplacement des segments par translation est possible. Il n'est plus possible de faire pivoter les segments, il n'est donc plus possible de former le triangle à partir des segments proposés. Il faut donc mettre en œuvre une autre stratégie. Par exemple il est possible de juxtaposer les deux petits segments à côté du plus grand segment pour comparer les longueurs. Il est aussi possible d'utiliser les outils à disposition sur la droite de la page, par exemple utiliser le compas.

Une première activité papier-crayon : une nouvelle fonction du compas

Ce cahier informatisé, « À la découverte des triangles » est articulé avec l'utilisation du compas matériel dans l'environnement papier-crayon (Figure 6). À partir d'une configuration ligne brisée puis à partir de trois segments tracés sur la feuille, il s'agit de tracer des triangles ayant ces segments pour côtés. Pour réaliser ces tâches de tracés de triangles dans l'environnement papier-crayon, l'élève a à sa disposition les instruments de géométrie : la règle, l'équerre, le compas. Dans cette première activité d'utilisation du compas matériel, ce dernier est utilisé pour faire pivoter les segments déjà présents sur la feuille. Il remplace le déplacement par rotation mis en évidence dans le cahier informatisé.

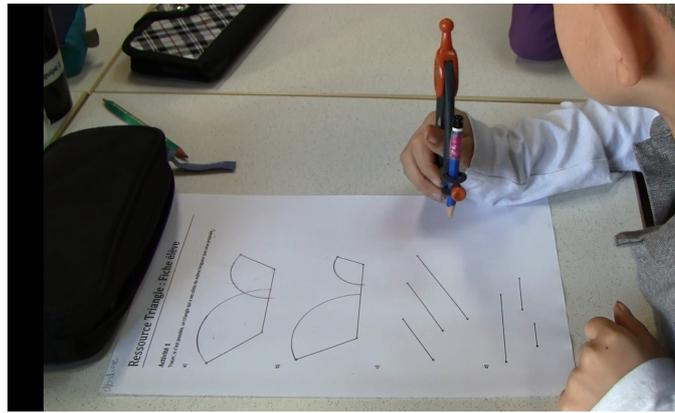


Figure 6 : la première activité papier-crayon :
le compas pour faire pivoter un segment

D'une part, on veut observer une extension du domaine de validité des schèmes liés à la construction de l'instrument déplacement par rotation, dans la tâche former un triangle dans l'environnement informatique, à l'instrument compas pour faire pivoter un segment, dans la tâche tracer un triangle de côtés donnés. En effet, le compas matériel est ici un outil pour faire tourner un segment autour d'une de ses extrémités, comme le segment numérique dans l'environnement informatisé, les deux branches du compas représentant les extrémités du segment côté du triangle. Notons qu'ici le segment initial ne tourne pas comme dans l'environnement informatisé. Le compas permet de le reproduire à un autre emplacement en gardant fixe une extrémité. D'autre part le compas produit la trace de l'extrémité qui pivote : un arc de cercle.

Un deuxième cahier informatisé : les cercles sous-jacents à la construction du triangle

Il s'agit maintenant de passer de l'instrument compas pour faire tourner un segment qui produit un arc de cercle, à l'instrument compas pour tracer des cercles. Pour cela nous avons conçu un second cahier informatisé. L'objectif de ce second cahier informatisé est d'aboutir à la nécessité de tracer des arcs de cercle (des cercles) dont l'intersection définira le troisième sommet du triangle. Les cercles sous-jacents à cette construction du triangle seront amenés grâce à l'outil cercle de la géométrie dynamique.

Dans ce second environnement informatisé, sur chaque page, on repart de la ligne brisée (Figure 7). Sur la première page, les extrémités de la ligne brisée peuvent être pivotées pour essayer de former le triangle et constater l'existence ou non du triangle. La trace des extrémités s'affiche lors de leur déplacement (Figure 8). L'affichage de cette trace rappelle la production des arcs de cercle par le compas lors des activités papier-crayon précédentes.

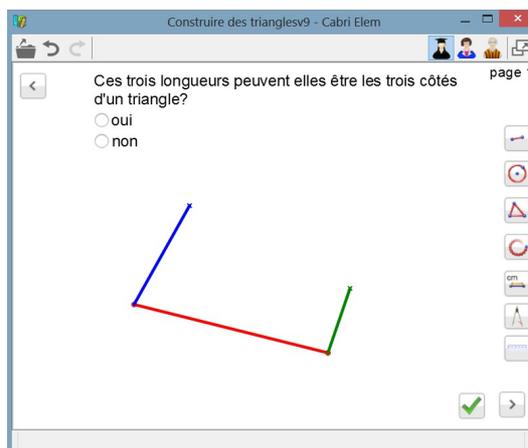


Figure 7 : Image écran de la première page d'activité de l'environnement informatisé « Construire des triangles »

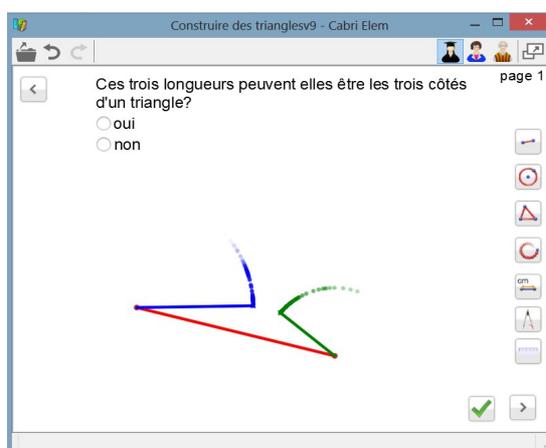


Figure 8 : Illustration de l'affichage de la trace des extrémités de la ligne brisée au cours de leurs déplacements dans l'environnement informatisé « Construire des triangles »

Sur les pages suivantes, les extrémités de la ligne brisée sont verrouillées en déplacement (Figure 9). Il n'est donc plus possible de les faire pivoter pour observer si le triangle existe ou non. Ce changement de valeur de la variable didactique déplacement par rotation, rend impossible la stratégie précédente. Il faut donc trouver une autre stratégie pour répondre à l'existence ou non du triangle. Des outils sont disponibles sur la droite de la page. L'outil compas permet comme dans les activités papier-crayon précédentes de tracer des arcs de cercle de rayon les deux segments extrêmes de la ligne brisée.

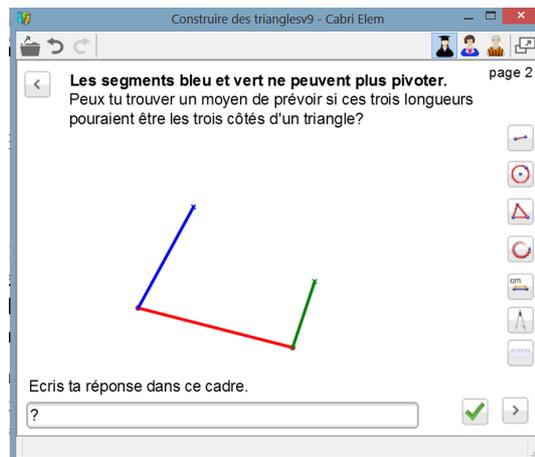


Figure 9 : image écran de la deuxième page d'activité de l'environnement informatisé « Construire des triangles »

Puis à partir de la page 3, nous modifions les outils disponibles dans la boîte à outils, autre valeur de variable didactique. Nous supprimons l'outil compas et l'outil mesure. Il s'agit ici de contraindre l'utilisation de l'outil cercle (Figure 10).

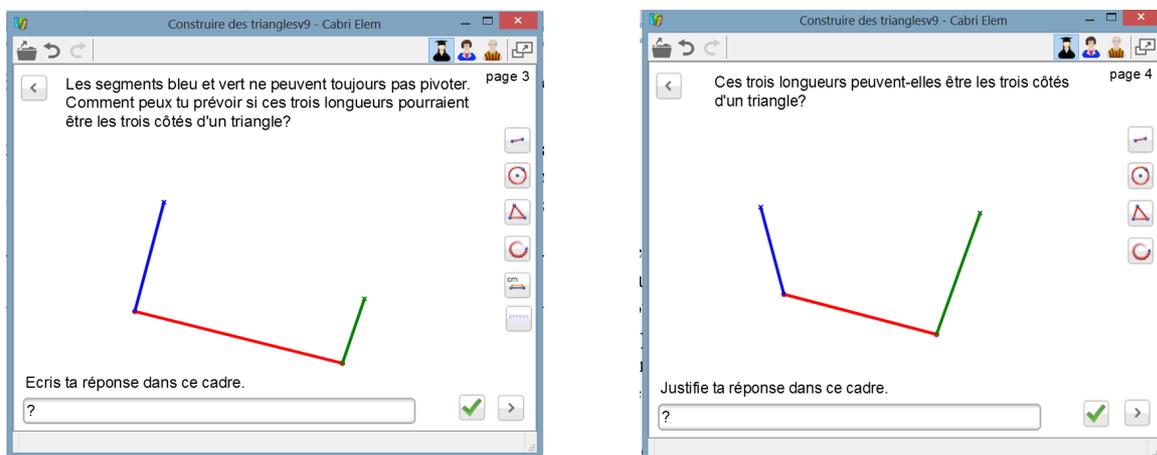


Figure 10 : image écran des pages 3 et 4 de l'environnement informatisé « Construire des triangles »

Dans ce second cahier informatisé, l'outil compas puis l'outil cercle permettent de vérifier sur une figure ce qui pourrait se passer. Puis dans les activités papier-crayon suivantes, le compas pour tracer des cercles sera utilisé pour produire la figure. Entre le virtuel et le matériel, il y a un changement de statut de l'outil : l'outil, compas ou cercle, mobilisé dans l'environnement numérique pour voir ce qui pourrait se passer sur la figure devient dans l'environnement papier-crayon l'instrument pour produire la figure.

Construction de triangles à la règle et au compas

Enfin, deux activités papier-crayon finalisent la construction géométrique d'un triangle à la règle et au compas (Figure 11). Il s'agit alors de construire des triangles dont les longueurs sont données sous forme de nombres pour conforter l'instrumentation du compas, dans la tâche de construction du triangle, dans sa fonction « tracer des cercles ».

Activité 2

Malheureusement la fiche d'énoncé sur laquelle étaient tracés 3 segments a été tachée. Les longueurs des segments étaient 3cm, 5cm et 6cm.



Trace un triangle qui a pour côtés les trois segments.

Activité 3

Trace si c'est possible,

- un triangle dont les côtés mesurent 6cm, 7cm et 8cm ;
- un triangle dont les côtés mesurent 3cm, 4cm et 8cm.

Figure 11 : extraits des activités papier-crayon 2 et 3

Les clés didactiques de cette situation

La manipulation directe des segments dans l'environnement informatique impose la dissociation des deux mouvements par translation et par rotation et met en valeur la rotation. Les deux déplacements sont toujours disjoints dans l'environnement informatique proposé par les cahiers. Ceci n'est pas le cas lors de manipulations d'objets sensibles (des pailles par exemple) où les deux mouvements sont réalisés simultanément. Ces manipulations permettent donc la mise en valeur de la rotation indispensable pour former un triangle dans l'environnement informatique. De plus la manipulation directe de segments de longueurs données, dans l'environnement de mathématiques dynamiques, permet un contrôle sur le segment coté du triangle déjà là, mais pas dans la bonne position. Lors des manipulations des segments, les rétroactions sont les positions successives du côté du triangle ainsi que la trajectoire de l'extrémité du segment qui pivote.

La ligne brisée une étape dans la déconstruction dimensionnelle du triangle. La construction de la ligne brisée est une stratégie gagnante efficace dans l'environnement numérique et en papier-crayon. La ligne brisée dont les extrémités peuvent pivoter est une première étape dans la formation du triangle dans l'environnement informatique. Cette ligne brisée transportée dans l'environnement papier-crayon et associée au compas matériel pour faire pivoter les segments peut aussi être une étape dans l'apprentissage de la construction du triangle à la règle et au compas. Cette étape de tracé permet la descente dans les dimensions du triangle 2D à son contour 1D comme une ligne brisée fermée. Elle peut constituer un intermédiaire à la déconstruction dimensionnelle du triangle 2D à ses trois sommets 0D nécessaire pour l'acquisition de la construction géométrique d'un triangle de longueurs des côtés données.

Un nouvel instrument compas pour pivoter un segment. Au cours des manipulations des segments numériques, le sujet construit des schèmes relatifs au segment numérique en rotation. Ces schèmes peuvent être associés à des schèmes d'utilisation du compas matériel. Dans l'environnement papier-crayon, le compas est l'artefact matériel qui va « remplacer la rotation ». Le compas permettra de « faire pivoter un segment », le segment étant « coincé » entre les deux branches du compas. Cet instrument compas pour faire pivoter un segment produit une trace, un arc de cercle qui peut être identifiée à l'objet mathématique cercle. Le passage par cet instrument peut être un intermédiaire qui donne du sens à l'élaboration d'un instrument compas pour tracer des cercles dans la tâche de construction d'un triangle.

Des compétences du socle et du programme

Cette situation permet de construire des compétences du socle et des programmes (MEN, 2008).

- Compétence du socle commun : Utiliser la règle, l'équerre et le compas pour vérifier la nature de figures planes usuelles et les construire avec soin et précision.

Explicitation de l'item (grille de référence socle commun) :

- Tracer des figures géométriques ;
- Vérifier la nature d'une figure en ayant recours aux instruments ;
- Reproduire un triangle à l'aide d'instruments.

- Compétences des programmes 2008 :

- Reproduire un triangle à l'aide d'instruments ;
- Construire un triangle ;
- Vérifier la nature d'une figure en ayant recours aux instruments.

Une proposition de déroulement de la situation dans une classe de CM2 est disponible en annexe 3.

Expérimentations et résultats

Cette situation composée des deux cahiers informatisés articulés avec l'utilisation du compas matériel dans l'environnement papier-crayon a été testée dans deux classes de CM2. 43 élèves et deux enseignantes ont participé à cette expérimentation qui s'est déroulée en quatre moments pour chaque classe : le 1^{er} cahier informatisé, la première activité papier-crayon, le 2^e cahier informatisé puis la deuxième activité papier-crayon. Les élèves étaient encadrés par leur enseignante et un chercheur était présent dans la classe. Trois caméscopes filmaient le travail des élèves. Des captures vidéo du travail de chaque élève ont été réalisées pour chacun des cahiers informatisés. Cette expérimentation nous a permis de confirmer que les manipulations et les choix de variables et de contraintes faits dans l'environnement informatisé permettaient l'émergence de schèmes dont le domaine de validité pourra s'étendre à l'utilisation du compas matériel dans la construction d'un triangle de longueurs des côtés données. Par exemple la règle d'action pour faire pivoter un segment numérique : distinguer l'extrémité cruciforme du segment puis attraper le segment par la croix et déplacer la croix pour faire pivoter le segment, a été adaptée par tous les élèves à la règle d'action pour faire pivoter un segment avec un compas : distinguer les deux branches du compas puis piquer la pointe et appuyer le crayon et enfin faire pivoter le compas et produire une trace visible. Nous avons établi le tableau des schèmes émergents suivants :

Artefact « déplacement par rotation »	Artefact « compas »
<p>Schème d'usage déplacement par rotation d'un point (SU-rotation)</p> <p>Attraper le point :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Amener la souris sur le point - Cliquer <p>Déplacer le point de manière circulaire</p> <p>Identifié sur toutes les productions</p>	<p>Schème d'usage du compas (SU-compas)</p> <p>Écarter les branches</p> <p>Distinguer les deux branches</p> <p>Piquer la pointe et poser le crayon</p> <p>Pivoter le compas en maintenant l'écartement</p> <p>Produire une trace visible</p> <p>Identifié sur toutes les productions</p>
<p>Schème d'action instrumentée pivoter un segment numérique</p> <p>Distinguer l'extrémité cruciforme du segment + SU-rotation</p> <p>Identifié sur toutes les productions</p>	<p>Schème d'action instrumentée pivoter un segment</p> <p>SU-compas avec les branches du compas qui coïncident avec les extrémités du segment</p> <p>Identifié sur toutes les productions</p>
	<p>Schème d'action instrumentée tracer un arc de cercle</p> <p>SU-compas</p> <p>Identifié dans 11 productions</p>
	<p>Schème d'action instrumentée tracer un cercle</p> <p>SU-compas + pivoter le compas de 360°</p> <p>Identifié dans aucune production</p>

L'articulation entre les manipulations dans un environnement numérique et l'utilisation du compas matériel a permis aux élèves d'élaborer un nouvel instrument compas pour faire pivoter un segment. De plus, la construction d'une ligne brisée est apparue comme une stratégie gagnante efficace pour former un triangle dans l'environnement informatisé. Elle a été utilisée par 19 élèves dans l'environnement papier-crayon comme étape à la construction du triangle. Cette stratégie de tracé, passant par le tracé de la ligne brisée, a perduré chez certains élèves jusqu'à la fin de l'année (Annexe 5).

Ainsi la situation décrite précédemment mobilisant un duo d'artefacts virtuel et matériel participe à la genèse instrumentale du compas dans la tâche de construction d'un triangle. L'alternance des environnements, informatique et papier-crayon, l'articulation du duo d'artefacts, déplacement par rotation et compas matériel, ainsi que l'orchestration (Trouche, 2004) du recours aux artefacts matériel et virtuel permet de tirer profit des manipulations des segments à l'interface de l'ordinateur pour franchir des obstacles d'apprentissage liés à l'utilisation du compas dans la construction géométrique du triangle.

Néanmoins, l'appropriation par les élèves du compas pour tracer des cercles dans la construction d'un triangle de longueurs des côtés données est difficile. Le compas pour faire pivoter un segment suffit à réaliser le tracé du triangle et donne du sens à l'utilisation du compas pour construire un triangle. Le compas est alors un outil de transport de distance. Amener le cercle dans la construction du triangle est un objectif d'apprentissage qui permet de renforcer l'appropriation du concept de distance associé au cercle ; ce dernier est obtenu par pivotement d'un segment autour d'un point fixe. La construction du triangle est une tâche dans laquelle les deux fonctions du compas déjà rencontrées, tracer la ligne cercle et transporter une distance, sont

utilisées parallèlement. Cette tâche est l'occasion de mettre explicitement en relation l'artefact compas, les schèmes d'utilisation et les concepts sous-jacents de distance et de cercle. Lorsque l'élève utilise le compas, il fait appel à ces trois composantes mais de manière plus ou moins consciente. Le manque de lien entre ces trois éléments constitutifs d'un instrument peut expliquer les difficultés que rencontrent certains élèves pour choisir l'outil approprié aux différentes tâches. La conception ponctuelle du cercle et l'appréhension du OD, quant à eux, nécessitent encore un travail supplémentaire.

Une situation transposable en sixième

En classe de 6^e de collège se poursuit l'apprentissage de la construction du triangle à la règle et au compas. Cette étude s'insère dans un travail autour du concept de distance associé à l'utilisation du compas et au concept de cercle comme une distance constante et un point fixe.

La situation décrite précédemment peut être adaptée pour être proposée en 6^{es}. En début de collège, les élèves ont déjà vu la méthode de construction du triangle à la règle et au compas et se souviennent le plus souvent de la procédure. Il s'agit donc ici de mettre du sens sur cette procédure et principalement sur l'utilisation du compas dans la tâche de construction d'un triangle pour renforcer l'appréhension du OD et corroborer la définition du cercle comme l'ensemble des points équidistants d'un autre. Nous proposons en Annexe 4 un déroulement de cette situation en classe de 6^e qui comprend uniquement le deuxième cahier informatisé succédant tour à tour la première et la deuxième activité papier-crayon.

Conclusion

Nous avons montré que la conception de situations mobilisant un duo d'artefacts et prenant en compte l'articulation entre un artefact virtuel et un outil matériel est favorable aux apprentissages. En effet, les tâches de manipulation directe d'objets à l'interface de l'ordinateur impliquent des actions du sujet sur une représentation d'un objet mathématique et des rétroactions du milieu qui permettent au sujet de percevoir les objets mathématiques abstraits (Laborde et Laborde, 2011). Ces manipulations d'objets virtuels font apparaître des comportements différents mais complémentaires des objets matériels qui permettent d'accompagner les élèves dans les processus de genèse instrumentale de l'instrument matériel. Le comportement des segments dans les environnements informatisés décrits précédemment sont différents du comportement de baguettes matérielles ou d'un trait représentant un segment sur une feuille de papier. Nous avons montré que le déplacement par rotation d'une extrémité du segment mis en valeur dans l'environnement informatisé peut amener l'usage du compas matériel pour faire pivoter un segment dans l'environnement papier-crayon. De surcroît, le compas matériel renvoie à plusieurs fonctionnalités de l'environnement numérique : la rotation d'un segment autour d'une de ses extrémités ainsi que les outils compas et cercle de la géométrie dynamique. D'autre part, l'environnement informatisé fait émerger le passage par la ligne brisée pour obtenir un triangle. Cette ligne brisée constitue alors un intermédiaire dans la déconstruction dimensionnelle du triangle et peut être une étape dans la construction du triangle dans l'environnement papier-crayon. Ainsi, l'environnement informatisé est une valeur ajoutée à l'outil matériel pour les apprentissages, en particulier en termes d'aide à surmonter des obstacles épistémologiques.

De même que pour Maschietto et Soury-Lavergne (2013) notre but n'est pas de substituer l'environnement informatique à l'outil matériel dans les usages avec les élèves. C'est

³ L'intégralité du contenu de la situation pour la classe de 6^e est téléchargeable sur le site Édumath.

l'articulation et la complémentarité d'un duo d'artefacts virtuel et matériel qui nous semble intéressante et favorable aux apprentissages des élèves et que nous souhaitons questionner à nouveau dans d'autres situations.

Références bibliographiques

- BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, éd. La Pensée.Sauvage, Grenoble
- DUVAL R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, vol 10, pp 5 à 53.
- ERMEL (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes*. Paris : Éditions Hatier.
- LABORDE C., LABORDE JM. (2011). Interactivity in dynamic mathematics environments : what does that mean? *16th Asian Technology Conference of Mathematics*, Bolu, Turkey.
- LABORDE C., MARCHETTEAU A. (2009). L'incontro tra réale e virtuale in Cabri Elem per attività matemativhe nella scuola primaria. *La matematica e la sua Didattica*, 23, n°1, 19-34.
- MACKRELL K., MASCHIETTO M., SOURY-LAVERGNE S. (2013). The interaction between task design and technology design in ceating tasks with Cabri Elem. In C. Margolinas (Ed.), *Proceedings of the ICMI Study 22 Conference : Task design in Mathematique Education*, Oxford, UK, pp 81-90.
- MASCHIETTO M., SOURY-LAVERGNE S. (2013). Designing a Duo of Material and Digital Artifacts : the Pascaline and Cabri Elem e-books in Primary School Mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* 45(7) 959-971.
- RABARDEL P. (1995). *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.
- SOURY-LAVERGNE S. (2011). De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique. *Les Nouvelles Technologies pour l'Enseignement des Mathématiques*, n°27.
- TROUCHE L. (2004). Managing the complexity of human machine interactions in computerized learning environments : guiding students' command process through instrumental orchestration. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, n°9, 281-307.
- VERGNAUD G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des mathématiques* vol 10 (2-3), pp 133-170.
- MEN (2008). *Horaires et programme de l'enseignement de l'école primaire*. BO Numéro hors série.
- MEN (2008). *Programme d'enseignement de mathématiques*. Collège. Eduscol.education.fr.

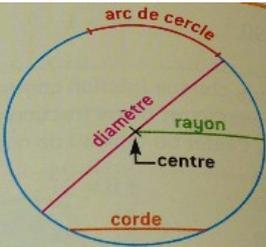
Annexe 1

► **Je retiens** **Cercle, disque, compas**

- Tous les points situés sur le cercle sont à la même distance du centre du cercle. Cette distance est le **rayon du cercle**.

Attention ! Le mot **rayon** désigne également tout segment dont une extrémité est le centre du cercle et l'autre extrémité un point du cercle.

- Des **cercles concentriques** sont des cercles ayant le même centre.
- Le **disque** est la surface intérieure au cercle.
- Le **compas** sert à tracer les cercles, il sert aussi à reporter une distance.

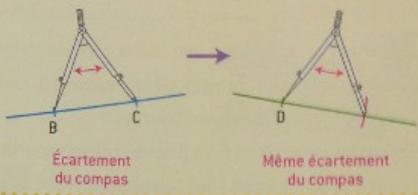


Extrait du Manuel La clé des Maths CM2, Belin 2008

► **Je retiens** **Reporter des longueurs**

La **bande de papier** et le **compas** permettent aussi de reporter une longueur donnée.

Exemple : Je reporte la longueur BC sur le segment vert à partir du point D.



Extrait du Manuel La clé des maths CM1, Belin 2008

Je retiens

On peut en général construire un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés.

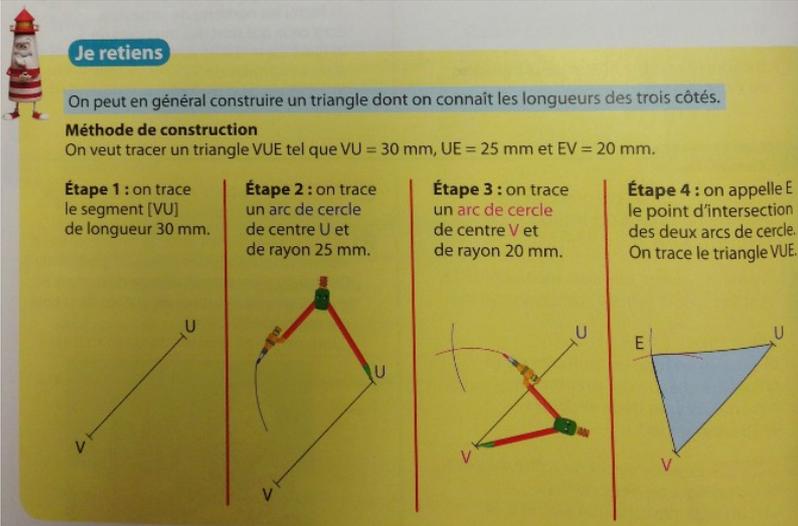
Méthode de construction
On veut tracer un triangle VUE tel que $VU = 30$ mm, $UE = 25$ mm et $EV = 20$ mm.

Étape 1 : on trace le segment [VU] de longueur 30 mm.

Étape 2 : on trace un arc de cercle de centre U et de rayon 25 mm.

Étape 3 : on trace un arc de cercle de centre V et de rayon 20 mm.

Étape 4 : on appelle E le point d'intersection des deux arcs de cercle. On trace le triangle VUE.



Extrait du Manuel Petit Phare CM2, Hachette 2008

Annexe 2

Extraits de réponses d'élèves à la question « À quoi sert un compas ? »

Un compas sert à faire des cercle, des demi-cercle et des arc de cercle : et aussi pour faire tracer les médiatrices

un compas sert à faire des cercle, des demi-cercle ...
il sert aussi à prendre des longueurs (pour la symétrie)
il sert aussi à placer des points à longueur égal d'un autre point.
il sert à tracer des bissectrices

Un compas sert à tracer des cercles, reporter des mesures, à tracer différentes figures, et à faire des bissectrices d'angles et autres... géométriques

Annexe 3

Proposition de déroulement de la situation pour la classe de CM2

Ce scénario compose les environnements, informatique et papier-crayon, en proposant d'alterner cahier informatisé et utilisation du compas dans l'environnement papier-crayon.

Phase 1 : Un premier cahier informatisé : À la découverte des triangles

Travail sur l'ordinateur - 20 à 30 minutes.

Les élèves sont seuls ou en binôme face à un ordinateur et traitent à leur rythme le premier cahier informatisé « À la découverte des triangles ».

Synthèse du travail en classe entière - 15 à 20 minutes.

Cette synthèse permet de faire apparaître :

- que trois longueurs données ne permettent pas toujours de former un triangle ;
- la nécessité de la rotation pour construire un triangle dans l'environnement informatique ;
- l'usage du compas pour construire un triangle dans l'environnement papier-crayon ;
- la ligne brisée avec le plus grand segment entre les deux autres comme stratégie gagnante pour construire un triangle et pour constater que le triangle n'existe pas.

Phase 2 : Utilisation du compas matériel pour construire des triangles dans l'environnement papier-crayon

Activité 1 - 15 minutes.

Les élèves réalisent l'activité 1 individuellement sur la fiche d'énoncé pour a et b et au dos ou sur une feuille blanche pour c et d.

Il est possible de laisser les élèves traiter les 4 questions (a, b, c et d) avant de faire la synthèse ou de faire une première synthèse après que les élèves aient traité les questions a et b.

Synthèse de ce travail en papier-crayon - 10 à 15 minutes.

Il s'agit de mettre en évidence :

- le compas pour faire pivoter les segments extrêmes et produire une trace (arc de cercle) ;
- une méthode pour tracer un triangle à partir de trois segments donnés :
 - tracer une ligne brisée à partir de ces trois segments et faire pivoter les segments ;
 - tracer un segment puis utiliser le compas pour transporter et faire pivoter les deux autres : l'écartement des branches du compas « matérialise » le segment côté du triangle qui pivote ;
- le 3^e sommet du triangle comme intersection des arcs de cercle produit par le compas.

Phase 3 : Un second cahier informatisé : Construire des triangles

Travail sur l'ordinateur - 15 à 20 minutes.

Les élèves traitent individuellement, ou en binôme, le second cahier « Construire des triangles ».

Synthèse de la situation en classe entière - 10 à 15 minutes.

Cette synthèse permet de mettre en évidence :

- l'identification de la trajectoire de l'extrémité qui pivote à un objet mathématique : le cercle ;
- la nécessité de tracer des arcs de cercle, des cercles, dans la construction géométrique du triangle dont on connaît les trois longueurs.

Phase 4 : Retour dans l'environnement papier-crayon et utilisation du compas matériel.

Activité 2 et 3 - 10 à 15 minutes.

Les élèves réalisent l'activité 2 et l'activité 3 individuellement sur une feuille blanche.

Synthèse de ce travail en papier-crayon - 10 à 15 minutes.

Il s'agit ici d'institutionnaliser les cercles sous-jacents à la construction du triangle. Pour construire un triangle on utilise le compas pour tracer des arcs de cercle, des cercles, leur intersection définira le troisième sommet du triangle.

Annexe 4

Proposition de déroulement de la situation pour la classe de 6^e

Ce scénario compose les environnements, informatique et papier-crayon, en proposant d'alterner cahier informatisé et utilisation du compas dans l'environnement papier-crayon.

Une première heure de cours

Les trois phases de travail décrites ci-dessous sont réalisables dans une heure de cours. Les élèves enchaînent les différentes activités dans l'environnement papier-crayon et dans l'environnement informatique à leur rythme.

Phase 1 : Tracer des triangles dans l'environnement papier-crayon - Activité 1 - 10 à 15 minutes

Les élèves réalisent l'activité 1 sur feuille blanche, individuellement et à leur rythme.

Phase 2 : Cahier informatisé : « Construire des triangles ». Travail sur ordinateur 15 à 20 minutes

Les élèves traitent individuellement, ou en binôme, le cahier « Construire des triangles ».

Phase 3 : Retour dans l'environnement papier-crayon. Activité 2 et 3 - 10 à 15 minutes.

Les élèves réalisent l'activité 2 et l'activité 3 individuellement sur une feuille blanche.

Une deuxième heure

Synthèse du travail effectué durant la première heure - 10 à 15 minutes.

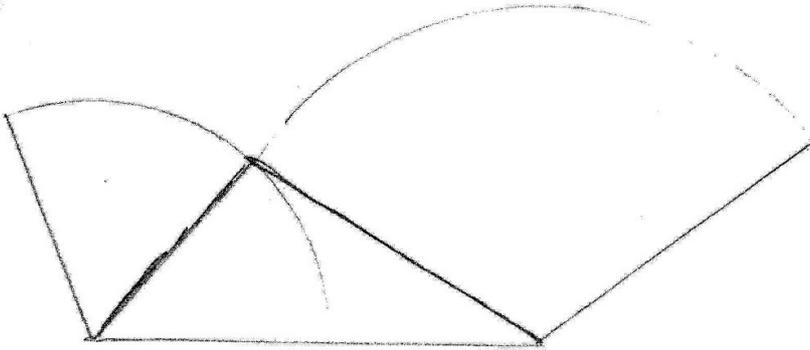
À partir du travail des élèves dans le cahier informatisé, il s'agit :

- de mettre en évidence l'identification de la trajectoire de l'extrémité du segment qui pivote à un objet mathématique : le cercle ;
- d'institutionnaliser les cercles sous-jacents à la construction du triangle : pour construire un triangle on utilise le compas pour tracer des arcs de cercle, des cercles, leur intersection définira le troisième sommet du triangle.

Exercices de construction de triangles à la règle et au compas.

Annexe 5

Extraits de travaux d'élèves : construction d'un triangle en passant par le tracé de la ligne brisée.

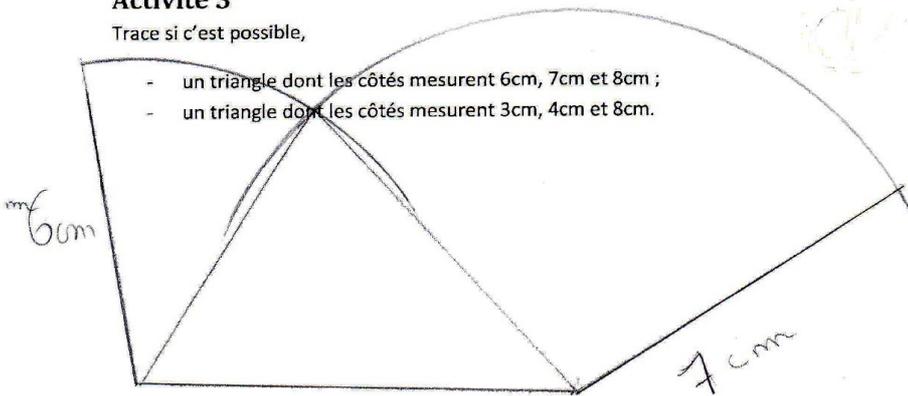


ca se touche et on peut faire un triangle.

Activité 3

Trace si c'est possible,

- un triangle dont les côtés mesurent 6cm, 7cm et 8cm ;
- un triangle dont les côtés mesurent 3cm, 4cm et 8cm.



8cm
se touche c'est un triangle.