CONCEPTIONS D'ÉLÈVES DE COLLÈGE SUR LA NOTION DE VOLUME

Nathalie ANWANDTER-CUELLAR
Université du Québec en Outaouais

Résumé. Dans l'enseignement des mathématiques, le concept de volume est divisé entre deux pôles de conceptions : celles de nature géométrique et celles de nature numérique. En effet, en tant que grandeur, le volume est lié à des tâches relatives aux notions de grandeur et de mesure, lesquelles s'appuient à la fois sur les objets géométriques et les nombres. Nous nous intéressons à la façon dont les élèves de collège conçoivent ces deux aspects attachés au volume. Nous cherchons à expliciter les différents types de problèmes mettant en jeu le volume, les techniques et les connaissances-en-acte utilisées par les élèves, pour finalement caractériser les conceptions élaborées par les élèves en situation.

Mots clés. Volume ; conception ; cadre, connaissance en acte et théorème en acte.

Abstract. In mathematics education, the concept of volume is divided between two conceptual poles, one being geometric and the other, numerical. Indeed, as a concept of magnitude, volume is associated with tasks pertaining to both geometric objects and numbers. This paper addresses how school students conceive these two aspects of volume. We seek to describe the different types of problems used to solicit the concept of volume, as well as techniques and enacted knowledge used by students in solving these problems. Conceptions of volume formulated by students in problem solving situations are in turn analyzed.

Keywords. Volume ; conceptions ; framework, enacted knowledge, enacted theorem.

Introduction

Dans le domaine de la didactique des mathématiques, on trouve peu d'articles français sur le concept de volume. Comme le décrit Perrin-Glorian (2002), dans la période de 1980 à 2001, deux publications abordent ce thème, l'une d'entre elles porte sur l'acquisition de la notion de volume (Vergnaud et al., 1983) et l'autre présente une activité pour l'école élémentaire (Perrin-Glorian, 2002). À celles-ci, nous ajoutons les travaux de Janvier (1992) au Québec qui traitent de l'importance du volume comme outil de conceptualisation de l'espace, travail repris par Tanguay (2010). Aujourd'hui, l'introduction d'un nouveau programme au collège (Ministère de l'Éducation Nationale, 2008) mettant l'accent sur la notion de grandeur (Anwandter-Cuellar, 2012), exige un nouveau questionnement sur l'état des connaissances des élèves à propos des grandeurs, telles que le volume.

La notion de volume possède des propriétés qui peuvent poser des difficultés aux élèves qui l'utilisent en mathématiques. L'un des problèmes provient du fait que dans l'enseignement le concept de volume est en général abordé selon deux axes : géométrique et numérique.

Cette dualité est source d'obstacle pour les élèves, comme le décrivent Douady et Perrin-Glorian à propos de l'aire :

> Ainsi, au sujet de l'aire, les élèves développeraient une « conception forme » liée au cadre géométrique et une « conception nombre » liée au cadre numérique, ou les deux, mais de façon indépendante, et ils traiteraient les problèmes sans établir des correspondances entre les deux points de vue. Or les problèmes d'aire mettent de façon essentielle en relation les cadres numérique et géométrique. (Douady et Perrin-Glorian, 1989, p.395)

C'est pourquoi, dans cette recherche, nous nous sommes interrogés spécifiquement sur ces deux points de vue associés au concept de volume ; le point de vue géométrique, qui considère le volume comme partie de l'espace et le point de vue numérique caractérisé par les mesures et leurs interrelations. Notre objectif vise à saisir les conceptions des élèves à travers l'analyse de leurs procédures et des connaissances utilisées dans la résolution de problèmes qui mettent en jeu la notion de volume. Dans ce but, nous avons construit une classification de types de problèmes et une typologie des conceptions attachées au concept de volume pour modéliser et interpréter d'une part, les réponses des élèves, et d'autre part, les difficultés d'apprentissage et d'enseignement rencontrées. Nous avons voulu également observer, à travers le travail des élèves dans ces problèmes, la coordination (lorsqu'elle est possible) entre les cadres numérique et géométrique.

C'est ainsi que nous avons décidé de recourir à plusieurs dispositifs qui se déroulent en plusieurs étapes :

- Étude de différents types de conceptions associées au volume repérés dans des recherches antérieures et lors d'un premier test ;
- Étude de types de problèmes associés au concept du volume au niveau du collège ;
- Création d'un questionnaire ;
- Mise au point d'une situation-problème et analyse des conceptions des élèves à partir de leurs productions.

Pour l'analyse des problèmes rencontrés par les élèves dans leur compréhension et leurs conceptions de la notion de volume, nous utilisons la théorie cognitiviste de Gérard Vergnaud (1991), et tout particulièrement les concepts de « théorème-en-acte » et de « concepts-en-acte ». Nous rattachons ces problèmes et connaissances à des cadres mathématiques (Douady, 1986). Ces outils théoriques servent de points d'appui pour analyser les liens existant entre les types de problèmes relatifs au volume, les techniques et les connaissances-en-acte utilisées, et ainsi caractériser les conceptions élaborées par les élèves en situation.

1. L'enseignement et l'apprentissage du volume au collège

Dans le programme du collège (Ministère de l'Éducation Nationale, 2008), le volume est considéré comme une grandeur car étudié dans le domaine des « grandeurs et mesures ». En 6ème, les connaissances en jeu sont : le dénombrement d'unités, la démarche de pavage permettant de déterminer le volume d'un parallélépipède rectangle, les unités de volume reliées aux unités de contenance. En classe de 5ème, le travail sur le volume s'étend à de nouveaux objets géométriques, comme le prisme droit et le cylindre. Les types de problèmes proposés par le programme sont centrés sur le calcul du volume de ces nouveaux objets, ainsi que sur les changements d'unités. Ces activités incluent l'enseignement de la formule pour calculer le volume à partir de l'aire de la surface de base et de la hauteur, dans le cas du prisme droit et du cylindre. On trouve au niveau de la 4ème les types de problèmes : calcul du volume d'une pyramide ou d'un cône de révolution à l'aide de la formule $V=1/3.Bh$. L'étude des variations d'une grandeur en fonction d'une

autre est aussi énoncée. Finalement, en 3ème une nouvelle formule est étudiée, celle du calcul du volume d'une boule.
De cette façon, on observe une plus grande diversité de types de problèmes en classe de 6ème. En effet, à ce niveau, on s'intéresse au volume en tant que grandeur, en l'analysant dans les cadres géométrique et numérique à travers les procédures de dénombrement et d'utilisation des formules (Anwandter-Cuellar, 2012). À partir de la classe de 5ème, l'étude de ces objets devient principalement numérique. Les techniques du cadre géométrique, comme le comptage d'unités, disparaissent dans cette classe et le travail se centre sur les calculs de volumes à l'aide des formules et les changements d'unités. Nous pouvons interpréter cette évolution au collège comme une numérisation de l'étude du volume, phénomène décrit par Barbin (2007) dans son article :

> […] En effet, dans l'enseignement élémentaire et au collège, les grandeurs géométriques sont presque toujours associées à des nombres qui le mesurent. Il s'agit donc d'une numérisation des grandeurs. (Barbin, 2007, p.6)

Plus loin, elle explique : « La géométrie de l'enseignement élémentaire est surtout une géométrie numérisée c'est-à-dire une géométrie avec des données numériques (3cm, 5,2 cm, 2 ; 7, 45°, etc.) » (Barbin, 2007). Cette réalité a été déjà exposée en 1980 par Perrin-Glorian (2002) dans son article :

> Les grandeurs géométriques, longueurs, aires, volumes, angles sont restées dans le domaine des mathématiques, mais leur enseignement se rabat très vite sur les formules de calcul avec des nombres en fixant les unités. Dans les années 80, la plupart des manuels de collège définissaient la longueur, l'aire et le volume comme des nombres. (Perrin-Glorian, 2002, p.303)

Le passage à une géométrie numérisée au niveau des classes peut s'expliquer par l'évolution des objets géométriques étudiés (Anwandter Cuellar, 2012). Par exemple, en classe de 6ème, on étudie le volume du parallélépipède rectangle, ainsi les procédures géométriques du dénombrement et du découpage-recollement sont faciles à mettre en place. Par contre, en classe de 4ème, on travaille sur les volumes de la pyramide et le cône de révolution, dans ce cas, la première de ces techniques est difficile à mettre en oeuvre.
De cette manière, les problèmes sont en général rattachés au calcul des volumes à partir de formules, au calcul des changements d'unités ainsi qu'à l'étude des variations utilisant ces mêmes formules. Un bref examen de manuels scolaires d'aujourd'hui (Anwandter-Cuellar, 2008 ; 2012) montre aussi que l'activité géométrique se réduit bien souvent à la reconnaissance des objets géométriques, leur classification et l'application de formules pour effectuer des calculs, sans prendre en compte le volume comme un objet autonome et ses dimensions géométrique et physique. Dans le cas de la géométrie spatiale, les élèves distinguent des corps géométriques comme la sphère et le parallélépipède, et appliquent les formules correspondantes associées au calcul d'aires et de volumes.

Cependant, la notion de volume comporte différentes propriétés, dont la compréhension progressive recouvre une longue période du développement de l'enfant et de l'adolescent. Entre ces deux périodes, interviennent des représentations et opérations géométriques, physiques et arithmétiques (Vergnaud, 1983). Les élèves ont des difficultés dans le maniement du concept de volume parce qu'ils le mettent seulement en rapport avec l'application de formules et de systèmes d'unités. Ceci est visible dans la confusion de termes volume et capacité, ou encore volume et aire, comme le montrent les études réalisées par Vergnaud et son équipe (1983).
Comme le disaient Ricco et al. (1983) : « […] on est amené à considérer que la difficulté du concept de volume est très sous-estimée et qu'aucune réponse n'est apportée à ce

problème dans les programmes et manuels au-delà de la classe de 5ème ». Suite à la mise en place de deux nouveaux programmes au collège, en 1995 et 2005, la problématique soulevée par Ricco et al. (1983) reste toujours d'actualité. En effet, aujourd'hui, si certaines grandeurs, telles que l'aire et la longueur, sont bien étudiées à l'aide des types de problèmes et procédures divers relevant des cadres numérique et géométrique, le volume demeure très fortement lié aux calculs et aux formules à partir de la classe de 5ème (Anwandter-Cuellar, 2012), ce qui nous considérons comme la principale source des difficultés.

2. Cadre Théorique

2.1 Concept de cadre en didactique

Nous nous intéresserons à l'interprétation des problèmes et tout particulièrement au passage d'un cadre à un autre, car en tenant compte des travaux de Douady et Perrin-Glorian (1989) à propos du concept d'aire, nous pouvons dire que les tâches relatives à la notion de volume mettent principalement en correspondance les cadres numérique et géométrique. La notion de cadre est adoptée de la théorie développée par Régine Douady (1986) :

> Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. (Douady, 1986, p.11)

Il semble que des difficultés soient attachées au traitement des problèmes du volume par les élèves, soit du point de vue des solides, soit de point de vue des nombres ou soit de point de vue de l'articulation entre les deux, comme Douady et Perrin-Glorian (1989) l'ont déjà démontré pour la notion d'aire. Par exemple, du point de vue géométrique, certains élèves considèrent que les solides ayant des aires latérales identiques ont des volumes identiques. Les correspondances entre deux cadres différents sont au centre de l'apprentissage, car elles donnent souvent naissance à de nouveaux résultats, à de nouvelles techniques, à la production des nouveaux objets mathématiques, lesquels enrichissent les cadres où se produisent ces mêmes transpositions (Douady, 1986).

2.2 Théorie des champs conceptuels

Nous reprenons les notions de « théorème-en-acte » et de « concept-en-acte », tirées du cadre théorique défini par Vergnaud (1991). Les conceptions des élèves contiennent des « théorèmes-en-acte » qui ne sont pas toujours des vrais théorèmes, et des « concepts-en-acte » qui ne sont pas toujours de vrais concepts scientifiques non plus. Pour comprendre cette idée, il est important de préciser que si les théorèmes scientifiques sont susceptibles de vérité ou de fausseté à l'intérieur d'un domaine considéré, en revanche, le « théorème-en-acte » est une proposition tenue pour vraie par l'élève qui le met en œuvre. Par exemple, Janvier (1992) a montré comme la comparaison entre les volumes de divers solides est souvent influencée par leurs dimensions linéaires. Deux solides ont été présentés aux élèves, une brique faite de plusieurs pièces de Lego et un bâton construit avec le même nombre de pièces. Dans ce problème, certains élèves ont estimé que le bâton a un plus grand volume en tenant pour vrai qu'un objet a un volume plus grand qu'un autre s'il possède une dimension linéaire plus grande que cet autre objet.

Pour sa part, le « concept-en-acte » désigne un concept tenu pour pertinent dans la situation considérée. En physique, par exemple, on peut définir le volume comme la quantité d'eau déplacée par un objet lorsqu'il est immergé. Un concept n'est pas susceptible de vérité ou de fausseté, puisqu'il est seulement pertinent ou non dans sa manière de prélever

l'information. Ce sont les « concepts-en-acte » et les « théorèmes-en-acte » qui dirigent la reconnaissance, par l'élève, des éléments pertinents de la situation, et qui permettent d'inférer l'objectif et les règles d'action adéquates.
Les conceptions des élèves sont étroitement dépendantes des caractéristiques mathématiques des situations qui leur sont proposées. En ce sens, les conceptions ne sont pas relatives aux élèves isolés, mais aux élèves en situation.

Notre propos a été de faire une étude des conceptions à propos du volume chez des élèves du collège dans des situations où interviennent le cadre géométrique et le cadre numérique. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur l'analyse de « concepts-en-acte » et de « théorèmes-en-acte », en suivant les recommandations de Vergnaud :

> L'une des gageures que doit tenir la psychologie qui s'intéresse à l'apprentissage des mathématiques est d'établir des classifications, décrire des procédures, formuler des connaissances en acte, analyser la structure et la fonction des énonciations et des représentations symboliques, dans des termes qui aient un sens mathématique. La spécificité des apprentissages mathématiques est dans les mathématiques elles-mêmes. Cela ne signifie pas que la théorie de l'apprentissage des mathématiques soit tout entière contenue dans les mathématiques. (Vergnaud, 1991, p. 156)

Cette approche nous a conduit à la catégorisation et à la description mathématique des procédures des élèves, à travers l'étude des « théorèmes-en-acte » et des « concepts-en-acte » utilisés par ces élèves en situation de résolution des problèmes sur volume.
Selon Vergnaud (1991), une partie de l'étude d'un champ conceptuel consiste à identifier et à classifier des situations et également à collecter des données sur les formulations employées par les élèves pour exprimer leur raisonnement. Notre étude des conceptions de volume prétend ainsi articuler l'analyse de l'objet mathématique de point de vue de la « connaissances-en-acte » et l'analyse des situations dans lesquelles ces conceptions suscitent le fonctionnement pour l'élève en utilisant une typologie de problèmes.

2.3 Modèle de conception

Jusqu'à présent, nous avons souvent employé le mot « conception ». Il semble nécessaire de montrer la pertinence de ce terme qui nous sert d'outil d'analyse didactique. Il existe différents modèles de conception, cependant nous adoptons pour ce travail le modèle proposé par Artigue (Artigue, 1990). Elle s'appuie sur la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991) pour définir ce qu'est une conception, qu'elle caractérise de la manière suivante :

> Un triplet
> - la classe des situations-problèmes qui donnent son sens au concept pour l'élève,
> - l'ensemble des signifiants qu'il (l'élève) est capable de lui associer, en particulier les images mentales, les expressions symboliques,
> - les outils, théorèmes, algorithmes dont il (l'élève) dispose pour manipuler le concept.
>
> (Artigue, 1990, p.271)

Cependant, Artigue (1990) signale que cette définition globale de la notion de conception est en partie inutilisable du fait qu'il est difficile de déduire la globalité de la conception d'un élève sur un objet mathématique, à partir de son observation en situation, mais c'est le modèle que nous trouvons le plus pertinent à ce stade du travail. Ainsi nous considérons les conceptions comme regroupant les connaissances locales qu'une personne a emmagasinées sur un concept, connaissances organisées et disponibles pour être mises en œuvre dans des situations déterminées.

Nous prenons ici l'approche d'Artigue (1990) dans l'article « Épistémologie et didactique » :

> La conception est un objet local, étroitement associé au savoir en jeu et aux différents problèmes dans la résolution desquels il intervient ; elle va constituer un outil, aussi bien pour l'analyse de ce savoir et l'élaboration de situations didactiques que pour l'analyse stricte du comportement de l'élève. Même si les conceptions font l'objet d'une définition autonome, ce qui intéresse le didacticien, visiblement, ce n'est pas de dresser un catalogue fin des conceptions possibles, mais d'étudier l'articulation conceptions – situations dans un apprentissage donné. (Artigue, 1990, p.270)

Le didacticien cherche-t-il une ou des conceptions portant sur l'objet mathématique d'un groupe de personnes en situations-problèmes. C'est précisément l'articulation entre les conceptions et les situations à laquelle la didactique s'intéresse. En conséquence, nous avons réalisé notre étude des conceptions à partir de la détermination de modèles de conceptions antérieurement identifiés dans la recherche en didactique de mathématiques en faisant le lien avec certains types de problèmes et les techniques.

3. Typologie des conceptions à propos de la notion de volume

Nous avons construit une typologie des conceptions à propos du concept de volume. Nous avons utilisé l'identification des conceptions proposée par Piaget, Inhelder et Szeminska (1973), la catégorisation faite par Saiz-Roldán (2003) et la détermination des concepts-en-acte réalisée par Moreira-Baltar (1994-1995) à propos du concept d'aire.
De Piaget, Inhelder et Szeminska (1973), nous avons retenu le volume délimité, le volume occupé et le volume déplacé. Saíz-Roldán (2003) reprend ces types de conceptions, auxquels elle ajoute la notion de volume comme nombre et la distinction entre volume délimité et volume intérieur. Enfin, nous reprenons de Moreira-Baltar (1994-1995) les concepts-en-acte de volume grandeur, volume nombre et volume mesure en nous basant sur ses analyses à propos de l'aire.

Une première exploration des réponses des élèves au travers d'un premier test a révélé d'autres types des conceptions : par exemple, des élèves confondent le volume avec un solide ou avec une aire. À chaque type de conception, nous avons attribué un cadre au sens de Douady (1986). Nous avons associé, à chaque type des formulations, des théorèmes-en-acte et des concepts-en-acte.

3.1 Conceptions dans le cadre géométrique

- **Volume délimité**

Piaget, Inhelder et Szeminska (1973) présentent la notion de volume topologique comme l'espace délimité par une surface :

> […] le volume est ce qui est enveloppé par un ensemble de frontières, constituées par de surfaces visibles du dehors. (Piaget, Inhelder et Szeminska, 1973, p. 437)

Selon les résultats obtenus par Piaget, Inhelder et Szeminska (1973), avant de concevoir le volume comme une multiplication mathématique, l'enfant conçoit le volume comme ce qui est enveloppé par ses frontières. Ces auteurs appellent également cette conception « volume intérieur ». Mais ils utilisent aussi cette désignation pour se référer à la quantité de matière d'un objet. Pour notre travail, nous distinguerons entre ces deux types de conceptions, le volume délimité et le volume intérieur tel qui a été proposé par Saiz-Roldán (2003) dans sa thèse.

- **Volume occupé**

D'après Piaget, Inhelder et Szeminska (1973), le volume est vu comme le lieu qu'occupe un corps dans l'espace ou la place occupée par un objet mis en relation avec ce qui l'entoure. Ces auteurs en donnent un exemple : si on plonge un objet dans l'eau, le volume occupé sera la place occupée par l'objet dans l'eau. Ils expliquent que les élèves prennent en compte la forme d'un objet, par exemple, dans le cas de 8 cubes, les élèves disent que la place occupée dans l'eau n'est pas la même si les cubes sont organisés sous la forme 2 x 2 x 2 ou sous la forme 1 x 1 x 8.
Pour cette conception, tout objet de l'espace physique a un volume puisqu'il occupe une place dans l'espace, y compris une feuille de papier.

3.2 Conceptions dans le cadre numérique

- **Volume-nombre**

Moreira-Baltar (1994-1995) identifie quatre concepts-en-acte à propos de la définition de l'aire. Nous avons repris aire-nombre comme un type de concept pouvant être retrouvé dans les conceptions attachées au volume. Dans cet encadrement, le volume est vu comme le nombre obtenu au moyen d'une formule sans aucune relation avec le volume comme grandeur. Par exemple, un théorème-en-acte est de penser qu'une toupie n'a pas de volume parce qu'il n'existe pas de formule connue pour calculer son volume.
Ce type de conception est placé dans le cadre numérique, puisqu'il fait directement référence aux formules pour calculer le volume. Les théorèmes-en-acte associés correspondent, en général, aux formules de calcul des volumes.

- **Volume-mesure**

En reprenant l'article de Moreira-Baltar (1994-1995) à propos des aires, on peut définir le volume comme le nombre d'unités nécessaires pour recouvrir un solide. On parle de quantité de centimètres cubes par exemple. Pour ce calcul, on introduit la notion de mesure-fonction définie comme une application additive et positive d'un ensemble mesurable dans IR (Brousseau G. et Brousseau N., 1991-1992). Une fois l'unité de mesure choisie, on se pose la question de savoir combien d'unités sont nécessaires pour remplir le solide. On peut distinguer des théorèmes-en-acte et concepts-en-acte attachés à cette conception, selon les propriétés de la mesure comme l'additivité simple ou l'invariance par isométrie.

3.3 Conceptions dans le cadre numérique-géométrique

- **Volume grandeur**

Moreira-Baltar (1994-1995) a aussi regardé l'aire comme une grandeur. Comme est mentionné par le programme du collège (Ministère de l'Éducation Nationale, 2008), le volume est une grandeur, c'est-à-dire, il est une caractéristique commune aux solides qu'on peut mesurer. D'après le document d'accompagnement du collège « Grandeurs et mesures » (D.G.E.S.C.O., 2007), on suppose un ensemble de solides et on établit une relation d'équivalence pour définir l'espèce de grandeur volume. Deux solides équivalents ont le même volume. À partir de cette relation, on peut définir sur cette structure l'ordre, l'addition, la soustraction et la division sans faire appel aux mesures.

3.4 Conceptions dans le cadre physique

- **Volume déplacé**

Cette conception a été identifiée par Piaget, Inhelder et Szeminska (1973) et Saíz-Roldán (2003) dans leurs travaux. Le concept de volume déplacé vient du principe d'Archimède : « Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps) ». Dans cette conception, le volume d'un objet, c'est la quantité d'eau déplacée quand on plonge l'objet dans l'eau (voir aussi ci-dessus).

- **Volume intérieur**

Les résultats de ces recherches ont amené Saíz-Roldán (2003) à distinguer le volume délimité et le volume intérieur. À la suite d'une expérimentation, l'auteure a observé que certains élèves pensent que les objets creux, comme un cylindre fait avec une feuille de papier, n'ont pas de volume.
Le volume intérieur est considéré comme la quantité de matière au sens physique qui constitue un objet. Nous avons considéré deux sens, un premier sens pour les objets pour lesquels la matière fait partie de leur structure, par exemple un madrier. Le deuxième sens est la quantité de matière que l'on peut mettre dans un objet. Pour une boîte remplie de sable, on considère le volume intérieur comme la quantité de sable. De ce point de vue, les concepts-en-acte liés au volume comme capacité font partie de ce type de conception.

3.5 Confusion du volume avec d'autres concepts

- **Volume aire**

À la suite de notre premier test, nous avons remarqué que le volume peut être confondu avec l'aire. Ce type de conception a été observé lors de la pré-expérimentation, par exemple, dans des réponses comme « le volume c'est la surface » ou « le volume c'est l'aire d'un objet ». La non-différenciation entre les deux concepts peut créer une dépendance entre les deux en arrivant par exemple au théorème-en-acte « Le volume et l'aire d'un solide varient dans le même sens ».

- **Volume objet**

Les réponses des élèves à notre questionnaire de pré-expérimentation nous ont révélé que le volume est souvent confondu avec le solide dont on étudie le volume. Les élèves peuvent utiliser différents mots pour se référer à l'objet, comme une figure, un dessin, etc. Ce type de conceptions correspond à des théorèmes-en-acte comme « si deux objets ont le même volume, alors ils sont identiques ».

4. Problèmes associés au volume

Nous pouvons identifier plusieurs grandes classes de problèmes laissées à la charge de l'élève. Moreira-Baltar (1994-1995) a proposé une classification des situations-problèmes relatives au concept d'aire des surfaces planes, classification que nous avons généralisée sous la forme des genres de tâches qui concernent les grandeurs (Anwandter-Cuellar, 2012) :

- comparer des grandeurs,
- calculer une grandeur,
- étudier l'effet des déformations et des transformations géométriques et numériques sur l'une des grandeurs d'un objet,
- produire un objet d'une grandeur donnée,
- produire un objet d'une grandeur plus grande ou plus petite que la grandeur d'un objet donné,
- donner la mesure d'une grandeur dans une autre unité,
- mesurer une grandeur.

Pour ce travail, nous présentons cette typologie adaptée pour le volume.

4.1 Type de problèmes P'1 : Comparer des volumes

En nous basant sur l'article de Moreira-Baltar (1994-1995), nous pensons que pour comparer les volumes, les élèves peuvent utiliser trois types de procédures : numériques, géométriques ou physiques.

- Procédure par comparaison de mesures

Pour comparer les volumes de deux solides, on peut comparer leurs mesures. L'invariant sur lequel repose ce type de procédure est que la relation d'ordre pour les mesures est le même que pour le volume. Les mesures des volumes peuvent être faites au moyen de l'application des formules de calcul de volume, de ce point de vue la conception du volume comme nombre joue un rôle fondamental.
On peut obtenir les mesures des volumes au moyen du comptage du nombre d'unités nécessaires pour recouvrir chaque solide (si cela est possible). La conception associée est volume mesure.

- Procédure par inclusion et superposition (si cela est possible)

La procédure de comparaison par inclusion est un processus empirique (concret, matériel) possible seulement dans certaines circonstances. On peut, par exemple, comparer les volumes de deux boîtes si l'on peut mettre l'une dans l'autre : la conception associée est celle du volume comme espace délimité ou espace occupé. La propriété en jeu est la monotonie, si A est un sous-ensemble de B alors $V(A)<V(B)$.

- Procédure par découpage – recollement

Si un solide S' est obtenu à partir d'un solide S par découpage- recollement, alors S'et S ont même volume (la réciproque n'est pas toujours vraie). Le processus de découpage-recollement considère le volume comme une grandeur, indépendante de l'objet et la mesure.
Si on utilise des objets matériels, le volume peut être considéré comme l'espace intérieur.

- Procédure par comparaison des éléments constitutifs de la figure

Il s'agit de problèmes où, pour comparer les volumes, on est amené à comparer des solides de la même famille, en prenant comme repère leurs bases, hauteurs, longueurs et largeurs. Les connaissances en jeu sont du type : « deux prismes droits qui ont la même base et la même hauteur ont le même volume ».
Une conception du volume-objet peut amener les élèves à établir des conclusions en prenant en compte la mesure de certaines dimensions de l'objet. Par exemple, si on a deux parallélépipèdes rectangles de dimensions 1cm x 2cm x 6cm et 3cm x 3cm x 2cm, les élèves considèrent que le premier solide a plus grand volume puisqu'il a une dimension plus « élargie » que les autres.

- Procédure par comparaison de masses

On peut comparer deux solides par leurs masses, cette possibilité est valide lorsque les masses ne dépendent pas de la forme des solides, mais seulement du fait qu'elles sont réalisées dans un même matériau homogène.

- Procédure par comparaison de contenances

La comparaison se fait sur les objets susceptibles d'être mesurés par rapport à la capacité, c'est-à-dire, les récipients. On compare la mesure de la contenance de chaque récipient.

4.2 Type de problèmes P'2 : Calculer le volume d'un solide

Plusieurs procédures peuvent être utilisées pour calculer des volumes.

- Procédures par pavage

« Un solide S est payable avec un solide s si on peut remplir S avec un nombre entier n de copies de s sans laisser des trous et sans chevauchement ». Dans les opérations de pavage, le pôle géométrique est très important, puisque la possibilité de pavage effectif dépend de la forme du solide et de celle de l'unité de volume choisie.
La conception du volume comme grandeur montre l'autonomie du concept par rapport à l'objet et à la mesure. En revanche, le comptage d'unités amène les élèves à établir une conception du volume mesure.

- Procédure du calcul du volume par l'usage de formule de calcul

Il s'agit de problèmes où l'on demande de calculer le volume d'un solide usuel dont on connaît la formule de calcul. Dans ce type de problèmes, la conception du volume-nombre est présente. Ainsi, les théorèmes-en-acte sont associés aux connaissances des formules de calcul des volumes.

- Encadrement

Ce sont des problèmes où l'on demande d'encadrer le volume d'un solide de bord irrégulier ou arrondi par des solides dont on sait calculer le volume. C'est un moyen indirect de trouver une approximation de la mesure du volume du solide.

- Immersion

Si l'on immerge un objet dans un récipient, le volume correspondra à la quantité d'eau déplacée. On peut distinguer la conception volume-déplacé dans ces types de problèmes.

4.3 Type de problèmes P'3 : Étudier les effets des déformations et des transformations géométriques et numériques sur le volume d'un solide

- Variation du volume au cours de transformations géométriques (cadre géométrique).

Le volume est invariant par isométrie, autrement dit si l'on applique une isométrie à un solide, son volume se conserve. C'est une propriété relative à la mesure. La conception volume-grandeur est liée à ce type de variation.

- Optimisation du volume sous contraintes (cadre numérique)

Ce sont des problèmes du type, « trouver le plus grand volume pour une aire fixée ». Dans ces types de problèmes, il est nécessaire de distinguer le volume de l'aire. Les théorèmes-en-acte qui peuvent être mis en œuvre sont ceux qui mettent en relation la formule de l'aire et la formule du volume d'un solide.

- Multiplication par un facteur k des grandeurs linéaires d'un solide.

Il s'agit d'observer l'effet de la multiplication par un facteur k des grandeurs linéaires du solide sur le volume. Par exemple, on étudie les effets de certaines transformations comme le rapport de la mesure transformée par un facteur k appliqué aux trois dimensions du volume, si :

- Pour la longueur cet invariant est k ;
- Pour la surface l'invariant est k^2 ;

Alors pour le volume l'invariant est k^3.

Ces types de problèmes sont liés à la conception du volume-nombre.

4.4 Type de problèmes P'4 : Produire un solide associé à un volume donné

On peut demander aux élèves de produire un solide de même volume qu'un autre solide, ou que le volume soit un tiers, le double, etc.

- Le comptage du nombre d'unités

Les procédures du type pavage sont associées aux problèmes de mesure de volume. Elle est justifiée du point de vue mathématique par la propriété selon laquelle une fois choisie l'unité de volume, des solides de même mesure auront le même volume. Ainsi l'élève peut faire le passage de la mesure (cadre numérique) à la production du solide (cadre géométrique). La conception en jeu est le volume-mesure.

- Découpage – recollement

Cette procédure est associée à la production d'un solide de même solide qu'un autre. Elle repose sur l'additivité des volumes et l'invariance du volume par isométrie. L'élève peut observer l'autonomie du volume comme une grandeur.

4.5 Type de problèmes P'5 : Produire un solide de volume plus grand ou plus petit qu'un solide donné

- Construire un solide à l'intérieur (ou à l'extérieur) du solide de départ.

Cette procédure est justifiée par la propriété de monotonie, A est un sous-ensemble de B alors $V(A)<V(B)$. L'élève peut concevoir le volume comme l'espace délimité ou l'espace occupé.

- Découper (ou ajouter) un morceau de solide de départ.

Cette procédure se justifie également par la propriété de monotonie et plutôt liée à la conception volume-intérieur. Le fait de découper un morceau fait référence à un objet plein.

- Calculer la mesure et produire

Cette procédure consiste à calculer la mesure du volume du solide de départ et à produire un solide de volume plus grand ou plus petit. Donc, la conception en jeu est le volume-nombre. L'élève fait une étude numérique des dimensions du solide et ses relations avec la formule pour calculer son volume.

4.6 Type de problèmes P'6 : Donner la mesure du volume pour une autre unité de volume

Dans ce type de problème, le cadre numérique est beaucoup plus important que le cadre géométrique. Il est possible que la géométrie soit absente. Les changements d'unités prennent en compte les formules associées à chaque relation entre les unités.

4.7 Type de problèmes P'7 : Mesurer une grandeur

À l'aide des instruments de mesure, on peut donner la mesure concrète approchée du volume d'un objet. Dans ce genre de problèmes interviennent les solides, le volume, la mesure approchée et les instruments de mesure. Par exemple, on pourrait calculer le volume d'un liquide en utilisant une éprouvette graduée.

5. Expérimentation

5.1 L'expérimentation

Pour procéder à notre expérimentation, nous avons choisi d'appliquer deux dispositifs différents dans des classes du collège, un questionnaire (dispositif A) et une situation-problème (dispositif B), et ainsi saisir les conceptions des élèves placés en situation de résolution d'un problème.
Pour la construction des dispositifs et pour ses analyses, nous nous sommes appuyés sur la construction d'une typologie des conceptions et sur l'identification des divers types de problèmes et procédures associés au volume.

5.2 Contexte de l'expérimentation

L'expérimentation a eu lieu dans trois classes, deux de 4ème et une de 3ème, des collèges de la ville de Montpellier. Dans les trois classes, les élèves étaient censés avoir les connaissances minimales pour résoudre les problèmes exposés dans le questionnaire. Selon le programme de collège (Ministère de l'Éducation Nationale, 2008) de 6ème et 5ème, les élèves devraient connaître le concept de volume, ainsi que les formules permettant de calculer le volume du parallélépipède rectangle, du prisme droit et du cylindre de révolution et les unités de volume.
Le questionnaire (Dispositif A) a été présenté aux élèves pendant des cours de mathématiques de fin d'année. Nous leur avons laissé une heure de travail individuel pour résoudre ces problèmes. Dans une deuxième session, nous avons présenté la situation-problème (Dispositif B) en donnant également une heure de travail. Elle a été présentée à seulement deux des trois classes, pour motifs de temps.

L'application des dispositifs se résume dans le tableau 1 :

Collège	Classe	Nombre d'élèves	Dispositifs appliqués
C1	4ème	33	A
C2	3ème	29	A et B
C3	4ème	27	A et B

***Tableau 1**. Liste des collèges et dispositifs appliqués.*

5.3 Le questionnaire

Nous avons décidé de commencer notre questionnaire par une question posée par Vergnaud et son équipe en 1983 (Cf. figure 1). Notre objectif est d'obtenir des définitions verbales du volume et de repérer les possibles concepts-en-acte construits par les élèves. Ensuite, le questionnaire proposé aux élèves comportait des problèmes qui impliquaient l'indépendance ou les relations du volume, des nombres et des solides. Comme nous nous intéressons au volume en tant qu'objet mathématique, nous nous sommes centrés sur les conceptions relevant des cadres géométrique et numérique et sur les confusions entre volume-aire et volume-objet sans prendre en compte le cadre physique.
Ainsi, notre suite de questions comportait :

- Une tâche d'exposition des idées autour du concept du volume ;
- Une tâche de comptage d'unités pouvant être contenues dans un solide ;
- Des tâches de calcul d'un volume (P'2)
- Des tâches de comparaison de volumes (P'1) et des aires des solides ;
- Des tâches de production d'un solide de volume donné (P'4).

Pour l'analyse a posteriori nous avons construit des tableaux qui prennent en compte les variables suivantes : le cadre, les techniques, les théorèmes-en-acte et concepts-en-acte et le nombre et pourcentage des élèves qui utilisent ces techniques (Anwandter-Cuellar, 2008). Dans la suite, nous présenterons certains résultats de nos dispositifs qui nous semblent les plus révélateurs à propos des conceptions et des difficultés des élèves du collège.

6. Les conceptions des élèves en situation : Le questionnaire

6.1 Les définitions du volume données par les élèves

Voici la question 1 proposée aux élèves :

Question 1 :
a) D'après toi, qu'est-ce qu'un volume ?
b) Si tu devais l'expliquer à un copain, que lui dirais-tu ?
(Vergnaud et al.,1983)

Figure 1*. Question 1 du questionnaire.*

Pour l'analyse de la question 1, nous avons élaboré une liste de mots (un élève peut utiliser plusieurs mots à la fois) pour observer la diversité des définitions obtenues et les possibles et les objets les plus fréquents auxquels les élèves font référence.
Nous avons trouvé 28 mots différents pour expliquer le concept du volume. Cela rend compte de l'hétérogénéité des conceptions des élèves du collège à propos du volume tel qui l'a montré la recherche entamée par Ricco, Vergnaud et Rouchier (1983) vingt-cinq ans auparavant. Les mots les plus utilisés par les élèves sont : 3 dimensions (41%), objet (49%), figure (49%), contenir (41%), espace (40%), intérieur (33%) et forme (27%). Dans le cadre géométrique, 7 élèves définissent le volume comme « la place qui prend un objet », 17 comme « l'intérieur de l'objet » et 13 font référence au volume comme une « figure ». Ainsi, les conceptions volume occupé, volume délimité et volume objet sont présentes dans le bagage des connaissances de ces élèves. Dans le cadre numérique, cette première question montre aussi que les élèves n'utilisent presque pas des notions relevant du numérique pour définir le volume. En effet, un seul élève a écrit : « le volume est la longueur multipliée par la largeur multipliée par la hauteur ». Dans le cadre physique, les résultats nous ont aussi révélé le lien entre le volume et les concepts attachés à ce cadre, car 13 élèves sur 77 ont utilisé des mots comme « poids » et « masse » pour définir le volume.
Nous considérons qu'une liste de mots est insuffisante pour montrer les conceptions des élèves. Pour aller plus loin dans leur repérage, nous avons procédé à une classification des réponses en nous basant sur notre typologie. Nous avons essayé d'associer les mots des réponses à des conceptions de la typologie. Pour préciser les résultats obtenus, nous présentons le tableau 2, avec les conceptions et les pourcentages obtenus pour chacune.

Ces résultats nous révèlent la diversité des conceptions que les élèves expriment verbalement. Comme Potari et Spiliotopoulou (1996) l'ont déclaré, la notion de volume est constituée de différentes propriétés et elle est en relation avec différentes notions mathématiques et physiques comme la matière, la masse ou le poids. Ainsi les enfants construisent ces nombreuses significations en fonction de leur expérience personnelle et de la nature des situations-problèmes qu'ils vivent dans l'enseignement.

Type de conception	Exemple de réponse	Pourcentage d'élèves
Volume-occupé	C'est ce qu'occupe un objet	7%
Volume-délimité	C'est l'espace délimité	43%
Volume-objet	C'est un solide	30%
Volume-aire	C'est la surface	7%
Volume-mesure	C'est le nombre d'unités	3%
Volume-nombre	C'est la longueur multipliée par la largeur multipliée par la hauteur	1%
Autres	C'est le poids	11%

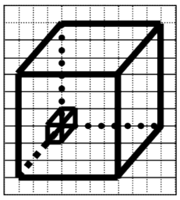
Tableau 2. *Réponses obtenues pour la question 1.*

6.2 Le calcul du volume

La figure 2 présente le problème 1 du questionnaire. À l'aide de cette question, nous cherchons à savoir si les élèves sont capables d'utiliser la procédure de pavage, de faire des comptages, de calculer le volume d'un solide et s'ils recourent à la propriété d'additivité.

Problème 1 :

a) Combien de petites boîtes peut-on ranger dans la grande boîte en les disposant dans le même sens que sur le dessin ci-dessous?



b) La petite boîte a pour dimensions 4 cm de longueur, 2 cm de largueur et 2 cm de hauteur.

I. Quel est le volume de la petite boîte ? Explique ta réponse.

II. Quel est le volume de la grande boîte ? Explique ta réponse.

(Fourton et al., 2005, p. 268)

Figure 2. *Problème 1 du questionnaire.*

Résultats

- Des confusions persistantes

Dans la question 1a), il s'agit de calculer le nombre de petites boîtes pouvant remplir la grande boîte en utilisant le pavage. Pour ce problème, nous avons repéré quatre techniques mises en œuvre par les élèves : comptage bidimensionnel de cubes (29%), comptage tridimensionnel (23%), calcul des volumes des deux boîtes et de leur division (8%), calcul du volume en multipliant deux longueurs (10%). Ces techniques peuvent être associées à des concepts et théorèmes-en-acte tels que l'additivité du volume, la formule du volume d'un parallélépipède rectangle comme le produit de trois ou deux dimensions. En vue de ces résultats, on remarque que les élèves sont capables de paver des solides simples, comme le parallélépipède rectangle, et de compter le nombre de pavés en utilisant de diverses procédures. Par contre, on observe que certains élèves ont utilisé un théorème-en-acte erroné en appliquant la formule incorrecte pour le calcul du volume, celle-ci est dénommée par Ricco et al. (1983) une procédure du type « surface ». Ils prennent les mesures des longueurs de deux côtés pour calculer le volume et les multiplient en associant leur procédure à un calcul d'aire. Il existe donc chez quelques élèves une confusion entre les formules de calcul de volume d'un parallélépipède rectangle et l'aire d'un rectangle.

- Une conception de volume-nombre prédominante

Quand il s'agit de calculer le volume d'un parallélépipède rectangle où les mesures des côtés sont données, en général, les élèves n'ont pas de difficulté (81% de réussite). Deux théorèmes-en-acte sont employés par les élèves, le volume d'un parallélépipède rectangle est le produit de la base fois la hauteur et il est aussi le produit des mesures de ses côtés. La procédure numérique d'utilisation d'une formule est ainsi bien maîtrisée par la plupart des élèves et la conception du volume nombre ressort dans leurs productions.
Avec l'item 1b)ii) nous voulions savoir si les élèves emploient la propriété additive du volume ou le théorème-en-acte qui dit que si S et S' sont des solides quasi-disjoints V(SUS')=V(S)+V(S'). L'additivité du volume suggère des conceptions du type volume mesure et volume nombre. Les résultats nous ont montré que cette propriété est apparue dans 46% des réponses des élèves à travers la technique de multiplication du nombre de petites boîtes par le volume d'une petite boîte. Cependant, certains élèves ont multiplié les mesures de la grande boîte obtenues à l'aide des mesures de la grande boîte (13%), même s'ils connaissaient déjà le nombre de petites boîtes pouvant être rangées dans la grande boîte et le volume de la petite boîte. Il semble alors que la propriété d'additivité n'est pas très évidente chez les élèves du collège et ainsi une conception de volume-mesure serait moins présente dans les situations de calcul du volume.
Un autre élément intéressant à regarder est le fait que si 26 % des élèves ont bien réussi la question 1bi), ils ont échoué la question 1a). Ces élèves ont multiplié seulement deux longueurs pour calculer la quantité de boîtes qu'on peut ranger dans la grande boîte, mais ils ont multiplié les trois longueurs de la petite boîte pour calculer son volume. Il semble que ces élèves connaissent la formule de volume d'un parallélépipède rectangle et sont capables de l'utiliser dans des problèmes directs de calcul de volume, mais le transfert de cette connaissance à des problèmes nécessitant un comptage tridimensionnel n'est pas réalisé. Alors, nous pouvons dire que la conception volume nombre prendre une place considérable dans les conceptions chez certains élèves en détriment d'une conception volume mesure. Nous considérons ce fait comme un obstacle à l'apprentissage, car les situations-problèmes relatives à la notion de volume nécessitent l'articulation entre les cadres géométrique et numérique, et la conception de volume mesure est un élément d'articulation entre ces deux cadres.

6.3 La comparaison des volumes et des aires

La figure 3 présente le problème 2 du questionnaire.

Problème 2 :
Compare le volume des solides suivants : sont-ils plus petits, plus grands ou égaux, les uns par rapport aux autres ? Argumente ta réponse.
Deux empilements sans trous de cubes égaux de 1 cm d'arête.

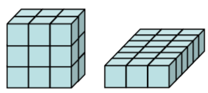
(Fourton et al., 2005, p. 254)

***Figure 3**. Problème 2 du questionnaire.*

À l'aide de ce problème, nous cherchions à savoir si les élèves comparent les volumes de deux solides en utilisant des procédures géométriques comme le comptage ou s'ils se placent plutôt dans un cadre numérique en employant les formules et l'unité 1cm3. De plus, nous voulions observer si la disposition spatiale du solide a une influence sur les réponses des élèves.

Les analyses des résultats nous ont révélé que les élèves ont principalement utilisé les techniques de comptage bidimensionnel (43%) et que certains d'entre eux (24%) s'appuient sur des formules. De cette manière, les conceptions les plus présentes sont volume mesure et volume nombre. Même si nous avons placé la conception volume mesure dans le cadre numérique, des éléments de la cadre géométrique font partie des connaissances des élèves comme la visualisation de l'objet géométrique et sa décomposition en plusieurs parallélépipèdes rectangles. En outre, deux élèves ont justifié leurs réponses en utilisant la comparaison des dimensions des solides : « si un solide a une plus grande longueur qu'un autre solide son volume est aussi plus grand ». Comme l'a signalé Janvier (1992), le raisonnement qui permet de contourner cette difficulté est la décomposition des solides en petites parties, dans notre cas en petits cubes et ensuite en étages. L'auteur indique que la capacité à décomposer et à recomposer des objets spatiaux est une habileté spatiale centrale. Les difficultés rencontrées par les élèves, nous pouvons les associer, d'une part, à une conception fermée de volume occupé, dans le sens que le volume d'un objet dépend de sa configuration dans l'espace physique. D'autre part, ces élèves confondraient le volume et l'objet. Cela pourrait faire obstacle à l'apprentissage du concept du volume, car ces conceptions peuvent empêcher la mise en œuvre de la procédure de découpage-recollement nécessaire dans la résolution de plusieurs types de problèmes comme nous l'avons montré dans notre typologie.
Ci-dessous le problème 3 du questionnaire :

Problème 3 :
Les suivants solides sont formés de cubes de 1 cm d'arête.



a) Ont-ils le même volume ?
b) Ont-ils la même aire ?

(Bocté et al., 2006, p. 275)

***Figure 4**. Problème 3 du questionnaire.*

Il s'agit d'un problème de comparaison des volumes et des aires. Nous voulions savoir si la disposition spatiale a une influence sur les conceptions des élèves à propos du volume et si les élèves distinguent le volume de l'aire d'un solide. Les techniques les plus utilisées pour la partie a) sont le comptage de cubes (30 %) et l'application de la formule du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle (34 %). Ainsi les conceptions plus récurrentes sont le volume-mesure et le volume-nombre. Les mêmes deux élèves, qui ont comparé les volumes des solides à l'aide de leurs dimensions, ont justifié leurs réponses en s'appuyant sur le théorème-en-acte « deux solides de formes différentes ont des volumes différents ».

Comme nous l'avons précédemment indiqué, nous croyons que la difficulté s'explique par une conception fermée du volume occupé ou une conception volume-objet.

La question b) traite la comparaison des aires des solides. Premièrement, nos analyses nous ont révélé que les élèves rencontrent des difficultés dans le calcul de l'aire d'un solide. En effet, seulement 15% des élèves ont réussi la tâche. Deuxièmement, trois formules ont été employées par les élèves pour calculer le volume (V) d'un parallélépipède des longueurs a, b et c :

- V= abc (2% des élèves),
- V= ab ou V=ac ou V=bc (38% des élèves),
- V=2ab+2bc+2ac (15% des élèves).

Cela nous montre que certains élèves ne transfèrent pas la formule de calcul de l'aire d'un rectangle à trois dimensions. Il semble que le calcul des aires soit très attaché à l'application d'une formule connue, sans vérifier sa validité dans le contexte. Ces difficultés pourraient être dépassées à l'aide d'un travail sur les conceptions des aires et des volumes en tant que grandeurs pour construire des liens entre les objets et les formules. En effet, comme le signalent Douady et Perrin-Glorian (1989) « Le développement dans l'enseignement du concept d'aire en tant que grandeur permet aux élèves d'établir les relations nécessaires entre les deux cadres (géométrique et numérique) ». Troisièmement, le théorème-en-acte « deux solides de formes différentes ont des aires différentes », cité dans le paragraphe précédent, recouvre un domaine d'application plus large, car les élèves ont aussi exprimé que « deux solides de formes différentes ont des aires différentes ».

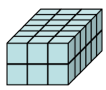
7. Les conceptions des élèves en situation : La situation-problème

La situation-problème ou dispositif B traite le lien entre le cadre numérique et le cadre géométrique. Nous cherchons à savoir si les élèves sont capables d'articuler les objets et les formules de calcul. Il est composé de deux types de problèmes :

i. Production de solides d'un volume donné.
ii. Comparaison de volumes.

La figure 5 présente la situation-problème :

Situation problème :
Luc possède 36 petits cubes de 1 cm d'arête. Il veut les arranger de façon à former des parallélépipèdes rectangles comme indiqué ci-dessous :



a) Indique toutes les possibilités de rangement qui donnent de parallélépipèdes rectangles différents.
b) Luc pense que les parallélépipèdes rectangles obtenus ont la même volume. Qu'en penses-tu ?

(Fourton et al., 2005, p. 265)

***Figure 5**. Situation-problème.*

Pour l'analyse des réponses, nous avons organisé dans un tableau les éléments suivants : le cadre, les techniques, les théorèmes-en-acte et concepts-en-acte et le pourcentage des élèves qui ont donné ce type de réponse. Nous avons inclus des items dénommés « Autre type de réponse ou information insuffisante » pour classifier les réponses incomplètes qui ne donnent pas d'indices pour les analyser et « pas de réponse » quand l'élève ne donne aucune réponse. Nous avons juste inclus les techniques plus utilisées par les élèves.

7.1 La production d'un solide d'un volume donné

Voici un tableau résumant les résultats obtenus par rapport à la question a) de la situation-problème.

Cadre	**Techniques**	**Description des techniques**	**Théorèmes en acte et concepts en acte**	**Exemple de réponse**	**Total**	**%**
Géométrique	Essai-erreur	Les élèves dessinent des solides sans prendre en compte les diviseurs du nombre 36. Le moyen de validation est le comptage de cubes.	-Le découpage-recollement conserve le volume -Si S et S' sont quasi-disjoints, V(S U S')=V(S) + V(S') - Comptage bidimensionnel et tridimensionnel - Le volume est invariant par isométrie.	Un élève dessine différents solides, par exemple, l'un de dimensions 3x7x1, mais le dessin est barré.	6	19
Numérique	Décomposer le nombre 36 en produit de trois nombres.	Les élèves font la décomposition multiplicative du nombre 36. Ainsi, les élèves donnent les solides en fonction de leurs dimensions.	-Formule de calcul du volume d'un parallélépipède rectangle -Décomposition multiplicative d'un nombre. -Un parallélépipède rectangle est complètement défini par ses dimensions -Le volume est invariant par isométrie.	Un élève donne la réponse suivante : 36=6x6x1 36=36x1 36=3x3x4 36=9x4x1 36=2x2x9 36=3x12x1 36=2x2=6	9	29
Géométrique-Numérique	Essai-erreur en prenant en compte les diviseurs de 36.	Les élèves utilisent des diviseurs de 36, mais ils s'appuient aussi sur les dessins ou sur le comptage pour la validation.	- Décomposition multiplicative d'un nombre. -Formule de calcul du volume d'un parallélépipède rectangle V=Lxlxh -La formule considérée pour le calcul du volume d'un parallélépipède rectangle est V=axb -Comptage bidimensionnel et tridimensionnel	Un élève donne le dessin et les dimensions des côtés. Quelques parallélépipèdes ont les mêmes dimensions, mais ils sont positionnés de façon différente. Ils ne donnent pas la décomposition du nombre 36, mais le produit des dimensions de dessins donne 36.	11	36

***Tableau 3**. Réponses obtenues pour la situation-problème partie a).*

Une partie des élèves (29%) n'utilise pas les dessins. Leurs réponses sont situées complètement dans un cadre numérique. Ils font appel au théorème-en-acte : « un parallélépipède rectangle est totalement défini par les mesures de ses dimensions ».

Cependant, dans ce problème, nous avons constaté des difficultés pour associer les dessins avec la formule du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle. Certains élèves (19%) ont essayé de ranger les cubes sans prendre en compte la décomposition multiplicative du nombre 36. Par exemple, un élève a positionné d'un côté du parallélépipède rectangle 5 cubes et après avoir observé que le comptage n'aboutit pas à 36 cubes, il a barré le dessin.

Ainsi, certains élèves rencontrent des difficultés pour faire des liens entre les mesures des côtés de l'objet et la formule. Nous pouvons dire que les élèves n'établissent pas de façon efficace des correspondances entre le cadre numérique et géométrique. Tel que Douady et Perrin-Glorian (1989) l'ont constaté pour l'aire, ces liens ne sont possibles qu'à travers la construction d'une conception volume-grandeur chez les élèves. Nous pensons que le type de problème « construire un solide de mesure de volume donné » exploite au moyen du jeu de cadres (Douady, 1986), une articulation très riche de trois conceptions relatives aux mathématiques : volume-nombre, volume-mesure et volume-grandeur. Dès lors, les questions qu'on peut se poser sont celles de savoir pourquoi ce type de tâches est presque inexistant dans les programmes (Anwandter-Cuellar, 2012) et celles des conditions sous lesquelles le type de problème « P'4 : construire un solide de volume donné » pourrait vivre au collège. En prenant en compte la loi du tout structuré qui avance qu'« un objet mathématique ne peut pas exister seul ; il doit venir prendre place dans une organisation mathématique qu'il faut faire exister » (Rajoson, 1988 ; Artaud, 1998), on doit trouver une organisation mathématique adaptée à P'4. Par exemple, P'4 peut prendre place dans le domaine « Grandeurs et mesures » du programme. En effet, pour le type de problèmes « P'4 : construire un solide de mesure de volume donnée », il s'agit de « mettre en relation les variables d'une formule et les éléments du solide ». On peut utiliser la formule pour déterminer le volume du solide et identifier les éléments de l'objet qui interviennent dans cette formule. Ainsi, on donne des valeurs qui respectent la mesure du volume du solide et à partir de ces valeurs on construit le solide.

Dans l'exemple précédent, comme le volume est égal à 36 cm^3 et la formule du calcul du volume d'un parallélépipède est « L x l x h », on peut, par exemple, décomposer 36 comme 2 x 9 x 2, et construire un parallélépipède rectangle des longueurs de côtés 2 cm, 9 cm et 2 cm. Ces techniques peuvent être considérées comme assez complexes, et elles ne sont pas utilisées pour résoudre d'autres types de problèmes. Peut-être est-ce la raison pour laquelle P'4 est négligé dans les programmes ? Par contre, ces techniques exploitent les mêmes éléments mathématiques que le type de problèmes P'2 « calculer des volumes », par exemple la formule, les éléments constitutifs de l'objet et les nombres.

D'autres questions concernent le cognitif. Comme nous l'avons vu, environ 80% des élèves savent calculer le volume d'un parallélépipède rectangle, mais seulement 50% sont capables de construire un parallélépipède rectangle de volume donné ; alors pourquoi les élèves peuvent-ils, en général, utiliser les éléments constitutifs d'un objet pour calculer une grandeur avec la formule, mais ne peuvent pas faire le processus inverse de manière efficace ? On pourrait, peut-être, simplement dire que cette technique ne fait pas partie de l'enseignement des grandeurs au collège, et par conséquent elle n'appartient pas au bagage de connaissances des élèves. Nous pensons que le type de problème P'4 fait articuler les conceptions relatives au volume de façon beaucoup plus approfondie en mettant en relation les cadres géométrique, grandeurs et numérique, et il devrait donc occuper une place beaucoup plus importante dans l'enseignement.

7.2 La comparaison des volumes

Le tableau suivant résume les résultats obtenus pour la partie b) de la situation-problème :

Cadre	Type de réponse	Description des techniques	Théorèmes en acte et concepts en acte	Exemple de réponse	Total	%
Géométrique-Numérique	Il y a la même quantité de cubes	Les élèves justifient que les solides ont le même volume puisqu'ils sont composés de la même quantité de cubes.	-Si S et S' sont quasi-disjoints, V(S U S')=V(S) + V(S') - Comptage bidimensionnel ou tridimensionnel -Le volume est indépendant de la forme du solide	Le volume reste le même c'est juste la position ou la forme qui diffère.	12	39
Numérique	Calculer le volume avec la formule V=Lxlxh	Les élèves font la décomposition multiplicative du nombre 36. Ainsi, les élèves définissent les solides en fonction de leurs dimensions.	-Formule de calcul du volume d'un parallélépipède rectangle -Décomposition multiplicative d'un nombre ou diviseurs d'un nombre. -Un parallélépipède rectangle est complètement défini par ses dimensions -Le volume est invariant par isométrie.	Un élève donne la suivante réponse : 6x6x1=36 cm3 36x1x1=36 cm3 Leurs volumes sont les mêmes quelque soit le parallélépipède.	9	29

***Tableau 4**. Réponses obtenues pour la situation-problème partie b).*

Dans le problème b), les élèves peuvent observer que la comparaison des volumes est indépendante de la formule ou la mesure de ces volumes, comme dans la question 2 du questionnaire : ainsi ils peuvent conclure que les solides ont même volume puisqu'ils sont composés de la même quantité de cubes de volumes égaux (39 %).
Par contre, presque un tiers des élèves (29 %) comparent les volumes en calculant au moyen de la formule du volume. Ils savent que la quantité de cubes est la même pour tous les solides, mais leurs justifications sont faites en référence aux formules. D'une part, cela pourrait relever d'un contrat didactique qui établit qu'ils doivent justifier leurs réponses à l'aide de procédures mathématiquement « plus correctes », comme celles relevant du cadre algébrique. D'autre part, en regardant, les résultats relatifs à la situation problème et au questionnaire, il semblerait que dans une classe du collège, certains élèves préfèrent mobiliser leur conception du volume mesure et d'autres celle du volume nombre selon le contexte. Le premier groupe est capable d'adapter ses procédures à d'autres situations, comme le montre le taux élevé de réussite obtenu pour le type de problèmes « calculer le volume d'un solide » dans la question 1 du questionnaire. Cependant, le deuxième groupe reste dans une conception volume nombre dans la plupart de situations, comme l'ont révélé les résultats concernant la question 2 du questionnaire et la situation-problème.

Conclusion

L’élaboration d’une typologie des conceptions associées au volume nous a montré la complexité de cette notion. L’objet mathématique volume en tant que grandeur relève en mathématiques d’au moins deux cadres différenciés, le cadre géométrique et le cadre numérique.
Dans notre recherche, l’analyse des conceptions à propos du volume a fait ressortir la pluralité des points de vue qui existent autour du concept de volume. En effet, les déclarations verbales des élèves peuvent être associées à tous les types de conceptions des cadres géométrique et numérique décrits dans notre typologie. De plus les problèmes mathématiques nous ont aussi révélé des conceptions du type volume-occupé, volume-nombre, volume-mesure, volume-aire et volume-objet. Il semble que la plupart des élèves aient développé une conception volume-nombre qui ferait obstacle à la construction d'une conception volume mesure. De ce fait, certains élèves ne se servent pas de la propriété d'additivité de la mesure et ils ne réalisent pas correctement des comptages. En outre, une petite partie des élèves aurait élaboré des conceptions inappropriées pour la résolution de problèmes nécessitant la décomposition et recomposition des solides, comme, par exemple, une conception fermée de volume-occupé ou volume-objet. Ainsi, les analyses ont mis en évidence que de différents types de conceptions peuvent coexister dans des procédures de résolution de problèmes, et cette cohabitation peut représenter un appui ou un obstacle à l’apprentissage des élèves. Même si les procédures mises en jeu par les élèves peuvent se caractériser comme numériques dans certaines tâches, elles sont presque toujours constituées d’éléments du cadre géométrique. L'articulation entre ces conceptions doit être considérée comme une ressource importante d’enrichissement du concept de volume et des cadres mathématiques (Anwandter-Cuellar, 2009).

D'autre part, les résultats nous montrent que les connaissances-en-acte auxquels font appel les élèves dépendent de la situation et se présentent, chez certains élèves, isolées en restreignant leur validité à un seul type de problème. Par exemple, la multiplication des longueurs de côtés d'un parallélépipède rectangle associée à la formule de volume est bien utilisée dans des situations directes de calcul, mais des difficultés apparaissent quand il s'agit de dénombrer des unités, car le transfert de cette connaissance à un autre type de situation n'est pas réalisé par tous les élèves.

Nous pensons que les difficultés des élèves relatives au concept de volume se présentent dans le traitement géométrique de cette notion. En effet, elles apparaissent dans les problèmes qui nécessitent des conceptions et des stratégies géométriques relatives au volume ou des relations entre les cadres numérique et géométrique, comme l'a dévoilé l'analyse de notre situation-problème. Cela serait la conséquence d’un enseignement du volume centré sur l’application des formules et sur les changements d’unités (Anwandter-Cuellar, 2008 ; 2012). Compte tenu de cette numérisation et arithmétisation du volume (Barbin, 2007), nous considérons qu'un traitement géométrique de ce dernier pourrait aider les élèves à surmonter ces difficultés et, également, contribuerait à la construction des conceptions géométriques du volume pour ainsi établir des liens plus riches entre les situations et les cadres. Tel que l'ont signalé Ricco et al. (1983) : « Pour arithmétiser correctement le concept du volume, il faut à la fois des opérations géométriques bien coordonnées (de pavage par exemple) et les opérations arithmétiques associées, qui sont par nature multiplicatives ». Et cela, pour nous, n'est possible qu'au travers l'enseignement des problèmes et techniques variés mettant en jeu plusieurs cadres.

Références

ANWANDTER CUELLAR N. (2008) *Étude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume*. Mémoire Master 2 HPDS, Université Montpellier 2, France.

ANWANDTER CUELLAR (2009) Étude des conceptions d'élèves à propos du volume : spécificités des interrelations entre les cadres géométrique et numérique. In Margolinas et al. *Actes de la XVe École d'été en didactique des mathématiques*, Clermont Ferrand, 16-23 août 2009, CDrom.

ANWANDTER CUELLAR N. (2012) *Place et rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques numérique, fonctionnel et géométrique et de leurs interrelations dans l'enseignement au collège en France.* Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, France.

ARTAUD M. (1998) Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In *Actes de la IX école d'été de Didactique des mathématiques*, Houlgate, ARDM, 99-139.

ARTIGUE M. (1990) Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3, 241-286. La Pensée Sauvage.

BARBIN E. (2007) L'arithmétisation des grandeurs. *Repères IREM,* 68.

BOCTÉ C., JACOB N., SITBON A., VISSIO J. ET XOUAL I. (2006) *Math 5e collection Prisme, chapitre 14 : Prismes droits et cylindres de révolution.* Editorial Belin, 259-280.

BROUSSEAU G. ET BROUSSEAU N. (1991-1992) Le poids d'un récipient étude des problèmes de mesurage en CM. *Grand N*, 50, 65-87.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil – objet. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 7/2, 5-31. La pensée sauvage.

DOUADY R. ET PERRIN-GLORIAN M. J. (1989) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 387-424.

D.G.E.S.C.O. (2007) Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège. *Grandeurs et mesures au collège.* Document en ligne, consulté le 20-10-2013 :

http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/16/9/doc_acc_clg_grandeurs_109169.pdf

FOURTON J. L., HERBELOT A., LANOËLLE A. ET PERRINAUD J. C. (2005) *Dimathème, Classe de 6e, chapitre 13 : Espace*. Didier, 249-270.

JANVIER C. (1992) Le volume comme instrument de conceptualisation de l'espace. *Structural Topology*, 18, 63-76.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE. (2008) Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques.

MOREIRA-BALTAR P.(1994-1995) Etude des situations autour du concept d'aire de surface planes. *Didactique et technologies cognitives en mathématiques*, séminaire 171, 189-218.

PERRIN-GLORIAN M.J. (2002) Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires. In Dorier J.-L. et al., *Actes de la XIe École d'Été de Didactiques de Mathématiques.* Corps : La Pensée Sauvage, 299-315.

PIAGET, J. ; INHELDER, B. ET SZEMINSKA, A. (2e éd. 1973) *La géométrie spontanée de l'enfant.* Paris P.U.F.

POTARI, D. ET SPILIOTOPOULOU, V. (1996) Children's Approaches to the Concept of Volume. *Science Education*, 80 (3), 341-360.

RICCO G., VERGNAUD G. ET ROUCHIER A. (1983) Représentation du volume et arithmétisation-entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans. *Recherches en didactique des mathématiques*, 4/1. La Pensée Sauvage.

RAJOSON L. (1988) *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas.* Thèse de doctorat, Université d'Aix Marseille III.

SAÍZ-ROLDÁN M. (2003) *El Pensamiento del Maestro de Primaria acerca del Concepto Volumen y de su Enseñanza*. Tesis especialidad Matemática Educativa, Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, Departamento de Matemática Educativa.

TANGUAY D. (2010) Les formules de volume et le principe de Cavalieri. *Petit x*, **84**, 7-26.

VERGAUD G., ROUCHIER A., DESMOULIERES S., LANDRÉ C., MARTHE F., RICCO G., SAMURCAY R., ROGALSKI J. ET VIALA A. (1983) Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 à 13 ans). *Recherches en didactique des mathématiques*, 4/1. La Pensée Sauvage

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactiques des mathématiques*. Vol 10/2.3, La Pensée Sauvage.