Activité … *Des triplets pythagoriciens cachés dans des triangles*

Denise GRENIER
Institut Fourier et IREM de Grenoble

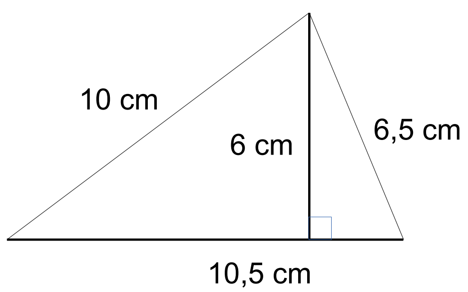
En géométrie du triangle, les mesures dont on a « naturellement » besoin diffèrent selon que l'on veut déterminer le périmètre ou l'aire d'un triangle donné. Ainsi, dans les formules proposées dès la fin du primaire, si la question est le calcul du périmètre, on donne les mesures des trois longueurs, et si la question est le calcul de l'aire, on donne celles d'une hauteur et d'une « base ». Cependant, au collège, peu de manuels précisent que, si la donnée des mesures des trois côtés définit **un seul** triangle à une isométrie près, celle des mesures d'une base et d'une hauteur correspondent à un **ensemble infini** de triangles. De fait, très peu d'exercices proposés aux élèves « mélangent » les deux questions : calcul du périmètre et de l'aire d'un triangle donné. De plus, au lycée, la formule de Héron est peu travaillée, or le calcul de l'aire d'un triangle (unique) à partir de la donnée des mesures de ses trois côtés est pourtant une bonne occasion de travailler la trigonométrie (mais ce n'est pas notre sujet ici).

Quel rapport avec les triplets pythagoriciens ?

Tout d'abord, un rappel. Un **triplet pythagoricien** est un triplet d'entiers naturels non nuls $(x; y; z)$ vérifiant la relation de Pythagore : $x^2 + y^2 = z^2$. Il en existe une infinité, le plus connu étant probablement le triplet (3;4;5). En géométrie, ces trois nombres représentent les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

En feuilletant des manuels sur ce sujet, j'ai trouvé des exercices où on donnait à la fois les longueurs des trois côtés d'un triangle et la longueur d'une hauteur. **Il y avait donc une donnée « redondante ».** Et tous ces nombres étaient pourtant des entiers ou des décimaux simples ! Il s'agissait, selon les cas, soit de valeurs très particulières, soit de valeurs approximatives. En voici un exemple (manuel de 6ème, 2009).

Calculer l'aire de ce triangle.



Les valeurs sont exactes, on peut le vérifier en utilisant le théorème de Pythagore.
En fait, c'est parce que les quatre nombres cachent les triplets pythagoriciens (3;4;5) et (5;12;13).

Vérifiez et trouvez-les !

Voici un autre exercice (toujours dans le manuel de Sixième), où on demandait de calculer l'aire de ABC de deux manières différentes. **Les longueurs données sont-elles toutes exactes ? Si oui, quels triplets de Pythagore sont cachés dans les mesures proposées ?**