ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ À L'ENTRÉE AU COLLÈGE : QUELQUES REPÈRES POUR PENSER L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES[1]

Isabelle BLOCH
Université Bordeaux IV

Résumé. A l'entrée au collège, on constate que certains élèves n'ont pas acquis les savoirs de base enseignés au Cycle 3 de l'école élémentaire : il leur est donc très difficile de poursuivre l'apprentissage des mathématiques dans la logique un peu plus formelle de l'enseignement secondaire. L'institution a tendance à laisser de côté ces élèves, ou à les écarter du cursus 'normal' pour les envoyer en SEGPA[2] ; or, que ce soit en classe 'ordinaire' ou spécialisée, des phénomènes de malentendu relatifs au contrat didactique peuvent empêcher ces élèves comme le professeur de sortir de cette logique d'échec, notamment dans les activités de résolution de problèmes. Après avoir analysé le rapport de ces élèves aux situations, nous présentons une progression de situations sur la numération et la multiplication, puis une situation sur la distance d'un point à une droite.

Mots-clés. Élèves en difficulté, contrat didactique, situations, multiplication, distance d'un point à une droite.

Abstract. When they enter the secondary school, some students do not master the previous knowledge taught at Primary school, so they encounter great difficulties with the more formal logic of Secondary school. The institution tends to disregard these students, or to send them to 'specialized' classes. Anyhow, in 'normal' classes or in specialized ones we could observe didactical contract phenomenons that prevent as well the students as the teacher from being able to escape out of this failure logic. For instance, difficulties within solving problems or calculation enlighten the way students understand mathematical activities. So we first analyze students' interpretation of the mathematical work, and then present two situations: the multiplication, and the distance of a point to a straight line.

Key-words. Students with difficulties, didactical contract, situations, multiplication, distance of a point to a line.

Introduction

Le collège se trouve actuellement intégrer une proportion non négligeable d'élèves n'ayant pas les acquis supposés de fin de primaire. Les études situent en général autour de 20 % ce quota des élèves qui vont se trouver en difficulté pour poursuivre les apprentissages, et notamment pour négocier le virage des mathématiques du primaire – plus pragmatiques, moins basées sur des présupposés théoriques et des énoncés établis – à celles du secondaire. Ce pourcentage est d'autant plus inquiétant que, selon certaines études internationales, il n'a cessé d'augmenter depuis quinze ans. Le but de cet article est de proposer des outils pour, d'abord comprendre les difficultés auxquelles se heurtent ces élèves – et leurs professeurs ; ensuite, il s'agit de penser de façon aussi ergonomique que possible, et par suite gérable pour l'enseignant, la reprise de savoirs fondamentaux sans lesquels ces élèves ne peuvent plus avancer en mathématiques. Le paradoxe auquel se trouvent confrontés les professeurs est qu'il est impossible – et qu'il serait improductif, de

1 Ce texte est la reprise, modifiée, d'une intervention au colloque COPIRELEM de Bombannes en 2008. Je remercie tout particulièrement Jacinthe Giroux pour ses conseils lors de l'écriture de la nouvelle version.

2 Section d'enseignement général et professionnel adapté.

toutes manières – de reprendre les apprentissages mathématiques depuis leur début, et que cependant, ces élèves ne pourront progresser que s'ils 'récupèrent' ces savoirs.

Lors de cette recherche nous avons conduit des observations dans des classes spécialisées (SEGPA), mais aussi des classes de collège RAR. Nous donnons d'abord un descriptif des phénomènes de contrat rencontrés avec ces élèves ; puis nous montrons, sur deux exemples, comment cette analyse nous permet de mettre en place des situations sur la table de multiplication et sur la géométrie (niveau $5^{ème}$- $4^{ème}$, soit des élèves de 12 à 15 ans) et d'attester des effets sur l'apprentissage des élèves. Nous concluons sur les situations à faire vivre aux élèves diagnostiqués "en difficulté" en mathématiques à l'entrée au collège, et sur les adaptations possibles.

1. Les domaines de savoirs et le contrat didactique

Des particularités des élèves en difficulté sont relevées par tous les auteurs, relativement au contrat didactique et aux savoirs antérieurs. Nous essayons d'en donner ici une première description.

1.1 La numération et le s opérations

De plus en plus souvent, des élèves entrent en Sixième sans avoir maîtrisé les savoirs calculatoires de base, comme la multiplication, ni même vraiment la numération décimale. Ainsi certains élèves ont beaucoup de mal avec la multiplication par dix, cent ou mille ; certains pensent que "un zéro, c'est une dizaine" : du coup, que signifient *deux* zéros, dans 500 par exemple ? Deux dizaines ? Tempier (2010) a bien mis en évidence que l'écriture des nombres n'était "décodable", par beaucoup d'élèves, que dans l'ordre canonique (milliers, centaines, dizaines, unités) et que toute demande d'écriture d'un nombre du type, douze dizaines, trente centaines, vingt-huit unités... par exemple, n'était pas correctement interprétée. Ce phénomène montre à l'évidence, dit Tempier, que l'écriture des nombres n'est lisible que dans une logique de *position* et non de *quantités.* Chambris (2012) fait aussi le constat de l'insuffisance de la maîtrise de la numération chez beaucoup d'élèves de Sixième, et montre, dans l'article en référence, comment on peut consolider les savoirs sur la numération – notamment celle des entiers – en exploitant les relations entre système métrique et numération, et comment par là même on peut conforter la maîtrise des grandeurs, lesquelles, il faut le noter, ont repris récemment une place significative dans les programmes de collège.

On constate du même coup que le sens des opérations arithmétiques élémentaires est généralement défaillant chez les élèves les plus en difficulté ; les obstacles affectent tout particulièrement la multiplication, ce qui par suite induit une incapacité massive pour la résolution de nombreux problèmes, notamment de proportionnalité et de division. Il va de soi d'ailleurs que la pratique des opérations renforce également les connaissances relatives à la numération... lorsque cela ne fonctionne pas, on est donc bien dans un cercle vicieux entre ces deux types de connaissances.

1.2 L'espace et la géométrie

Il se produit au collège un important saut conceptuel en géométrie ; ce saut a été signalé par de nombreux auteurs, y compris pour les élèves "ordinaires" (Coulange, 2012 ; Cyr, 2012 ; Gobert, 2011 ; Perrin-Glorian et al. 2006 ; Tanguay et Geeraerts, 2012) et il concerne les tracés géométriques, l'usage des instruments, le statut des assertions et énoncés et le raisonnement ; nous n'y reviendrons pas en détail et renvoyons le lecteur aux articles cités. Nous présentons en dernière partie de l'article une situation de géométrie (expérimentée en classe de Quatrième) qui a pour but de faire le lien entre les savoirs pragmatiques – se servir des instruments, reconnaître ce qu'ils mesurent, et les énoncés que leur usage conforte – et les savoirs théoriques : les théorèmes de géométrie.

1.3 La compréhension des signes mathématiques

Dans les observations faites en classe, nous avons aussi été frappée par l'usage apparemment très figé des signes par ces élèves : il semblait qu'il leur était impossible de changer d'interprétation en fonction du contexte et du savoir en jeu. Ceci nous a amenée à chercher des situations dans lesquelles le sens des symboles mathématiques pouvait évoluer, afin d'ouvrir les élèves à l'idée que le sens d'un signe, en mathématiques, n'est pas définitif et dépend du problème ou du contexte.

Une question qui guide notre recherche est donc aussi celle de l'utilisation des signes par les élèves en échec, et de la co-construction de signes et de connaissances. Une question contiguë est la suivante : à quoi reconnaît-on que les élèves produisent et utilisent les signes dans leur sens mathématique ? C'est cette interrogation qui nous avait conduits à proposer, dans Bloch & Gibel (2011), un modèle des interactions et des raisonnements en classe. Signalons seulement que ce modèle (structuration du milieu et étude des signes produits) est d'une grande utilité diagnostique dans le pilotage des situations.

1.4 Le rapport au savoir

Par ailleurs, les élèves n'ayant pas acquis les savoirs de base de l'école primaire ont un rapport au savoir qui a été décrit dans de nombreux travaux (Bautier et Rayou, 2009 ; Bonnéry, 2010 ; Coulange, 2012) et dont les caractéristiques sont peu compatibles avec une avancée 'normale' du temps didactique ; ceci entraîne des réactions et des choix didactiques de la part des professeurs. Or ces choix, bien que motivés par le souci de faire "rattraper le retard", ne font souvent qu'accentuer les obstacles auxquels se heurtent les élèves, en particulier l'impossibilité qu'ils éprouvent à se saisir du sens de l'activité mathématique. Ainsi Bonnéry (ibidem) signale comment les élèves se trouvent assignés sans espoir de sortie à la difficulté scolaire, notamment à cause des pratiques différentes des professeurs de primaire et du secondaire.

Dans ces conditions les professeurs font ainsi fréquemment l'hypothèse de la non acquisition de connaissances antérieures : de fait, nos observations nous apprennent que les élèves en échec en mathématiques, soit sont réticents à montrer leur savoir, soit ne savent pas eux-mêmes qu'ils savent. Il en résulte que le professeur se trouve dans une position difficile : ne pouvant baser son enseignement sur ce qu'il sait ou devine des connaissances de ses élèves, il a souvent tendance à tabler sur le minimum, voire sur "rien du tout". Il devient du même coup très problématique de cibler un moment de reprise adapté relativement à un savoir donné. Ainsi que le dit Vannier :

> « ...le professeur se heurte le plus souvent à une grande instabilité des connaissances chez les élèves scolairement fragilisés, instabilité qui rend leur mobilisation en situation délicate voire aléatoire. C'est donc en partie pour pallier cette difficulté à mobiliser les pré-requis nécessaires à l'entrée en activité des élèves, en situation de résolution de problèmes, que les professeurs ont tendance à déclarer le savoir attendu, modifiant le contrat didactique jusqu'à le rendre improductif du point de vue des apprentissages. Il s'agit alors de maintenir une relation didactique préservant les faces des uns et des autres: le professeur obtient des élèves un semblant d'activité en échange d'une garantie de la réussite à moindre coût cognitif. » (Vannier, 2010, p.317)

Les travaux de Bonnéry montrent aussi comment la question de l'institutionnalisation est fondamentale, à travers la dialectique contextualisation/ décontextualisation : or cette dialectique est ce qui joue dans les moments de reprise ou d'institutionnalisation des savoirs même anciens.

Par ailleurs, le point de vue affectif est aussi fortement en jeu : les élèves se trouvant dans cette situation se sentent méprisés par les professeurs et l'institution, ce qui ne contribue pas à renforcer leur estime de soi en général très défaillante (cf. Vannier, ibidem ; Bonnéry, ibidem).

1.5 Les phénomènes de contrat didactique

Dans de telles circonstances, les conditions et contraintes de l'enseignement engendrent de nombreux phénomènes de contrat. Les auteurs s'accordent sur de nombreuses "dérives" de la relation didactique avec les élèves en difficulté, dérives rendant notamment problématique l'organisation de situations de recherche de type a-didactique. Une question récurrente en recherche est celle du milieu à construire pour que les élèves en échec acceptent la dévolution d'un problème. De fait, lorsque des situations de type adidactique sont expérimentées, elles sont jugées parfois à l'aune des savoirs et la conclusion est souvent que ces situations sont trop complexes pour ces élèves, ou contribuent à les déstabiliser davantage. Vannier (2010) parle ainsi de la tension entre enrôlement[3] des élèves dans l'activité et dévolution : les efforts faits pour obtenir l'enrôlement ne sont pas toujours productifs en termes de dévolution, ce qui fait que seule une minorité d'élèves accède au sens mathématique de l'activité proposée.

Parfois, le reproche leur est aussi fait de n'avoir pas débouché sur un savoir suffisamment conforme : en collège, notamment, les professeurs – et les élèves ! - ont une attente forte de savoirs déjà formalisés (multiplications et divisions bien posées, etc...).

Ces situations adidactiques peuvent aussi être difficiles à gérer, du fait de la place laissée aux formulations des élèves : ainsi Hersant et Vannier(2007) montrent comment deux professeures différentes gèrent de façon non identique une situation de "problème pour chercher" dans deux classes.

Nous constatons aussi que la pression institutionnelle sur ces élèves dans les classes est (trop) forte : il peut y avoir, chez les professeurs, comme une urgence à rattraper les apprentissages non réalisés. Il en résulte que les moyens donnés aux élèves sont souvent d'emblée les procédures calculatoires expertes, et leur production phénoménologique[4] dans la situation n'est pas toujours étudiée pour elle-même, ni, a fortiori, valorisée, même lorsqu'elle témoigne de connaissances (éventuellement fragmentaires ou non organisées). Le professeur est alors dans un paradoxe dont il est difficile de sortir : amener des élèves que l'on soupçonne de ne (presque) rien savoir à des savoirs constitués, du premier coup. Il est clair que cela ne peut fonctionner et provoque des dérapages dans le contrat didactique. Nous avons déjà mentionné ces décalages, en SEGPA et en collège RAR[5], dans Bloch (2007 et 2011).

2. Contrats et situations : un pas de côté vers l'ASH[6]

Si l'on veut pouvoir identifier et classer les difficultés que rencontrent élèves et professeurs pour faire ensemble des mathématiques, il est nécessaire de décrire d'abord ces difficultés de la façon la plus exhaustive possible, puis de répertorier les phénomènes de contrat

3 Au sens de Bruner.

4 On désigne ainsi la production de signes (langagiers, sous forme de formules, de dessins, de gestes...) relatifs au problème mathématique en jeu : cf. Marty, 1999.

5 RAR : Réseau Ambition Réussite.

6 Adaptation aux Situations de Handicap, ce qui inclut les handicaps cognitifs, et les retards dans la scolarité...

observés – et déjà signalés par de nombreux chercheurs, que ce soit en RAR (ex ZEP) ou en classe spécialisée. Ces phénomènes sont certes exacerbés en ASH, mais nous les retrouvons en classe "normale" chez les élèves les plus en difficulté, d'où l'importance de les analyser.

2.1 Les paramètres de l'enseignement en ASH

Dans le contexte de l'enseignement spécialisé, le professeur doit faire face au manque fréquent d'initiative du groupe-classe, à des élèves qui ont du mal à dire ce qu'ils savent, ou à comprendre les attentes de savoir. En SEGPA, on peut voir, à côté d'élèves en retard d'apprentissage, des élèves peu tolérants aux contraintes de la classe, et pour lesquels, parfois, apprendre c'est faire – une fois ! - une technique. Face à ces manifestations, les réponses spontanées du professeur peuvent être un ralentissement du temps de l'apprentissage, un accent mis sur les techniques, des reprises non contrôlées, une individualisation exagérée, des aides excessives ou absentes (cf. Bloch & Salin, 2004 ; Bloch, 2007).

Il ne s'agit pas de reporter la responsabilité des dysfonctionnements didactiques sur les enseignants[7], mais de constater que dans l'ASH, le professeur est dans un pilotage contraint par l'extrême difficulté qu'il y a à manifester (côté élèves) et à constater (côté professeur) des connaissances ; et que cette trop grande incertitude ne lui permet pas toujours de prendre les décisions qui s'avéreront déboucher sur des apprentissages manifestes. Le titre de l'article de Vannier (2010) est éclairant : effectivement le professeur doit *s'ajuster* aux besoins supposés des élèves, ceci parfois au détriment de ses objectifs didactiques ...

2.2 Les trois échecs de l'ASH selon J.M. Favre et les phénomènes de contrat

J.M. Favre (Favre 2004) repère dans l'ASH trois échecs qui pèsent lourdement sur les apprentissages possibles :

- l'échec antérieur : l'élève est là parce qu'il a précédemment échoué, ou ne peut suivre dans une classe "ordinaire" ; or il le sait, et il demande à "s'en sortir" ;
- l'échec actuel, qui n'est pas toujours avéré, mais parfois le professeur 'triche' : simplification des variables didactiques, reprises, effets Topaze…
- enfin l'échec anticipé, qui rend très difficile pour le professeur l'organisation des apprentissages : ce dernier ne peut que difficilement prévoir le comportement des élèves face à un problème, de plus, un fort effet Pygmalion empêche parfois le professeur de prédire correctement la réussite des élèves.

Ces échecs entraînent des phénomènes de contrat qui concernent les élèves comme les professeurs. Le problème est que, contrairement à ce qui se passe dans les classes standard où la dynamique du contrat fait que les élèves vont pouvoir fonctionner *avec* leur ignorance (provisoire), et donc au final pourront apprendre, dans le contexte de la difficulté scolaire les phénomènes de contrat semblent tous aller dans le sens d'une non-reprise des apprentissages.

a) Du côté des élèves

Certains tentent de deviner les attentes du professeur et s'investissent de façon minimale dans le questionnement mathématique. Du fait de leur échec connu, ils sont dans une urgence de réussite qui les met en demande d'algorithmes, et ceci bien qu'ils les maîtrisent mal.

7 Ou sur les parents...

Une situation de type a-didactique se heurte, comme nous l'avons déjà signalé, à :

- des problèmes de dévolution ;
- des difficultés dans la compréhension et le respect de la consigne ;
- une non maîtrise du calcul, des validations approximatives ;
- des difficultés de verbalisation et d'écriture.

Les phases d'action ont tendance à être prises pour le but du dispositif, ce qui conduit à des phénomènes d'enlisement. Les élèves peuvent alors refuser de passer à un savoir décontextualisé, mais aussi de revenir à un autre contexte.

b) Du côté du professeur

Le professeur se heurte, quant à lui, à une forte part d'inconnu sur les connaissances des élèves. Ses réactions peuvent alors être une attente de l'échec, mais aussi une trop grande incertitude sur les aides possibles. On observe aussi des demandes excessives de justification des connaissances : généralement, quand un élève répond correctement, on lui attribue bien les connaissances correspondantes, mais un élève en difficulté se voit parfois demander de justifier des connaissances de base de première année primaire, alors même que sa réponse était correcte[8]. Cette réaction du professeur a pour effet de déstabiliser encore davantage un élève peu sûr de lui. On voit ainsi parfois des élèves convaincus d'avoir répondu de façon inexacte et qui, du coup, bafouillent, ne reprennent pas leur première (bonne!) réponse, ce qui ancre le professeur dans la conviction de leur ignorance – puisque l'élève n'est pas capable de reprendre sa réponse en la justifiant, c'est donc qu'il avait répondu au hasard... ou bien son voisin la lui avait soufflée...

Ceci s'accompagne de diminution des exigences ou de simplification des variables didactiques ; de la reprise *ad nauseam* des savoirs antérieurs ; de différenciation et d'absence de synthèse (cf. Peltier, 2004 ; Perrin-Glorian, 1993 ; Butlen, Masselot & Pézard, 2009). Le résultat en est ce que Conne (1999) appelle la *reconduction dans l'ignorance* et la stagnation du temps didactique.

Ces effets jouent de façon négative sur la réussite des élèves et sur les possibilités de gestion du professeur, et l'on observe parfois un retour aux sacro-saintes fiches, supposées porteuses de différenciation et "d'avancée de chacun à son rythme" ! Ces fiches, en fait, signent surtout l'enlisement dans l'échec.

2.3 Le retour à des situations de référence

Dans le texte déjà cité (Bloch et Salin, 2004) nous avions signalé que, pour éviter les phénomènes de rejet de situations vues comme reproduisant trop l'école primaire, les situations proposées devaient mener les élèves à manifester leurs connaissances … "à l'insu de leur plein gré"[9], c'est-à-dire qu'il s'agit de *situations surprises* comme les a qualifiées Conne (1999). Par ailleurs un certain nombre d'impératifs spécifiques à ces élèves doit être respecté. Il faut ainsi prévoir des postures d'étayage : aider les élèves durant la recherche et ne pas tout évaluer. Le professeur pourra prévoir des effets Topaze (délibérés…) puis des relances, car ces élèves sont parfois inhibés par leur échec antérieur et ne s'engagent pas dans une nouvelle situation. Et il faut leur faire confiance : un élève qui ne sait rien... nous n'en n'avons jamais rencontré...

Il est primordial de ne pas sacrifier les mises en commun et les synthèses : ces élèves sont particulièrement sensibles aux régularités mathématiques à partir desquelles peut se structurer le savoir. Malgré les difficultés relationnelles rencontrées dans ce contexte, il

8 Cet effet est signalé dans de nombreuses observations...
9 Comme le disait le cycliste Richard Virenque aux Guignols de l'info...

faut avoir le souci de ne pas sacrifier la dimension collective de l'apprentissage dans le groupe classe. Ce point a aussi été largement signalé dans Peltier-Barbier (2004), Butlen, Masselot & Pézard (2009).

Enfin il faut être conscient de la nécessité absolue, si l'on veut que les élèves apprennent, de faire avancer le temps didactique.

2.4 Comment gérer les contrats de reprise ?

Le professeur doit mettre en place des dispositifs spécifiques : le problème est de se demander jusqu'où ? Prendre la question à la base, c'est réfléchir à d'autres façons de construire les situations … et de les articuler, comme des situations surprise, dont nous donnons un exemple plus loin (cf. aussi les actes du colloque DDMES, 2011).

Par ailleurs il ne s'agit pas de tout reprendre : l'organisation des situations et des signes doit permettre de reconstruire une *histoire fictive* du savoir, qui pourra *in fine* se relier aux connaissances antérieures des élèves et leur permettre enfin de devenir opérationnelles.

Ainsi que le dit Vannier :

> Le professeur se doit de transformer en quelque sorte des connaissances hétérogènes et instables en un savoir qui fait institution en amont de la dévolution d'un problème à résoudre, savoir stabilisé dont vont être crédités à la fois tous les élèves de la classe - avec pour bénéfice la réduction artificielle de l'hétérogénéité - et chaque élève individuellement - avec pour bénéfice l'assurance de sa propre compétence à réussir la tâche prescrite. (Vannier, ibidem, p. 317)

Vannier propose ainsi de créer une *base d'orientation*, c'est-à-dire une mémoire collective des savoirs antérieurs ; ainsi que certains le disent, il s'agit de produire des 'cartes mentales' sur ces savoirs. Comment alors s'assurer, au vu des productions des élèves, que l'histoire fictive est consistante relativement au savoir ? C'est l'analyse de l'usage que font les élèves des signes mathématiques, et de l'évolution de cet usage, qui permettra de l'affirmer.

3. Signes et situations, quelle spécificité des élèves en difficulté ?

L'usage des signes mathématiques par les élèves en difficulté a été reconnu comme problématique (ainsi que le dit Giroux : *atypique*) et des chercheurs ont tenté de l'analyser (Bloch, 2007 ; Giroux, 2008). Ainsi les élèves connaissent quelques algorithmes mais ne maîtrisent pas leur sens ; ils sont, presque en permanence, dans le malentendu didactique et la répétition de comportements qu'ils supposent être attendus par le professeur, ce qui peut faire fortement douter de l'attribution de sens mathématique aux signes utilisés.

Par ailleurs les situations comportent une forte dimension d'expérience : or celle-ci renvoie à du sémantique qui ne peut s'exprimer que par des manifestations de type sémiotique ; le processus par lequel un individu accède à des représentations d'un savoir, modifie et affine ces représentations, et enfin intègre les ostensifs du savoir 'savant', ce processus s'appelle une *sémiose*. Donc, le travail phénoménologique dans les situations ne peut être analysé que si l'on se donne des outils d'analyse des sémioses *effectives* : il s'agit de renverser la problématique des savoirs seuls, laquelle conduit à décréter une non-conformité des productions des élèves en difficulté, au profit d'une étude pragmatique de ce qui a été produit.

Cette étude intégrera aussi l'évolution du *répertoire mathématique* des élèves, en cours de recherche dans la situation et en fin d'apprentissage, c'est-à-dire des formulations des savoirs qu'ils maîtrisent ou sont capables de mettre en jeu dans la situation – y compris bien sûr les formulations provisoires, approximatives, ou non conformes (cf. Bloch et Gibel, 2011). On peut d'ailleurs remarquer que ces formulations apparaissent y compris chez des élèves d'un bon niveau mathématique, en Première ou Terminale scientifique par exemple[10].

Lorsque qu'une symbolisation est incomprise, il s'agira donc analyser la sémiose effectuée, et de mesurer, éventuellement, la distance avec le sens mathématique expert. Cette perspective nous conduit à poser la question suivante :

Y a-t-il en ASH, ou chez des élèves en difficulté, des phénomènes spécifiques relativement aux sémioses ? Et, de façon générale, comment se fait l'apprentissage des mathématiques relativement à la production de signes ?

3.1 La dimension sémiotique des interactions mathématiques en classe

Dans une classe, lorsque le professeur propose une situation de recherche pour le travail des élèves, le problème conduit les élèves à élaborer de nombreux signes, c'est ce qu'on appelle *l'entropie phénoménologique*. Les interactions des élèves peuvent être exploitées dans la logique des signes produits et utilisés et de leur relation avec le savoir : c'est ce qui est généralement pratiqué dans les situations de recherche, ou les situations adidactiques. Le professeur devra alors s'appuyer sur les productions orales et écrites des élèves ; dans un bilan, puis une institutionnalisation, il (elle) va progressivement diriger cette abondance de signes vers les signes mathématiques usuels : l'entropie phénoménologique va être refermée sur le savoir, afin que la classe puisse se mettre en conformité avec les désignations usuelles mathématiques visées dans l'institutionnalisation. Les interprétations non-conformes aux canons mathématiques peuvent être soumises à confrontation avec une situation qui permet de restaurer un sens mathématique : la compréhension ne précède pas la reconnaissance, elles opèrent dans une dialectique, et c'est l'interprétant 'final' de la situation qui constitue le sens retenu par l'élève (Bloch & Gibel, 2011).

Ce processus peut-il se produire avec des élèves en difficulté et comment ? A partir des situations qui leur sont proposées, comment ces élèves avancent-ils dans le processus interprétatif ? Cette avancée permet-elle une construction des connaissances qui autorisera le professeur à institutionnaliser du savoir ? Dans les classes ordinaires l'usage des signes mathématiques contribue à l'avancée du temps didactique. Dans toutes les classes, on observe cependant des avatars interprétatifs qui font partie du processus d'enseignement.

Parmi les productions autonomes des élèves, certaines manifestations sont privilégiées – celles qui correspondent aux attentes du professeur – et les autres seront ignorées ou rejetées. A partir d'un certain niveau, les processus écrits conformes aux normes sont privilégiés et les écritures incorrectes mal tolérées. Ainsi nous avons entendu une professeure répéter à plusieurs reprises dans une classe (ordinaire) de Quatrième : "On n'écrit pas quand c'est faux !" (sic)

Les schémas personnels et les procédures privées incorporent souvent des significations plus anciennes qui s'avèrent parfois source de difficultés, par exemple $17{,}3 \times 10 = 17{,}30$: c'est un phénomène bien connu (y compris dans les classes ordinaires!) qui peut être à la source d'obstacles. Les signes inversés sont toujours plus difficiles à interpréter que les signes directs, par exemple le fait qu'une division par 10 soit vue comme l'inverse d'une multiplication par 10 ; ou, $5 + 7 = 12$ mais surtout $12 = 5 + 7$; ou encore, au Secondaire, la relation $(a/b)/c = a/(bc)$ est difficile à percevoir par les élèves, mais encore plus dans l'autre sens (cf. aussi Bloch 2005, sur les situations retournées).

Les observations dont nous disposons nous montrent que l'usage des signes mathématiques par les élèves en difficulté est souvent plus problématique encore que ne l'est l'usage habituel dans l'enseignement.

10 Mais bien sûr elles y sont mieux considérées !

3.2 L'interprétation en classe spécialisée

Effectivement, avec ces élèves et notamment en classe spécialisée ou RAR, les écarts d'interprétation sont permanents :

- Écarts du côté du professeur, par des effets Topaze (instructions directes du professeur remplaçant une action prévue de l'élève : "Ecris que $4,3 \times 10 = 43$") ou Jourdain (reconnaissance factice d'un savoir chez l'élève : « Bravo ! mets une virgule là, tu as bien calculé 43 :10 »). Le professeur peut d'ailleurs être conscient de ces effets, et les réaliser sciemment pour ne pas décourager les élèves, ou comme relance ; cela peut s'apparenter alors à de l'étayage. Ces phénomènes font partie du contrat didactique de ces classes, contrat sur lequel nous reviendrons dans la conclusion (cf. Favre, 2004).
- Distorsions du côté des élèves : les signes ne sont pris que comme de simples indices d'un savoir mathématique… c'est le cas, par exemple, dans des déclarations comme : « La proportionnalité c'est quand on multiplie ou on divise » : il y a affaiblissement de l'interprétation, et non prise en compte du but de ce que serait l'interprétation mathématique.

Dans notre cadre d'interprétation (Bloch & Gibel, 2011) nous appelons *symbole-argument* un signe porteur d'une règle : ainsi un tableau de proportionnalité fournit la loi de proportionnalité, c'est-à-dire la fonction linéaire correspondante. Si l'élève ne le voit que comme un indice de proportionnalité, c'est-à-dire une relation non spécifiée entre des nombres, il sera incapable de tirer de ce tableau les informations pertinentes si on lui demande la fonction linéaire ou sa réciproque ; et s'il ne le voit que comme une icône[11] indiquant que, chaque fois que le professeur parle de la proportionnalité, il y a ce tableau, il ne pourra rien en *faire*.

De plus, avec les élèves en difficulté, lorsque le professeur a tenté l'introduction d'une notion par une situation de recherche, ou même par un exercice, on constate que le premier mode d'introduction des signes a tendance à être ensuite figé (« gelé' ») par les élèves : l'usage ultérieur des signes est très fortement lié aux usages dans le premier milieu rencontré, autrement dit, il y a arrêt du processus interprétatif, à peine a-t-il commencé. Ceci est cohérent avec la demande perpétuelle de changement qu'on observe venant des plus âgés des élèves de SEGPA par exemple : si un objet n'a aucune profondeur, si un seul emblème suffit à en épuiser la représentation et le sens, il faut en changer très vite … Or le sens d'un objet – tout particulièrement en mathématiques – vient de la continuation du processus interprétatif : le sens est toujours *à venir*, dans les relations qui pourront être faites avec d'autres objets.

Ceci retourne la question au didactique : quels signes dans quelles situations pour un savoir donné ? Quels phénomènes d'interprétation dans ces situations ? Comment atteindre ensuite le savoir ? Assurément, l'analyse seule en termes de signes ne détermine pas la situation qui devra être organisée pour déboucher sur des connaissances et des savoirs mathématiques et donc, sur des signes mathématiques idoines, mais le fait d'avoir analysé les interprétants finaux souhaités aide à construire une situation, et à mener son analyse a priori. Cette analyse permet aussi d'interpréter les actions des élèves dans le sens de leur prise en compte, ou non, des arguments incorporés dans la situation. Elle est donc un outil précieux qui permet de témoigner de leurs apprentissages effectifs ; pour le professeur en zone sensible, qui pilote la classe en état quasi permanent d'incertitude quant aux apprentissages, elle fournit donc un point d'appui, et des évidences constatables quant au succès de sa démarche d'enseignement.

11 Au sens de Peirce, c'est-à-dire une espèce d'image, cf Bloch & Gibel 2011, Marty 1999.

4. Une situation sur la numération et la multiplication en $5^{ème}$

Dans une classe de $5^{ème}$ SEGPA nous avons observé les phénomènes décrits ci-dessus – notamment les importantes difficultés calculatoires des élèves – et décidé de construire une progression sur la numération et la multiplication. L'algorithme de la multiplication est réputé difficile à acquérir pour de nombreux élèves, du primaire au collège, et les défaillances de procédures multiplicatives ne sont pas constatées que dans les classes spécialisées.

4.1 Construction d'une progression

Les élèves ont commencé l'apprentissage de la multiplication et des tables en CE1-CE2 ($2^{ème}$ et $3^{ème}$ primaire) mais, en collège, ils sont toujours, pour la plupart, incapables de mémoriser les tables, même les plus simples pour certains, qui saisissent leur calculatrice pour effectuer 3×4. Ainsi une observation sur les produits fait apparaître que, pour les élèves de la classe expérimentale ($5^{ème}$ collège, 13 ans), certains interprétants ne sont pas accessibles lorsque débute le travail sur la multiplication :

- 24 = 2 dizaines + 4 unités est bien accessible comme un *symbole* qui va fonctionner comme un *argument* dans la numération décimale, les élèves ayant une certaine maîtrise de celle-ci ;
- 8×3 est *l'indice* d'un produit mais pas plus, car les élèves sont incapables de relier cette écriture à un nombre écrit en écriture décimale ;
- 24 n'est pas même accessible comme *l'icône* d'un produit : les élèves ne peuvent pas le voir comme étant le signe d'un produit car le signe 'multiplié' est absent. Ceci illustre bien que les signes-lois implicites cachés dans les écritures mathématiques ne sont pas visibles de façon évidente, et donc pas décodables par certains élèves (cf. Giroux, 2008).

Par ailleurs le signe '0' (zéro) est difficile à interpréter : les élèves l'ont d'abord rencontré comme un signe de dizaine, et le phénomène de 'gel' des significations, signalé plus haut, joue d'autant plus avec le zéro que c'est un signe hautement polysémique : si *un* zéro est au départ le signe d'une dizaine, *deux* zéros ne sont pas le signe de deux dizaines… et même *un* zéro n'est dans aucun cas le signe d'une dizaine dans 20 056 208 par exemple. Le contrat didactique relatif à ce signe est donc problématique.

La suite de situations que nous cherchons à faire jouer dans la classe a donc précisément pour but de rendre disponibles aux élèves des signes-arguments qu'ils n'ont pas réussi à interpréter jusque là. On pourrait penser que les tables de multiplication, et plus largement l'algorithme, ne sont pas des objectifs raisonnables surtout pour des élèves en difficulté, et que les calculatrices peuvent aisément suppléer aux techniques manquantes. La table de multiplication est cependant un objet mathématique intéressant de par son utilité en calcul mental et sa signification sociale – utilité dans les problèmes de monnaie par exemple. De plus, l'objectif est de permettre aux élèves de mieux comprendre les nombres et les différentes façons de les écrire ; et au delà, ce que sont ces objets mathématiques et comment il est possible d'opérer avec eux.

Nous avons choisi la situation des carnets de tickets de cantine pour reprendre la numération ; la multiplication sera travaillée d'abord avec la situation du jeu de Pythagore (Bonnet, 1997), puis le dénombrement des rectangles (Briand et Chevallier, 1995).

Première étape : numération ; multiplication et division par 10 ; nombre de dizaines, chiffre des dizaines

Première situation

Une école commande 3140 tickets pour les repas de ses élèves : combien de carnets de dix tickets doivent-ils commander ?

Même si Chambris (2012) signale que ce problème est souvent vu comme une situation de division par les élèves et même certaines professeurs, cela ne se produira pas forcément avec les élèves observés... car la plupart de ceux-ci n'ont pas vraiment accès à la division.

Deuxième situation

Les élèves ont à réaliser la situation des Fourmillions (Destouesse, 1997). Il s'agit de ranger un grand nombre d'allumettes (3145) dans des enveloppes blanches (dizaines) puis des enveloppes marron (centaines) et enfin des paquets de mille. Nous ne décrirons pas ici le déroulement de cette situation.

Troisième situation

Écrire des 'grands' nombres comme 96 708 ; être capable de donner le chiffre des dizaines et le nombre des dizaines. Les variables didactiques sont la taille des nombres et l'existence ou non d'un zéro. Nous souhaitons voir comment les élèves prennent en compte, ou non, la place de ce zéro dans l'écriture.

Deuxième étape : la table de Pythagore

Le travail sur la multiplication débute avec une situation sur la table, « Le jeu de Pythagore » (Bonnet 1997). Les élèves ont à reconstituer la table de Pythagore par un jeu de loto avec des contraintes.

Premier jeu : le loto de la table de Pythagore

Les élèves disposent chacun des 100 cartes (ou 81, voir plus loin) sur lesquelles sont écrits les produits, et d'une table vierge. Le professeur tire 4 cartes et les pose à leur place sur la table de Pythagore ; puis les élèves tirent une carte chacun à leur tour ; on ne peut la poser *que si elle a un bord commun* avec une carte déjà posée. Cette condition est essentielle dans la construction de la situation : elle oblige les élèves à se donner des arguments pour poser une carte. Les élèves découvrent par exemple que 64 ne suit pas 63 ; que deux cartes ont un bord commun si elles sont sur une même ligne ou colonne régulière, se suivant par exemple de 6 en 6… La structure de la table peut devenir perceptible.

Deuxième jeu : les fréquences

La consigne est de colorier la table suivant les fréquences d'apparition des nombres. Ceci oblige à se demander pourquoi 12 apparaît 4 fois … et à se guider sur les lignes et les colonnes, lesquelles sont des *signes* de facteurs du produit. La table fournit donc un signe de ce qu'un nombre est un produit – et même de plusieurs façons. La tâche qui apparaît est une tâche de décomposition en facteurs. On demande ensuite d'écrire toutes les décompositions possibles des nombres connus. Il s'agit aussi d'observer les régularités, et d'en tirer des conséquences sur les produits.

C'est une situation retournée (Bloch, 2005) : on ne demande plus d'effectuer un produit mais on connaît le produit et on veut le placer sur la table, ou reconnaître sa fréquence : ceci impose une reconnaissance de la structure de la table. La situation oblige les élèves à interpréter les signes-nombres comme des *arguments* de produits. Il ne s'agit plus d'apprendre des produits contingents (7×9 est égal à 63 mais il pourrait aussi bien être égal à un autre nombre…) mais de voir que 63 ne pourrait pas être à une autre place, car il est nécessairement à un croisement de ligne et de colonne : 7 et 9. C'est aussi une situation de *décomposition en facteurs* et non plus de calcul de produits.

Troisième étape : calcul de produits « complexes » et lien avec l'algorithme

La troisième étape consiste à calculer des produits de nombres assez grands (39 × 27, 54 × 65…) disposés en tableaux rectangulaires quadrillés. Il s'agit d'exploiter la situation construite par l'équipe de Brousseau sur la multiplication (Briand et Chevalier, p. 199 et suiv.), en réinvestissant les connaissances et savoirs sur la table. Les élèves ont cette table à disposition. La procédure consiste à découper le tableau en carrés ou rectangles plus petits, puis à calculer les produits partiels. Il faut également appliquer les règles de multiplication par 10, 100 … qui ont été revues dans la première étape. Le quadrillage par unités est donné sur le tableau, mais pas le découpage en dizaines.

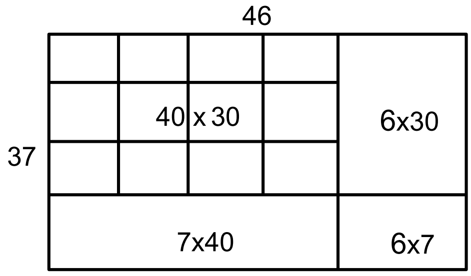

Figure 1. Exemple de calcul multiplicatif sur un schéma

Les élèves ont à calculer successivement : 27×6, 27×16, 24×12, 26×14, 25×19, 32×18, 43×17, 42×38, 56×43. Les variables didactiques ont été choisies pour inciter les élèves à ne pas compter les carreaux, mais à faire des schémas tels que celui présenté ci-dessus.

4.2 Le déroulement de la situation : travail et connaissances des élèves

Les situations ont été expérimentées dans deux classes de 5$^{\text{ème}}$ SEGPA du collège Jeanne d'Albret à Pau, en janvier 2005 et 2006[12].

Première étape

Première et deuxième situations : la numération

Certains élèves pensent qu'il y a plus de 3140 carnets. D'autres essaient de multiplier par 10. Dans les productions, on trouve des dessins de carnets et les nombres à multiplier. Ces productions montrent une bonne compréhension du travail attendu, mais un recours massif aux dessins pour la résolution, comme si le calcul seul était inenvisageable[13].

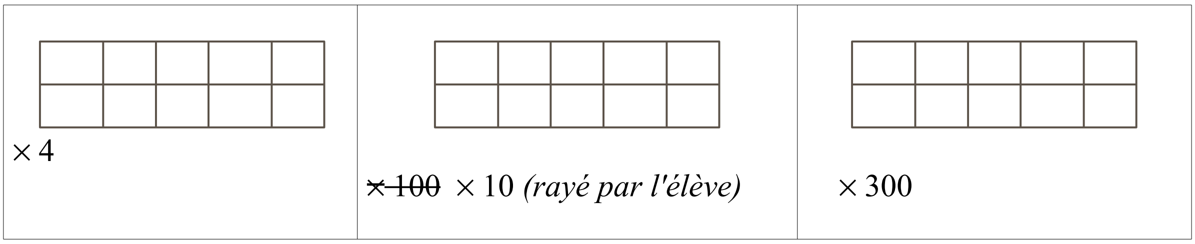

Figure 2. Réalisations des élèves

12 Je remercie Emilie Bousté-Fréchet, professeure de la classe, pour son implication dans ce travail.

13 Y a-t-il un effet de contrat ? C'est un problème de niveau primaire, donc on fait des dessins...

Ces schémas fonctionnent apparemment comme des rappels visuels de ce qu'est une dizaine (icône ou indice de dizaine) et semblent plus facile à gérer par les élèves qu'un calcul comme 10×10 ou 10×300. Cependant certains élèves posent des calculs comme $3140 \div 10$, lequel provient certainement d'une rencontre antérieure avec cette situation ; d'autres préfèrent 3000 + 100 + 40 mais la solution n'en devient pas pour autant évidente. Les deux signes ne sont pas équivalents pour la résolution : le premier donne la solution mais peut demeurer assez opaque pour certains élèves (et pour le professeur). Le second ne donne pas immédiatement la solution, mais est un bon *argument* de décomposition qui autorise une validation plus détaillée. Ces comportements montrent que les élèves ont appris des règles de résolution de ces exercices de numération, mais que celles-ci ont pu rester déconnectées de la signification : celle-ci est mieux perçue dans les schémas. Ces écrits forment une base pour une phase de validation et d'argumentation. L'interprétation des carnets et des zéros évolue : au début simples icônes de zéros, la validation les transforme en arguments dans la décomposition du nombre. La seconde situation (les fourmillions) permet ensuite d'approfondir par la décomposition en dizaines, centaines, milliers.

Troisième situation

Nous observons des élèves qui écrivent : $96\,708 = 967 \times 10 + 8$. Un autre déclare : "Il faut ajouter un zéro" mais ne sait dire où. Pour la plupart des élèves, un zéro fonctionne comme un signe de dizaine – une icône ou un indice de dizaine – quelle que soit sa place dans le nombre. La persistance de ce phénomène après la situation des tickets et celle des Fourmillions est cependant surprenante. Cela montre que, lorsqu'une première signification a été *gelée*, un travail sur une durée longue est nécessaire pour restaurer une certaine flexibilité de l'interprétation de ce signe très polysémique. Les chiffres, les nombres, le zéro doivent certainement être mis en jeu dans de nombreuses situations pour que les élèves puissent saisir les relations entre les différentes significations. Les difficultés rencontrées sont très proches de celles que signalent Tempier et Chambris...

La table de Pythagore

La table vierge a été distribuée, mais les ligne et colonne des '1' n'y figurent pas : nous avions constaté que cette ligne jetait un grand trouble dans l'esprit des élèves et qu'ils passaient un temps considérable sur ces cartes. En termes d'interprétant, il est en effet difficile à des élèves en difficulté de comprendre que '4' a le statut de facteur lorsqu'il est dans la colonne des nombres à multiplier ; et qu'il a le statut de produit lorsqu'il figure, juste à côté du premier '4', dans les résultats de la table. Au demeurant une telle subtilité ne nous a pas semblé être une priorité pour les élèves, nous avons donc choisi d'éliminer la difficulté.

La première séance – jeu du loto – voit les élèves découvrir avec surprise que, dans la table, par exemple 25 ne suit pas 24 : le fait que la table de Pythagore ne coïncide pas avec le tableau de numération habituelle n'avait visiblement jamais été perçu clairement par ces élèves. Ceci est encore un exemple de gel de la signification : les élèves ont rencontré en Première année primaire (CP) le tableau de numération, les nombres de 1 à 100, et manifestement tout tableau de nombres se voit assimilé à celui-ci. La déstabilisation qui s'ensuit induit la nécessité de justifier la place d'un nombre : or ceci ne peut être fait sans recourir aux lignes, colonnes, et en définitive aux produits. Cette situation introduit donc bien la *nécessité* mathématique de la décomposition des nombres, puisque, ce que l'élève tire, c'est un jeton comme 63, or il *doit* le voir comme 7×9 ou construire un *argument* de sa position pour pouvoir le placer sur la table : on est dans la ligne des 7 et le précédent est 56, or 56 + 7 = 63, par exemple. L'implication des élèves est importante : nous l'attribuons à la déconcertation produite par la situation, et au fait que les élèves sont amenés à se poser pour la première fois de telles questions de vérité mathématique. Des élèves réputés ne sachant pas écrire une multiplication arrivent à placer des produits réputés difficiles comme 56 ou 54, en raisonnant sur leur écriture multiplicative, ou sur la suite des nombres d'une ligne ou colonne : les nombres deviennent des *arguments de produits* alors qu'ils n'en étaient même pas des icônes.

La phase 2 (où les élèves choisissent eux-mêmes les couleurs) est également bien investie par les élèves et elle les surprend car elle prouve en acte – le coloriage – qu'un nombre n'est pas *qu'un* produit, ce que certains avaient déjà constaté dans la phase 1. La décomposition en facteurs des nombres de la table joue le rôle d'une vérification.

Troisième étape

Dans cette phase, les découpages des tableaux se font un peu au hasard, et certains élèves choisissent de découper en carrés de 5×5, ce qui devient vite inefficace dès que les nombres sont un peu grands. Puis la stratégie consistant à découper en dizaines, et même en paquets de dix, se fait jour et elle est ensuite employée systématiquement. La taille des rectangles et des carrés 10×10 est non significative, ce qui ne gêne pas les élèves ; ils manifestent une aisance certaine dans le calcul de produits comme 40×30, combinant plusieurs règles de numération et disant : 3×4, 12, donc 1200… ce que la professeure n'anticipait pas (cf. Favre, 2004 ; voir ci-dessous la conclusion).

A ce moment, les carrés ne sont plus des icônes ou des indices de dizaines, mais commencent à opérer comme des arguments. Le découpage fonctionne comme un schéma qui soutient le raisonnement, avec une règle incorporée. Cette nouvelle façon d'utiliser les signes s'étend clairement aux nombres : ainsi les élèves disposent de la table de Pythagore du jeu précédent, mais l'utilisent comme un support pour la mémorisation.

Cette phase est suivie d'exercices où les nombres des produits sont donnés, et les élèves ont la responsabilité de faire le schéma. Cette étape est également une phase d'évaluation du dispositif entier : si elle fonctionne de façon satisfaisante, c'est que le processus de réinvestissement de la nature symbolique et de la flexibilité des signes mathématiques a pu être enclenché. De fait, les élèves des classes observées ont massivement réussi ce réinvestissement, alors même que la professeure disait s'attendre à l'échec...

4.3 Bilan de la situation

Dans l'utilisation des signes par les élèves, nous retrouvons le gel des significations de façon massive, du côté du zéro, chargé d'une forte polysémie ; mais aussi, à notre surprise, nous constatons qu'au début du travail les élèves ne voient pas la table de Pythagore mais se comportent comme s'ils étaient en présence du tableau des nombres vu en Première année primaire. Cependant cette actualisation des connaissances sur la multiplication est réalisable à plusieurs niveaux : ayant fait rejouer le loto de Pythagore dans une classe de Troisième, avec, donc, des élèves de 14-15 ans, nous avons observé, comme en Sixième ou en Cinquième, une grande implication, une aide mutuelle des élèves, et, au final, une bien meilleure maîtrise des produits usuels et donc du calcul. Or cela n'a duré qu'une séance, et la table des fréquences a ensuite été réalisée par les élèves chez eux. De plus, ce loto de Pythagore est très facile à implémenter en environnement informatique, si on dispose du matériel adéquat, ce qui est majoritairement le cas actuellement. Nous conseillons donc fortement de "perdre un peu de temps" à reprendre les notions élémentaires en jeu, afin de ne pas laisser 20 % des élèves en souffrance et en difficulté...

Les situations que nous avons expérimentées montrent qu'il est possible de travailler des savoirs anciens en obtenant des élèves un nouvel investissement ; d'autre part, ces situations permettent à certains signes mathématiques de retrouver leur statut d'argument. L'histoire fictive du savoir va pouvoir progresser à partir de ces avancées, et de l'installation par le professeur d'une base de connaissances certifiée, du type de celle préconisée par Vannier (2010). Nous pensons que cette reprise d'apprentissage peut se faire, avec profit, dans une classe ordinaire où les élèves accéderont peut-être, de cette façon, à une compréhension approfondie de la numération et des opérations. Certes on n'y consacrera pas le même temps, et il sera parfois nécessaire d'individualiser le travail donné afin d'insister, avec certains élèves, sur ces connaissances de base de l'arithmétique. Encore une fois, ces connaissances que les professeurs de collège pensent souvent comme des évidences ne le sont manifestement pas pour tous.

Il en est du reste de même en géométrie...

5. La situation « Distance d'un point à une droite »

On sait depuis longtemps que la transition entre la géométrie du primaire et la géométrie du collège pose de nombreuses questions, dont certaines sont parfois complètement occultées par les pratiques du secondaire, lesquelles mettent l'accent dès la Sixième sur la nature théorique des énoncés de géométrie. On peut notamment s'interroger sur la façon de faire le lien entre les propriétés attestées par les instruments et les propriétés à démontrer ; sur ce point, nous renvoyons le lecteur à l'article de Offre, Perrin et Verbaere (2006). Les travaux de Berthelot et Salin ont aussi pointé la nécessité de se placer dans un espace plus grand que la feuille de papier pour expérimenter la "réalité" des propriétés géométriques et faire rencontrer aux élèves un milieu de validation matériel, mais qui permet d'interroger l'évidence des propriétés mathématiques énoncées. Cette confrontation entre expérience sur le terrain et vérification des théorèmes de géométrie paraît particulièrement nécessaire pour les élèves en difficulté qui sont souvent complètement déstabilisés par cette étape qu'ils ne comprennent pas.

5.1 La situation

La situation a été construite par R.Berthelot et M.H. Salin, dans le cadre de leurs travaux sur la géométrie. Les séances se déroulent en partie à l'extérieur (préau, salle de sports...), en partie dans la classe.

Objectifs :

- introduire la définition de la distance d'un point à une droite comme la longueur du segment le plus court que l'on peut tracer entre le point donné et un point de la droite.
- "découvrir" que c'est la longueur du segment d'extrémités le point donné et le pied de la droite perpendiculaire à la droite donnée passant par ce point,
- "découvrir" que tous les points à une distance donnée d'une droite donnée sont alignés. La droite qu'ils forment est dite parallèle à la première
- placer les élèves dans une situation au cours de laquelle pour échanger sur leurs résultats, ils ont intérêt à représenter la situation du méso-espace par un schéma. Il y a donc deux espaces de travail : celui du sol du préau, auquel s'appliquent des tâches proposées par l'enseignant, et l'espace du tableau de la classe, sur lequel les élèves représentent l'espace du sol et formulent les actions réalisées ou à réaliser dans le préau.

Les séances sont construites autour de deux problèmes. Les élèves ont à leur disposition : décamètre, ficelles, craies … et des équerres de tableau, notamment pour le problème 2.

Problème 1

Une ligne droite d'une dizaine de mètres de longueur est tracée sur le sol de la cour. Chaque groupe se voit attribuer un "point" matérialisé par une croix. Ces points sont placés à une distance de la ligne comprise entre 1,60 m et 2 m. Les élèves doivent mesurer la distance des points à la droite.

Problème 2

Problème 2-a La droite est tracée, les points précédents effacés. Chaque équipe place un point à 1,92 m de la droite.

Problème 2-b Après avoir placé 2 points à 1,25 m de la droite, chaque groupe doit placer, en un temps bref décompté par le professeur, le plus de points possibles à la même distance de la ligne droite.

5.2 Analyse a priori

Pour le problème 1, la suite des mesures obtenue en faisant tourner le mètre ruban autour du point donné indique à une incertitude près, liée au matériel, une solution de type « zone la plus proche » sur la ligne. Une mesure est trouvée par chaque groupe pour plusieurs points. On peut éventuellement s'attendre à des difficultés de mesurage ; par contre, avec les distances considérées, il est relativement facile de repérer la zone où la distance passe par un minimum. Remarquons que dans le micro-espace de la feuille de papier, ce travail n'aurait pas de sens : il est impossible de repérer la zone de distance minimale avec une évidence suffisante. Par contre, un logiciel de géométrie dynamique tel Cabri, Géoplan ou Géogebra, où l'on affiche la distance au fur et à mesure qu'un point M se déplace sur la droite, permet de visualiser de la même façon le moment où la distance passe par un minimum. Cette phase ne requiert donc pas de se rendre compte que la plus petite distance est atteinte lorsque l'on a une perpendiculaire menée de P à la droite.

Pour le problème 2, il est par contre très difficile de réussir sans mettre cette propriété en œuvre. L'hypothèse faite est que les angles droits sont connus, et que les élèves les introduiront spontanément comme moyen d'être sûr que l'on est bien "en face" de la droite. Il est du reste difficile de construire une situation fonctionnelle de cette propriété, en tant qu'elle apparaît dans une progression comme étant un des axiomes de la géométrie euclidienne. Berté (1995) avait analysé la dépendance existant entre les notions d'inégalité triangulaire, de perpendiculaire plus courte que l'oblique, l'intersection de deux cercles, et le théorème de Pythagore ; elle montrait qu'il était très difficile de trouver une problématisation rationnelle de toutes ces notions, dans la mesure où certaines opèrent comme des axiomes pour les autres, et que le choix des propriétés problématisées était assez fortement contraint : s'il est assez facile de problématiser Pythagore, il est beaucoup moins naturel de le faire pour les cas d'intersection de deux cercles, ou la perpendiculaire plus courte que l'oblique.

La situation construite n'est donc pas adidactique, mais *à dimension adidactique*. Il s'agit de retrouver un savoir mathématique par *abduction* et non par induction : c'est-à-dire, s'apercevoir qu'un savoir connu est celui qui va donner la solution d'un problème rencontré, on va donc, non pas découvrir mais *reconnaître* ce savoir comme fonctionnel pour résoudre le problème. Le problème 2b contraint les élèves à placer beaucoup de points très vite, ce qui conduit à des erreurs de distance ou d'orthogonalité, ce qui revient au même ; la contrainte temporelle est destinée à inciter les élèves à trouver une stratégie plus efficace, à savoir, prolonger la ligne obtenue dès que l'on a quelques points (deux évidemment, au minimum, mais quelques-uns de plus peuvent être souhaitables pour la précision).

5.3 Le déroulement effectif

Lors de la première séance, les élèves se saisissent bien du problème qui est pour eux un problème usuel de mesurage. Il y a donc bien dévolution. En fait, ici, ce n'est pas le problème qui fait problème, c'est le moyen de résoudre le problème... Ceci est lié aux difficultés évoquées (Berté, 1995) de problématisation d'un axiome. Il s'ensuit que certains élèves trouvent effectivement la distance la plus courte en utilisant le mètre déroulant et d'autres ont déjà l'intuition de l'angle droit, mais sans nécessairement pouvoir coordonner correctement la position de l'équerre (courte) avec celle du point A. Le retour en classe pour échanger sur la situation favorise bien l'emploi d'une figure qui représente ce qui se passe sous le préau, même si à ce moment, cela se fait à la demande du professeur.

A la deuxième séance, nous avons observé différentes stratégies (cf. Bloch & Salin, 2003) :

1) Partir d'un point extérieur à la ligne, mesurer la distance à la droite, et rapprocher ou éloigner le point jusqu'à obtenir un point à la bonne distance. Prolonger la ligne de mesure suppose d'avoir perçu que toutes étaient dans la même direction, et que l'on peut économiser des tâtonnements en glissant.

2) Partir de la ligne, placer un point au jugé du point de vue de la direction mais à la bonne distance, puis vérifier que 1,92 m est bien la plus courte distance entre le point placé et tous les points de la droite. Si ce n'est pas le cas, déplacer la position du point.

3) Partir de la ligne, et sur la bonne direction (ce qui suppose d'avoir perçu la perpendicularité), rechercher le point à la bonne distance.

En classe, un élève vient montrer le problème sur un dessin au tableau ou sur une feuille, représentant la ligne droite, le point et la position des 2 instruments. La professeure intervient en suivant : « *Qu'est-ce qui ne va pas ? Vous avez choisi un point sur la droite mais l'instrument de mesure n'est pas placé dans la bonne direction. Le problème c'est de trouver la bonne direction pour bien placer l'instrument.* »

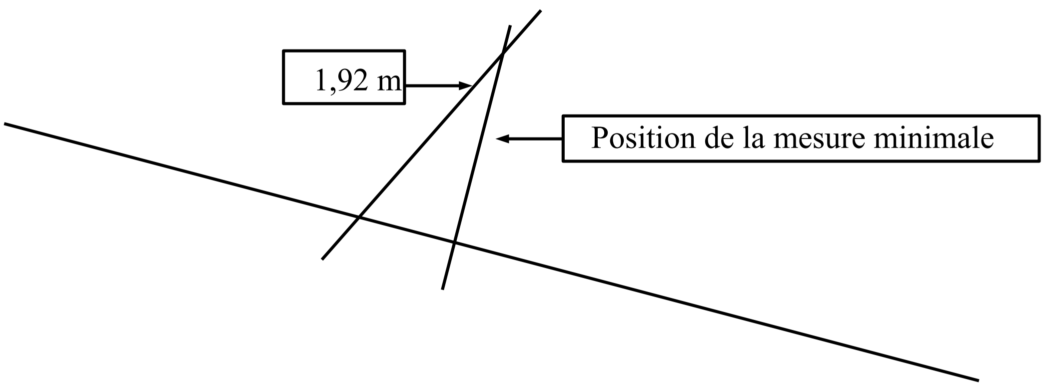

Figure 3. Le schéma de la situation au tableau

La dernière phase est la plus problématique. Alors que l'alignement des points à 1,25 m de la droite semble évident pour les observateurs adultes, les élèves développent des tactiques pour placer très vite un par un les points demandés, au risque de faire de nombreuses erreurs de mesures. C'est l'affirmation de la professeure : « moi si je veux, je place 20 points en moins d'une minute", qui dans les 2 classes a suscité la découverte de la solution.

On voit alors des élèves faire un croquis, où certains montrent aux autres que tous ces points à même distance sont alignés ; après quoi l'équipe gagnante prolonge la ligne des points déjà placés.

L'institutionnalisation prévue est faite ensuite par le professeur : tous les points qui sont à 1,25 m de la droite sont alignés, et la droite qu'on obtient est bien parallèle à la ligne tracée. Cette phase permet aux élèves de redécouvrir une propriété des parallèles qu'ils n'avaient pas forcément intégrée. De plus, cette propriété des parallèles est efficace pour tracer des droites, alors que la propriété « Deux droites parallèles ont une intersection vide » permet certes de définir des parallèles, mais en aucun cas de les tracer., ni même de vérifier pragmatiquement que deux droites sont bien parallèles... Cette propriété est par ailleurs *nécessaire* dans le parallélisme : si deux droites sont parallèles, alors elles ne peuvent faire autrement que d'avoir tous les points de l'une à même distance de l'autre. Cette dimension de la nécessité des énoncés mathématiques nous paraît tout à fait essentielle à faire pointer dans les situations de géométrie : c'est elle qui permettra de passer sans états d'âme de la géométrie pratique à la géométrie théorique appuyée sur des théorèmes et des énoncés définitoires (cf. Sackur et al., 2005).

Finalement, nous avons pu faire quelques observations surprenantes : ainsi des élèves sont, comme dit plus haut, en difficulté pour placer correctement une équerre sur une droite afin de tracer une perpendiculaire à cette même droite ; et ils ont du mal à faire le lien entre points à même distance et parallélisme. Des difficultés apparaissent aussi dans le maniement du décamètre, en particulier le placement du zéro (l'origine de la graduation).

Conclusion

Dans une classe (trop) chargée de collège, le problème est certes épineux : comment reconquérir les savoirs manquants pour certains élèves ? Pour ce qui est de la numération, nous renvoyons le lecteur aux propositions de Tempier et Chambris, en remarquant que ces propositions ne peuvent que contribuer à approfondir la compréhension qu'ont tous les élèves des notions en jeu.

Par ailleurs, il appartient au professeur, averti des phénomènes de contrat signalés plus haut, de faire le nécessaire pour ne pas se laisser piéger par les apparences, et de recueillir de façon soigneuse des indices sur les connaissances des élèves, même de ceux qui paraissent en manquer... Remarquons qu'il est beaucoup plus facile de débusquer des connaissances lorsque l'on a la certitude qu'elles existent, que lorsque l'on se les imagine absentes !

Comme prévu dans l'analyse a priori, la dynamique et la flexibilité de l'interprétation des signes sont des problèmes majeurs pour les élèves en difficulté : les interprétants sont figés. Nous avons tendance à penser que ce phénomène est une composante forte de ce qui interdit aux élèves de progresser.

Un fait nous a frappée : le niveau algorithmique, pourtant souvent privilégié notamment dans le contexte de l'enseignement spécialisé, et parfois vu par l'enseignant comme porteur de certitudes sur les connaissances, est particulièrement difficile à contrôler, d'une part par les élèves, qui osent des formules au petit bonheur ; mais aussi par le professeur, car il est embarrassé d'y reconnaître des connaissances et choisit donc souvent paradoxalement de les mettre en doute. Ceci contribue à installer le cercle vicieux des malentendus du contrat didactique. Il s'ensuit que la négociation de ce contrat, afin que celui-ci instaure un partage plus intéressant des responsabilités mathématiques dans la classe, est rendue particulièrement problématique (cf. Esmenjaud-Genestoux, 2008). La classe et le professeur s'enferrent dans des malentendus didactiques et sémiotiques et l'échec des élèves ne peut plus être enrayé.

D'une certaine façon, comme signalé déjà dans d'autres études (Peltier-Barbier, 2004 ; Perrin-Glorian, 1993 ; Butlen, Charles-Pézard & Masselot, 2009) les élèves en difficulté sont des élèves piégés dans le contrat didactique des premiers apprentissages, à savoir des élèves qui croient éternelles les spécifications de ce contrat dès lors qu'ils l'ont rencontré une première fois sous une forme donnée.

Le langage et les premières symbolisations : le démarrage crucial en Cycles 1 et 2

Le décalage avec les attentes de l'école, en matière de remaniement des savoirs et des signes qui s'y rapportent, peut être dû en partie aux modalités de l'éducation familiale (Esmenjaud-Genestoux, 2000). Il n'en reste pas moins que nous pouvons nous interroger sur la façon dont l'école a permis aux élèves de construire les premières symbolisations. Les études sur les premiers jeux de verbalisation et de représentation chez l'enfant (Montessori, Piaget, Winnicott...) et la constitution des symboles font état de la nécessité que ces symbolisations se constituent à travers des environnements familiers – jeux, albums, objets de la vie quotidienne et des représentations adaptées à la compréhension de l'enfant. Il est important de permettre à l'enfant de progresser à partir de son univers propre, sans lui imposer une utilisation prématurée de signes ne correspondant pas à son développement.

Il apparaît donc fondamental que, dans leur première enfance, les élèves puissent bénéficier de jeu sur le langage et les symbolisations non écrites primitives comme la lecture d'albums par l'adulte, le dessin, la manipulation d'objets (cubes, Lego, ou autres jeux de construction ; images, pâte à modeler, découpages, etc.), les jeux avec le corps (activités physiques et sportives, ateliers du goût, etc.). Quand nous nommons *primitives* ces symbolisations, nous ne qualifions évidemment pas leur nature : nous parlons d'un point de vue chronologique. Les réalisations d'arts plastiques sont inscrites dans cette catégorie, et elles peuvent bien entendu être fort élaborées.

Les bases symboliques de la constitution des connaissances étant alors assurées, les élèves peuvent accéder ultérieurement à des symbolisations algorithmiques écrites, et concevoir leur fonction. Des études cliniques sur des enfants n'ayant pas rencontré cet appui peuvent être trouvées dans Bergès et al. (2004).

Par ailleurs, ces premiers jeux symboliques ont une forte charge affective en relation avec la constitution de la personnalité et les relations parentales et sociales ; ils jouent donc un rôle fondamental dans le développement de la personnalité de l'enfant.
Dans le contexte actuel où certains dénoncent une primarisation rampante de l'école maternelle, il faut rappeler avec force que l'on ne contribuera pas à aider les élèves en difficulté en les contraignant trop tôt à du scolaire relevant du primaire. Il faut au contraire laisser vivre cette phase des premières symbolisations car elle est essentielle à la construction de la personnalité comme de la plasticité du cerveau, afin que l'apprentissage puisse ensuite se développer de façon suffisamment souple et adaptée.

De même en cycle 2, le démarrage des apprentissages numériques et spatiaux doit emprunter toutes les étapes connues des didacticiens et formateurs, et qui se sont révélées efficaces, car elles engagent l'élève dans l'expérience :

- Une étape essentielle de constitution des premiers référents symboliques des nombres, par l'organisation d'une collection et sa désignation ;
- Une base suffisante d'expériences par des situations telles que celles décrites dans ERMEL : les carrelages, les fourmillions, le Rummy (le rami des nombres), etc.
- Des allers-retours situations / formulations ;
- Une formulation des savoirs, notamment à l'entrée en collège, qui s'appuie sur les

situations rencontrées dans les années antérieures : pour 'récupérer' les élèves en difficulté, il est indispensable que le professeur de mathématiques soit au fait de la façon dont ses connaissances ont pu se construire précédemment ;

- Une base d'expériences aussi dans la découverte de l'espace, par des schémas, découpages, visées, tracés, etc. (Berthelot & Salin, 1999).

La nécessité de pratiquer les situations au collège

De même, à notre sens, il est de la responsabilité des enseignants de collège de proposer des situations de mathématiques suffisamment signifiantes, et sur des points suffisamment cruciaux dans toutes les dimensions mathématiques (calcul, algèbre, géométrie), pour que les élèves en difficulté, qui constituent, répétons le ! une part relativement importante des classes à l'entrée en collège, puissent ne pas être éliminés sans avoir eu une chance de retrouver le sens des apprentissages en mathématiques.

Des pistes existent pour cela, notamment dans les travaux sur les PER (Parcours d'étude et de recherche, voir par exemple Gaud & Minet, 2009) ou les situations spécifiques (cf. Berté et al, 2006 ; Briand, 2007 ; Caron, 2007 ; Chambris, 2012 ; Simard, 2012 ; Tanguay & Geeraerts, 2012...). Insistons sur le fait que ces situations sont essentielles pour les élèves fragilisés, mais aussi pour motiver les autres ; et que ces situations occupent finalement une part relativement restreinte du temps, mais permettent d'avancer ensuite plus rapidement et plus sûrement, y compris dans les apprentissages plus classiques. Ces situations peuvent être trouvées en nombre dans les revues, par exemple *Petit x* ou *Repères IREM*, comme chacun sait... Il importe que le professeur fasse confiance à ces situations[14] pour remettre les élèves dans une dynamique d'apprentissage.

Bibliographie

BAUTIER E. & RAYOU P. (2009) *Les inégalités d'apprentissage.* Paris : PUF.

BERGES J., BERGES-BOUNES M., CALMETTES-JEAN S. (2004) *Que nous apprennent les enfants qui n'apprennent pas ?* Ramonville Saint Agne : Erès éditions.

BERTE A. (1995) Différents ordres de présentation des premières notions de géométrie métrique dans l'enseignement secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **15/3**, 54-83.

BERTE A. et al. (2006) Engager les élèves dans une réelle activité mathématique : un exemple, le cercle circonscrit en Cinquième. *Petit x*, **70,** 7-29.

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1999) L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x*, **56,** 5-34.

BLOCH I. (2005) Dimension a-didactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' d'une situation. *Sur la théorie des situations didactiques* : *Questions, réponses, hommage à Guy Brousseau*, 143-152, M.H.Salin, P.Clanché et B.Sarrazy Eds., Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH I. (2008) Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif, *Les sciences de l'Éducation, Pour l'ère nouvelle,* **41-1**, Caen

BLOCH I. (2011) L'enseignement de la proportionnalité dans une classe ambition réussite : variables didactiques, pratiques du professeur, rapport visible au savoir. *Nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation,* **52**, 89-100.

BLOCH I. & GIBEL P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations

14 Et aux élèves !

didactiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* **31-2**, 191-227. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH I. & SALIN M.H. (2004) Contrats, milieux, représentations : Étude des particularités de l'AIS. *Actes du séminaire national 2003 de didactique des mathématiques*, 171-186, V. Durand-Guerrier et C. Tisseron (Ed), Paris : IREM Paris 7.

BONNERY S. (2010) *Comprendre l'échec scolaire*. Paris : La Dispute.

BONNET N. (1997) Multiplication en ZEP. *Documents pour la formation des formateurs*, COPIRELEM, 41-54. Paris : IREM Paris 7.

BRIAND J. (2007) La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe. *Petit x*, **75,** 7-33.

BRIAND J. & CHEVALIER M.C. (1995) *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*. Paris : Hatier.

BROUSSEAU G. (1996) *Théorie des Situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BUTLEN D., MASSELOT P., PÉZARD M. (2009) Les pratiques en mathématiques d'un professeur des écoles, entre contraintes et nécessité de s'adapter à différents types de classes, *Actes du colloque COPIRELEM de Bombannes,* CDRom.

CARON F. (2007) Au cœur de la calculatrice défectueuse : un virus qu'on souhaiterait contagieux ! *Petit x*, **73,** 71-82.

CHAMBRIS C. (2012) Consolider la maîtrise de la numération et des grandeurs à l'entrée au collège : le système métrique peut-il être utile ? *Petit x,* **89**, IREM de Grenoble.

CONNE F. (1999) Faire des maths, faire faire des maths, et regarder ce que ça donne, *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Conne F. & Lemoyne G. Editeurs, Montréal : Presses Universitaires de Montréal.

COULANGE L. (2012) *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves.* Note d'HDR, Université Denis Diderot Paris 7.

DDMES (2011) Des narrations pour partager et faire rebondir nos expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Actes des deuxièmes journées didactiques de La Chaux-d'Abel,* Université de Genève. http://www.ssrdm.ch/spip1/spip.php?rubrique20 consulté le 01/10/2013.

DESTOUESSE C. (1997) Ça fourmillonnne. *Grand N,* **59,** 11-18.

ESMENJAUD-GENESTOUX G. (2008) Les responsabilités de l'élève et sa quête de l'autonomie dans l'apprentissage des mathématiques. *Les sciences de l'Éducation, Pour l'ère nouvelle,* **41-1**, 33-64, Caen.

FAVRE J.M. (2004) Étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe d'enseignement spécialisé. *Actes du séminaire ARDM de didactique des mathématiques*, 109-126, Durand-Guerrier et Tisseron (Eds), IREM Paris 7.

GAUD D. & MINET N. (2009) Parcours d'étude et de recherche en géométrie pour la classe de Seconde. *Petit x*, **79,** 49-71.

GIROUX J. (2008) Conduites atypiques d'élèves du primaire en difficulté d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **28/1**, 9-62.

GOBERT S. (2011) Vues, points de vue et changements de point de vue : Usages d'environnements dynamiques en quatrième SEGPA. *Nouvelle revue de l'adaptation et la scolarisation.* **52,** 100-114.

HERSANT M. & VANNIER M.P. (2007) Regards croisés à propos d'une situation de résolution d'un "problème pour chercher". *Actualité de la recherche en Éducation et Formation.* Université de Strasbourg.

MARTY R. (1992) *99 réponses sur la sémiotique*, Montpellier : CRDP.

MILLON-FAURE K. (2011) Combien le cylindre a-t-il d'arêtes ? *Petit x,* **87,** 5-28.

PELTIER-BARBIER M.L. (2004) *Dur d'enseigner en ZEP*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.J., VERBAERE O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Petit x*, **72,** 6-39.

PERRIN-GLORIAN M.J. (1993) Questions didactiques soulevées par l'enseignement des mathématiques dans les classes 'faibles', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **13/1.2.**, 5-118, Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROINE C. (2009) *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en SEGPA.* Bordeaux : Université Bordeaux 2.

SACKUR C., ASSUDE T., MAUREL M., DROUHARD J.P., PAQUELIER Y. (2005) L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 25(1) 57–90.

SALIN M.H. (1999) Pratiques ostensives des enseignants et contraintes de la relation didactique. In *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Conne & Lemoyne éds,, 327-349, Presses Universitaires de Montréal.

SIMARD A. (2012) La proportionnalité en CM2 et Sixième. *Petit x*, **90,** 35-52.

TANGUAY D. & GEERAERTS L. (2012) D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x,* **88**, 5-24.

TEMPIER F. (2010) Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, **86**, 59-90. IREM de Grenoble.

VANNIER M.P. (2010) L'activité du professeur : entre ajustement aux besoins d'élèves "scolairement fragilisés" et maintien d'une exigence didactique. *Actes du colloque CiDd,* Nantes.

Annexe : la table du loto de Pythagore et la table des fréquences

×	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2									
3			**12**	**15**					
4			**16**		**24**				
5									
6			**24**	**30**					
7					**42**	**49**			
8					**48**				
9									
10									

×	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100