L'ERREUR DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

Groupe didactique des mathématiques
IREM d'Aquitaine[1]

Résumé. Cet article vise à donner aux enseignants de mathématiques du secondaire quelques pistes pour analyser des productions d'élèves, dans le but de mieux cerner la place que les erreurs devraient avoir dans la gestion de la classe. Dans un premier temps nous nous intéressons aux causes d'erreurs en nous appuyant notamment sur des travaux concernant la notion d'obstacle. Nous proposons une classification de ces erreurs dans le but de faciliter leur analyse par l'enseignant. Dans un deuxième temps nous parlons de la façon d'introduire le traitement de quelques erreurs dans la gestion de la classe, soit de façon immédiate, soit lors d'une situation spécifique, et donnons quelques exemples de remédiations expérimentées dans nos classes.

Mots clés. Enseignement secondaire, erreurs, remédiation, obstacles.

Abstract. The purpose of this article is to suggest some hints for teachers to analyze students' work, with the aim of helping to delimit the role of errors in the teaching and learning of mathematics in a class. In a first part we try to elucidate the cause of some errors by relying on the concept of obstacle. We propose to classify these errors, which could facilitate their analyze by the teacher. In a second part we deal with the way errors can be took into account in the class of mathematics, either immediately, either with a specific situation; we give some examples of remediation that have been experimented in our classes.

Key-words. Mathematics in secondary school, students' errors, remediation, obstacles.

Introduction

En mathématiques, les erreurs des élèves sont fréquemment attribuées par les enseignants à l'inattention, à l'étourderie, au manque de travail … Pourtant, le plus souvent, il est possible de les analyser et de leur trouver des causes plus profondes. Certaines erreurs ne sont pas significatives mais d'autres, souvent récurrentes, doivent attirer l'attention de l'enseignant. On les observe à plusieurs niveaux de classe chez de nombreux élèves et un même élève peut les commettre plusieurs fois dans des circonstances variées.

Cet article est basé sur un travail d'Annie Berté et Jean Lafourcade pour la formation des PLC2[2] à l'IUFM d'Aquitaine, et s'inspire d'un article de Roland Charnay (Charnay 1990-1991). Il vise à donner aux enseignants de mathématiques du collège et du lycée, quelques pistes pour analyser des productions d'élèves dans le but de mieux cerner la place que les erreurs devraient avoir dans la gestion de la classe.
Certes, les contrôles de fin de chapitre sont des occasions privilégiées pour observer et relever les erreurs des élèves. Mais il est parfois un peu tard ! C'est en amont, pendant l'apprentissage, que les élèves doivent être amenés à comprendre et corriger leurs erreurs,

1 Les auteurs en sont : A. Berté, J. Chagneau, C. Desnavres, R. Diranzo, S. Dutaut, L. Foulquier, J-M. Gachassin, M. Gervais, J. Lorblanché, J. Lafourcade, M-C. Godefroy-Mauratille, F. Petit, D. Roumilhac, C. Sageaux.
2 PLC2 : Professeurs de Lycée et Collège deuxième année.

sans qu'ils aient le sentiment d'avoir commis une faute sanctionnée par une note, confondant l'erreur toujours rattrapable et l'échec. L'erreur doit être dissociée du résultat erroné qui n'en est que la conséquence. Se rendre compte que l'on a commis une erreur fait partie du processus d'apprentissage. Avoir du recul pour la repérer et la corriger est une partie importante de l'activité mathématique réelle des élèves en classe.
Pour que l'enseignant puisse prendre en compte les erreurs et les traiter, il faut que les élèves soient mis en situation de les produire, non seulement dans les travaux individuels à la maison ou dans les contrôles, mais aussi lors des séquences d'enseignement en classe, car alors le moment où se produit l'erreur a moins de chance d'échapper à l'enseignant.

Dans un premier temps (I), nous allons nous intéresser aux causes d'erreurs en nous appuyant des travaux très connus concernant la notion d'obstacle empruntée à Gaston Bachelard, développée pour la première fois en didactique des mathématiques par Guy Brousseau lors de la rencontre de la CIEAEM[3] en 1976, puis par lui-même et d'autres ensuite (Artigue 1989, 1991).
Une notion n'est apprise que dans la mesure où elle permet de résoudre des problèmes. Ces problèmes, l'ensemble des contraintes auxquelles elle répond, constituent la signification de la notion. Si elle réussit assez bien et assez longtemps, la notion prend une consistance qui rend difficile sa modification : elle devient à la fois, pour les acquisitions ultérieures, un obstacle, mais aussi un point d'appui. (Brousseau 1998)

Dans un deuxième temps (II), nous parlerons de la façon d'introduire le traitement de quelques erreurs dans la gestion de la classe. L'obstacle résiste à la remise en cause, c'est pourquoi, il faut des situations nouvelles, qui vont le déstabiliser, le rendre inefficace, qui vont rendre nécessaire son rejet. Le franchissement d'un obstacle exige un travail spécifique. (Brousseau 1998) Sur ce second point, certaines situations d'enseignement connues en didactique des mathématiques sont essentielles.

Il ne s'agit pas dans cet article de reprendre tout ceci de façon approfondie. Nous avons décrit le déroulement de quelques situations en classe dans d'autres publications. Il s'agit simplement ici d'alerter les enseignants en leur faisant part d'exemples issus de notre expérience dont ils peuvent immédiatement se servir dans la gestion de leurs classes. Les exemples d'erreurs cités dans cet article, dont certains ont été empruntés à Roland Charnay, ont été le plus souvent relevés dans nos classes de collège ou lycée, et sont parfois accompagnés des productions de nos élèves. Nous avons choisi des exemples qui nous ont parus significatifs car ils donnent lieu à des erreurs récurrentes et cela quel que soit le niveau de classe : de la sixième à la seconde au moins et parfois au-delà.

I. Les causes de quelques erreurs significatives

Il est toujours hasardeux de proposer une explication pour une erreur qui a peut-être plusieurs causes, et ce sera souvent le cas pour les erreurs les plus tenaces. Le plus souvent, ces erreurs ne sont pas dues au hasard, elles sont les manifestations d'un obstacle rencontré par l'élève dans son apprentissage. Elles ont pour cause une conception cohérente bien qu'incorrecte, une « connaissance » qui a fait ses preuves dans un certain domaine. (Brousseau 1998). Très souvent les causes avancées ne sont que des hypothèses, étayées cependant, si l'élève a été interrogé sur son erreur et s'il a su exprimer distinctement sa pensée, du moins en partie. Nous ne donnons sans doute pas un exemple de toutes les erreurs significatives rencontrées dans les classes, et nous ne développons pas tous les aspects de chaque exemple.

3 CIEAEM : Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques.

Une situation d'enseignement peut se schématiser par un triangle dont les sommets sont le maître, l'élève et le savoir. Ce triangle permet de décrire les interactions qui ont lieu entre les trois différents acteurs de la situation d'apprentissage. C'est ce triangle que nous allons utiliser pour analyser les exemples d'erreurs (Charnay, 1991).

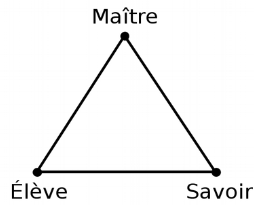


Figure 1. *Le triangle Élève/Maître/Savoir*

L'objectif de cet article est de montrer comment cet outil peut permettre à l'enseignant d'avoir un repère pour mieux comprendre et prendre en compte d'autres erreurs récurrentes qu'il a observées ou qu'il observera.

I.1 La relation entre l'élève et le savoir : les conceptions erronées

L'élève a déjà des conceptions et il s'est forgé des modèles plus ou moins implicites qu'il va utiliser ; les erreurs qui en résultent sont dues à un savoir ancien qui résiste à la mise en place d'un savoir nouveau.

Ce savoir ancien peut être le produit de l'enseignement antérieur ou de la culture. S'il doit être complètement reconstruit pour intégrer le nouveau savoir, les didacticiens parlent d'un obstacle didactique plus ou moins inévitable ou d'un obstacle culturel.

Nous pouvons situer la cause des erreurs suivantes sur un des côtés de ce triangle. C'est la relation entre l'élève et le savoir qui est en jeu par l'intermédiaire de ses conceptions.

Nous allons compléter ce schéma dans la suite de l'article.

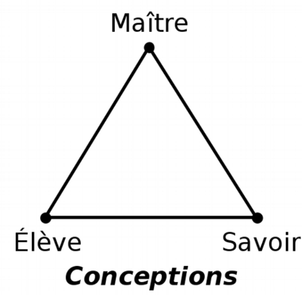


Figure 2*. Les conceptions*

Dans tous les exemples ci-dessous, la conception erronée est issue d'une connaissance antérieure appliquée hors de son domaine de validité.

Exemple 1

$$2{,}3 \times 10 = 2{,}30$$

Ici l'élève prolonge aux décimaux la règle de la multiplication par 10 qu'il connaît sur les entiers naturels. Il se construit un « théorème en acte » : pour multiplier un nombre par 10, on rajoute un zéro à droite. (Vergnaud, 1986) On peut faire l'hypothèse que les propriétés sur les entiers, apprises nécessairement auparavant en classe, et donc plus familières, sont restées prégnantes pour cet élève. Il traite dans ce cas le nombre décimal comme s'il s'agissait d'un nombre entier. Cette erreur est fréquente en sixième mais peut se rencontrer tout au long du collège.

Exemple 2

$$\frac{7}{12} = 50\,\% \quad \text{car} \quad \frac{7}{12} = \frac{7-2}{12-2} = \frac{5}{10} = 50\,\%$$

La première égalité a été écrite par un élève de collège lors de la résolution d'un problème

dans lequel certaines fractions d'un tout étaient données sous forme de pourcentage. Il a voulu ramener toutes les données en pourcentage. Nous sommes certains de la procédure utilisée car les égalités suivantes ont été énoncées ensuite clairement par l'élève sollicité par l'enseignant. L'élève a utilisé un procédé pour obtenir des fractions égales, valable pour la multiplication et la division, mais erroné pour l'addition et la soustraction. Il étend le procédé hors de son domaine de validité.
Évidemment cet élève ne pouvait pas aller jusqu'à expliciter cette cause profonde car sinon il n'aurait pas fait l'erreur. Avec le seul résultat qu'il allait se borner à donner si l'enseignant ne l'avait pas interrogé, il était bien difficile pour l'enseignant de comprendre l'erreur. Le plus important pour l'enseignant a été, en classe, de mettre à jour la procédure. Ensuite il a pu facilement remonter à la cause et prévoir un traitement de l'erreur dont ont pu bénéficier tous les élèves.

La même erreur provoque encore de nombreux échecs en seconde.

Par exemple, $\frac{7+\sqrt{2}}{12+\sqrt{2}}=\frac{7}{12}$.

La cause précédente se conjugue avec celle venant de l'étrangeté de qui n'est pas vraiment un nombre pour certains élèves, obstacle sur lequel nous reviendrons.

Ces erreurs récurrentes se produisent d'autant plus que l'élève se trouve dans une situation où il est en présence d'une situation qui lui semble difficile, son attention relativement à cette erreur là se relâche pour se concentrer sur d'autres points : résolution du problème, calcul sur les racines carrées, …

Exemple 3

Certains élèves jusqu'en troisième ont beaucoup de mal à résoudre un problème du genre :

« Quel est le prix d'un rôti qui pèse 1,2 kg et qui coûte 5 euros le kilo ? ».

Or, ils sauraient parfaitement le faire si la masse était de 3 kg. Certains résolvent le problème en utilisant la proportionnalité. Ils cherchent le prix de 100g, puis celui de 200g. Cette procédure est longue et peu efficace lorsque la masse est, par exemple 1,345 kg. La multiplication des décimaux est alors la procédure la plus adaptée.

Si on peut comprendre ce que signifie « 3 fois 5 € », « 1,2 fois 5 € » n'a pas de sens. Le nombre 3 peut-être interprété par les élèves comme le « nombre de fois » que l'on doit ajouter 5 €. Quand le « multiplicateur » n'est pas un entier, il ne peut plus être considéré comme un « nombre de fois ». Lorsque les deux facteurs sont décimaux, il n'est plus possible de considérer la multiplication comme une addition répétée. C'est un obstacle didactique incontournable, l'enseignement de la multiplication commence forcément par celle des nombres entiers. Pour franchir cet obstacle, l'élève doit remettre en cause sa conception de la multiplication et reconstruire son savoir sur ce point. L'obstacle réapparaît si l'élève doit faire le produit d'un nombre par un décimal inférieur à 1. Même s'il effectue bien son opération, il s'étonne du résultat. Toujours à cause de sa conception de la multiplication comme une addition répétée, il croît que la multiplication agrandit toujours. Il prolonge cette propriété à l'ensemble des décimaux. (cf. Apprentissages mathématiques en sixième, ERMEL Hatier enseignants 1991)

Exemple 4

Le modèle de la proportionnalité est fréquemment utilisé plus ou moins implicitement par les élèves de sorte qu'ils l'appliquent parfois hors de son domaine de validité.

Par exemple dans l'exercice suivant :

« On donne la formule suivante : $d = v \times (\frac{v}{160} + 0{,}25)$.

Elle permet de calculer la distance d'arrêt d'une voiture, sur sol sec, en fonction de sa vitesse (d désigne la distance en m et v désigne la vitesse en km/h).

a) Calculer la distance d'arrêt d'une voiture qui roule à 50 km/h.

b) Calculer la distance d'arrêt d'une voiture qui roule à 100 km/h. »

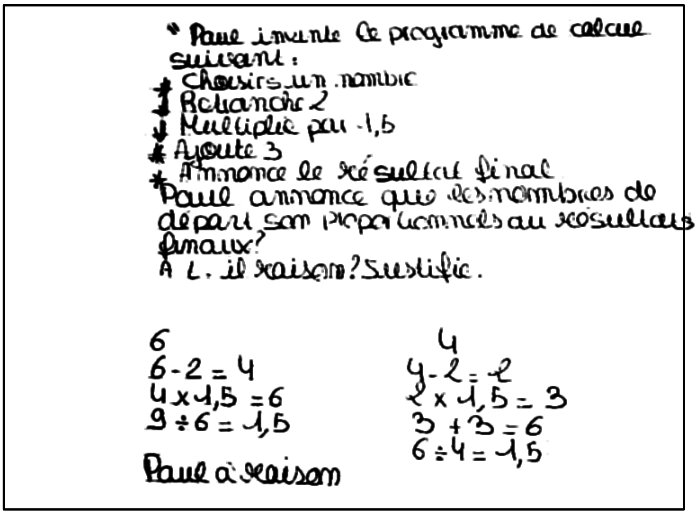
Pour obtenir la distance d'arrêt à 100km/h, certains élèves doublent le résultat qu'ils ont trouvé pour 50 km/h. Il est donc important de confronter les élèves simultanément à des situations de proportionnalité diverses et de non proportionnalité (cf. le document ressource Eduscol sur la proportionnalité au collège)

Exemple 5

L'erreur de l'élève qui écrit $(a+b)^2 = a^2+b^2$ est classique. Artigue l'analyse comme une régularisation formelle abusive (Artigue 1991). L'élève calque la réponse sur $2(a+b) = 2a+2b$, c'est à dire applique une « distributivité de l'exposant ». Ceci revient à traiter la fonction qui élève au carré comme une fonction linéaire, sans que l'élève en soit conscient. La régularisation formelle abusive aurait pu expliquer aussi la simplification des fractions dans notre exemple 2, surtout dans le cas où l'élève fait disparaître $\sqrt{2}$ en le barrant sans avoir nécessairement conscience de soustraire un nombre au numérateur et au dénominateur, puisque $\sqrt{2}$ n'a pas vraiment le statut d'un nombre pour lui. Les élèves utilisent ici la proportionnalité hors de son domaine de validité.

Exemple 6

La démonstration mathématique n'est pas du même ordre que l'argumentation dans la vie courante dans laquelle, pour convaincre quelqu'un, il suffit de donner un ou deux exemples. En mathématiques, on doit souvent prouver qu'une propriété est vraie pour tous les cas envisageables. La logique mathématique n'est pas la même que la logique *naturelle.* La culture du quotidien fait donc obstacle à la culture mathématique.(Brousseau 1998). Dans ce programme de calcul, de nombreux élèves se contentent d'un ou deux exemples et concluent à la proportionnalité :


* Paul invente le programme de calcul suivant :
Choisir un nombre
Retranche 2
Multiplie par 1,5
Ajoute 3
Annonce le résultat final
Paul annonce que les nombres de départ sont proportionnels aux résultats finaux?
A t. il raison? Justifie.

6
6-2=4
4x1,5=6
9÷6=1,5
Paul a raison

4
4-2=2
2x1,5=3
3+3=6
6÷4=1,5

Figure 3*. Un calcul sur deux nombres prouve-t-il la proportionnalité ?*

Exemple 7

Les enseignants constatent souvent que certains élèves, pour calculer l'aire d'un rectangle, utilisent la formule donnant le périmètre, et réciproquement. Ou bien ils disent que si deux rectangles ont le même périmètre alors ils ont la même aire. Les grandeurs aire et périmètre, faute d'avoir pris du sens pour eux, sont amalgamées. Ils ont seulement retenu qu'elles se calculent à l'aide des dimensions avec des formules devenues interchangeables. (Perrin Glorian, 1990)

Favorisant cet amalgame, une connaissance implicite des figures simples fait obstacle. Si deux cercles ont le même périmètre, alors ils ont la même aire et inversement. D'autre part, le périmètre et l'aire d'un cercle varient dans le même sens, l'augmentation ou la diminution de l'un amenant l'augmentation ou la diminution de l'autre. Il en est de même pour les carrés ou les triangles équilatéraux, et de façon générale pour tout ensemble de figures semblables entre elles. Les élèves étendent cette propriété à tous les rectangles.

I.2 La relation entre le maître et le savoir : les choix didactiques

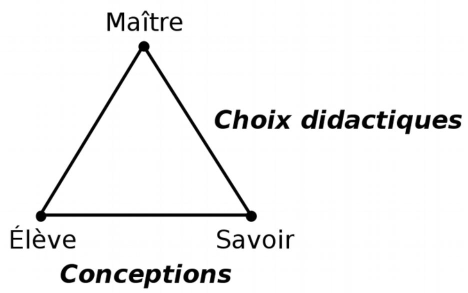


Figure 4. *Les choix didactiques*

Certains choix didactiques de l'enseignant peuvent avoir des conséquences sur les conceptions des élèves et notamment renforcer les obstacles culturels et didactiques dont nous venons de parler. Nous pouvons situer la cause des erreurs suivantes sur un autre côté du triangle : les choix didactiques du maître dépendent de ses connaissances en mathématique et en didactique.

Exemple 8

Les élèves écrivent par exemple :

$$3{,}8 + 7{,}5 = 10{,}13 \text{ ou } 3{,}8 \times 2 = 6{,}16 \text{ ou } 3{,}12 > 3{,}8 \text{ car } 12 > 8$$

On peut faire l'hypothèse qu'ils considèrent qu'un décimal est un nombre composé de deux parties : deux entiers séparés par une virgule. Ils opèrent sur chacune des parties de façon indépendante. Quand les parties entières sont les mêmes, ils comparent les parties décimales comme deux entiers. (Brousseau Guy et Nadine 1987, Roditi 2008)
Cette erreur peut être liée à la façon dont l'enseignant a introduit les décimaux.
Par exemple, il a pu introduire les décimaux comme codage de mesures de longueurs ; 1,18 m étant le codage de 1 m et 18 cm ou bien 4,52 € celui de 4 € 52 c. Dans les deux cas, il a transformé en décimal une mesure donnée par deux entiers affectés d'unités différentes (mètre et centimètre ou euro et centime).

L'enseignant qui introduit les décimaux ainsi s'appuie, croyant bien faire en montrant le lien entre les mathématiques et la vie de tous les jours, sur une connaissance culturelle (le langage courant pour les mesures, les prix affichés au marché avec deux unités mais écrits sur les tickets de caisse avec une virgule). Cette connaissance culturelle renforcée par ce choix didactique s'érige alors en obstacle. De plus la lecture de nombres décimaux à l'oral : 4 virgule 52 ou 4 unités et 52 centièmes incite à cette interprétation erronée.
En classe, les travaux de Brousseau (1987) ont conduit à délaisser cette entrée par les « re-codages » d'écritures complexes avec plusieurs unités et à plutôt introduire l'écriture des décimaux à partir des fractions décimales.

Les programmes de l'école primaire de 2002 et de 2008 préconisent cette progression. En quelques mots, démarrer avec des bandes de papier comme unité (on évite de prendre la règle graduée) et faire mesurer différents segments, revenir sur la fraction partage ; travailler avec les écritures $3+\frac{7}{10}+\frac{9}{100}$; se rendre compte que les écritures deviennent lourdes et demander aux élèves de trouver des écritures plus simples. L'enseignant introduit alors le codage 3,79.

Le rôle de l'enseignant consiste à faire des choix didactiques, à réfléchir sur la progression de son enseignement des fractions et des décimaux et sur le contenu des séances de soutien pour les élèves en difficultés.

Exemple 9

En géométrie, depuis l'école élémentaire, un rectangle ou un triangle isocèle sont très souvent représentés dans la façon ci-contre, notamment dans les manuels.

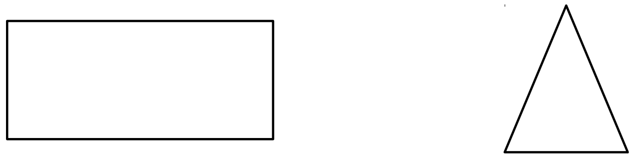


***Figure** 5. Rectangle et triangle isocèle prototypiques*

Comme pour les décimaux, les choix didactiques des enseignants sont à la fois causés et renforcés par un obstacle culturel. Parce que nous marchons à la verticale et que nous écrivons horizontalement de haut en bas sur une feuille de papier, les directions horizontales et verticales sont privilégiées. Mais la verticale, notion qui a un sens en physique et en géographie, n'est pas pertinente en mathématique.
Pour le triangle isocèle, les mots « base » et « sommet » participent à la construction de cette représentation, génératrice d'erreurs, et cela au-delà du collège.

Dans le problème suivant, ABCD est un carré et ABE et CFB sont des triangles équilatéraux. On demande si les points D, E, F sont alignés. Ce problème peut être abordé de la cinquième à la seconde.

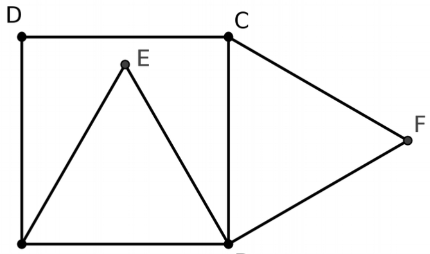


Figure 6. Le problème des points alignés

Une première difficulté consiste à reconnaître EBF comme un triangle rectangle isocèle car il est « sur la pointe » et, de plus, ce triangle n'est pas tracé entièrement.
Certains élèves de seconde l'ont bien reconnu, ont pu écrire que

$$\widehat{EBC}+\widehat{CBF}=30°+60°=90°$$

et conclure que $\widehat{BEF}=45°$.

Mais faute de reconnaître en ADE un triangle isocèle car « il a la pointe en bas et un côté vertical », ils n'ont pas pu calculer l'angle . Ceci a amené l'un d'eux à écrire :

« $\widehat{AEB}+\widehat{BEF}=60°+45°=105°$, $\widehat{FED}=180°-105°=75°$.
Or, 60°+45°+75°=180°.
Donc les points D, E, F sont alignés. »

Ainsi faute d'avoir reconnu un triangle isocèle, et pour conclure à tout prix, cet élève a été amené à faire une erreur de raisonnement dont il n'était pas coutumier. Il a seulement démontré la vérité de l'équivalence : D, E, F alignés ⇔ $\widehat{DEA}=75°$ sans avoir démontré la vérité d'aucune des deux propositions.

Dès l'école élémentaire, l'enseignant peut faire reconnaître des triangles isocèles, des rectangles et des carrés dans différentes positions, éviter de présenter les losanges toujours sur la pointe. Mais au collège, quand un problème commence par : « Soit un rectangle ABCD... », il est assez naturel de ne pas démarrer la figure en traçant un rectangle en biais dans la feuille. Cela complique le travail inutilement, y compris ensuite pour repérer les angles droits comme hypothèse et réussir les démonstration demandées. En revanche l'enseignant peut demander à l'élève des exercices spécifiques de construction : un rectangle dont un des côtés est déjà tracé, ni vertical ni horizontal, ou un triangle isocèle dont on donne la base n'importe où dans la feuille. Surtout, il peut privilégier des problèmes de géométrie comme celui que nous donnons plus haut dans lesquels l'élève aura l'occasion de rencontrer des figures dans n'importe quelle position, même si le carré initial a été tracé commodément en respectant les directions privilégiées ! (Grenier, 1988)

I.3 La relation entre le maître et l'élève : les erreurs liées au contrat didactique

Ce sont des erreurs provenant de ce que l'élève imagine des attentes de l'enseignant : « un problème a toujours une solution », « il faut utiliser toutes les données du texte », « si on vient d'étudier tel théorème il faut l'utiliser dans la solution »… On parle d'erreurs liées au contrat didactique.(Brousseau 1986).

Nous pouvons compléter le schéma pour le troisième côté du triangle. Le contrat didactique est un lien souvent implicite entre le maître et l'élève et une des causes des prises de décision de ce dernier. L'acquisition du savoir par les élèves est l'enjeu fondamental du contrat didactique. Il est nécessaire pour enseigner mais il doit être fréquemment rompu pour amener les élèves à progresser.

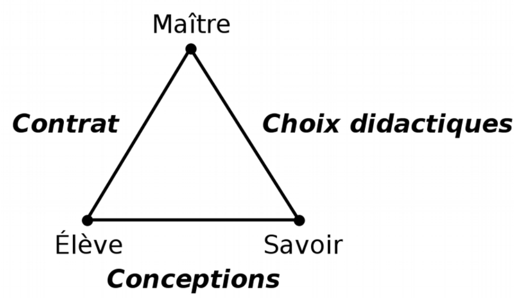


***Figure** 7 . Le contrat didactique*

Exemple 10 (R Charnay 1990-1991)

« *L'âge du capitaine*
20 chèvres, 10 moutons et 5 matelots naviguent à bord d'un bateau.
Quel est l'âge du capitaine ?»[4]

4 Stella BARUK (1998) L'âge du capitaine De l'erreur en mathématique. *Seuil*

Nous avons posé cette question en Sixième, dans une suite de petits problèmes classiques. L'élève qui a fourni cette réponse (voir page suivante) pense qu'un problème a toujours une solution, qu'il doit utiliser toutes les données figurant dans l'énoncé et il imagine une histoire qui lui permet de satisfaire ces exigences !
Dans cet exemple, le contrat didactique habituel de la résolution de problème a été rompu, dans le but de faire expliciter lors de la mise en commun les règles implicites qui ont conduit l'élève à donner cette réponse.

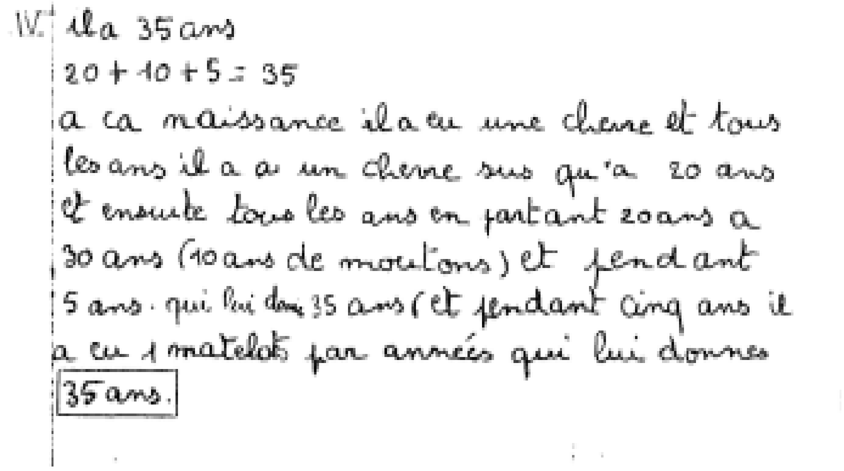
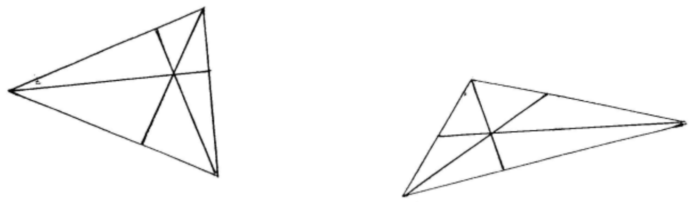

W. il a 35 ans
20 + 10 + 5 = 35
a ca naissance il a eu une chevre et tous
les ans il a a un chevre jus qu'a 20 ans
et ensuite tous les ans en partant 20 ans a
30 ans (10 ans de moutons) et pendant
5 ans. qui lui don 35 ans (et pendant cinq ans il
a eu 1 matelots par années qui lui donnes
$\boxed{\text{35 ans.}}$

Figure 8. *Le capitaine a 35 ans ...*

Exemple 11

« *Tracer les 3 hauteurs dans chaque triangle.* »

Élève 1



Élève 2

Figure 9. *Les hauteurs d'un triangle ne « doivent pas sortir » du triangle*

Quand les trois angles du triangle sont aigus, les deux élèves n'ont pas de difficultés. Mais quand il y a un angle obtus, ils n'osent pas sortir du triangle. Ils n'imaginent pas qu'ils ont « le droit » de tracer des « traits en dehors de la figure ».
L'élève 1 trace bien la hauteur relative au côté qui est à peu près horizontal. Ne sachant que faire, il est possible qu'il ait tracé une médiane, puis il termine en utilisant la propriété que

les trois hauteurs sont concourantes.
Pour l'élève 2, la notion d'orthogonalité liée à la hauteur est connue (attestée par le codage avec un petit carré). Il a essayé de tracer les deux hauteurs sur les côtés du triangle, en allant aussi loin que possible sans en sortir.
Les élèves s'interdisent de prolonger les côtés, on sait les difficultés qu'il y a pour eux à intervenir sur une figure donnée, en rajoutant des points ou en traçant des traits supplémentaires, en partie parce qu'ils pensent que le contrat didactique qu'ils imaginent le leur interdit. D'autre part pour certains, la hauteur du triangle « appartient » au triangle, donc elle ne peut pas être à l'extérieur. Le triangle n'est pas une figure mais un objet physique plein, comme les triangles, carrés ou rectangles non carrés en plastique avec lesquels les élèves de maternelle font des classements. On retrouve l'obstacle d'une conception erronée, favorisé par des choix didactiques plus ou moins évitables. De ce fait le langage est lui-même source d'erreur car la hauteur « du » triangle devient la hauteur appartenant à cet objet physique qu'est un triangle.

Exemple 12

L'enseignement de la géométrie au début du collège exige le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive, qui nécessite un changement de contrat didactique que les élèves ne perçoivent pas. Plus largement, l'enseignement de la géométrie souffre dès le collège, de la confusion entre trois problématiques différentes dans lesquelles les élèves sont amenés à se placer pour résoudre des problèmes.

- on constate les propriétés sur un dessin par un contrôle perceptif ou instrumenté,
- on anticipe les solutions en justifiant la procédure de façon empirique,
- on les démontre en utilisant des théorèmes. (Berthelot & Salin 2000-2001)

Quand l'élève de l'école élémentaire apprend pour la première fois ce que sont des droites perpendiculaires, on lui demande de dire à vue d'œil ou en se servant de son équerre si des droites sont ou non perpendiculaires. Il est placé dans une problématique pratique : j'ai la réponse en regardant le dessin ou en mesurant sur le dessin.
Si en Sixième, l'enseignant lui demande de placer 10 points équidistants de deux points donnés A et B, l'élève va dire que ces points semblent alignés et l'enseignant lui demandera d'admettre que tous les points équidistants de A et B sont sur la perpendiculaire au segment [AB] en son milieu (axe de symétrie matérialisé par pliage). Cela deviendra un théorème dans une théorie qui vise à modéliser l'espace. Pour énoncer une conjecture, l'élève a été placé dans une problématique de modélisation. Il se construit un « modèle », une stratégie de résolution, qu'il est capable d'expliquer et qui lui permet d'anticiper la position des points.

Enfin pour répondre à la question sur l'alignement des points D, E, F, dans le problème cité plus haut (exemple 9), il ne suffit plus de constater à vue d'œil ou avec une règle que les points sont alignés, ni d'admettre ce résultat comme évident, mais il s'agit de le démontrer à l'intérieur de la théorie géométrique. L'élève doit comprendre qu'il est placé dans une problématique théorique.
C'est ainsi que certains élèves de seconde avaient bien compris qu'ils devaient faire une démonstration pour ce problème des points alignés, mais faute d'avoir trouvé la solution avec l'angle de 180°, ils avaient eu l'idée de choisir un repère d'origine A et de trouver les coordonnées des points D, E et F. Leur dessin étant fait sur un quadrillage de maille 0,5 cm dans lequel le côté du carré mesurait 4 cm, les points E et F se trouvaient à un nœud du quadrillage (car $4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\times\sqrt{3}$ $\approx 3,5$). Certains élèves ont alors lu les coordonnées des points ainsi : D (0 ; 4) puis E (2 ; 3,5) et F (7,5 ; 2).

Avec ces coordonnées, l'écriture de l'équation de la droite (DE) montrait que les points n'étaient pas alignés, ce qui contredisait la démonstration géométrique avec les angles.
L'ancien contrat didactique – se fier à la perception visuelle pour trouver un résultat en géométrie – et la problématique pratique ont resurgi inopinément du fait de la difficulté pour les élèves de calculer la hauteur d'un triangle équilatéral.
De fait, il arrive, même au lycée, que la perception soit sollicitée y compris dans des problèmes où il faudra démontrer en utilisant un théorème, notamment pour conjecturer l'alignement de points.

I.4 Erreurs en relation avec l'histoire des mathématiques : les obstacles épistémologiques

Le triangle se complète ainsi à un de ses sommets.

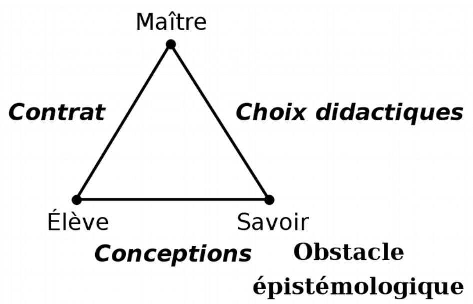


Figure 10. *Obstacle épistémologique*

Les notions qui ont posé problème dans l'histoire des mathématiques se retrouvent dans la construction du savoir des élèves.

Exemple 13

L'erreur de l'élève qui, pour multiplier un décimal par 10, ajoute un zéro à la fin du nombre (notre exemple 1), s'explique par un prolongement de cette procédure, valable pour les entiers naturels, aux décimaux. L'élève traite les nombres décimaux comme s'il s'agissait d'entiers. Peut-on dire qu'il s'agit d'un obstacle épistémologique ?
Les Babyloniens avaient la numération de position et les Pythagoriciens, les fractions. Mais les nombres décimaux, inventés par les arabes vers 952, se sont démocratisés très tard, au 16^{e} siècle, grâce à Stevin (La Disme 1585). Les décimaux sont présentés comme des nombres qui peuvent se ramener à des entiers moyennant un changement d'unité. Ainsi tous les calculs sont des opérations sur des entiers. Et ils ont été longtemps enseignés ainsi, pour des besoins de vulgarisation large et rapide en vue de leur utilisation en comptabilité. Il s'agissait d'enseigner les mécanismes et non la compréhension mathématique. Les mesures avec le système métrique facilitent l'introduction des nombres décimaux mais sont aussi à l'origine de dispositifs didactiques qui ont conduit à des conceptions erronées (voir exemple 8). Nous partageons l'avis de Artigue (1990) quand elle dit dans son article « Épistémologie et didactique » :

> « ...l'analyse historique peut aider le didacticien dans sa recherche des nœuds de résistance de l'apprentissage, elle ne peut en aucun cas apporter à elle seule la preuve de l'existence de tel ou tel obstacle pour les élèves actuels. Et ce d'autant plus que l'on constate que les nœuds actuels de résistance sévère correspondent souvent aux points où un obstacle d'origine épistémologique intervient renforcé par un obstacle d'une autre origine, en particulier un obstacle d'origine didactique. ».

C'est le cas ici.

Exemple 14

Nous avons pu maintes fois constater que, pour nos élèves, les fractions non décimales ne prennent pas facilement le statut de nombre, surtout quand elles ne sont pas introduites dans les classes comme nécessaires aux mesures.

Par exemple, les élèves conçoivent difficilement la multiplication par un rationnel. Lorsqu'on demande à un élève d'agrandir une figure, il ajoute une longueur aux dimensions et ne multiplie pas forcément car, pour agrandir l'élève peut se référer au langage courant, « agrandissement d'une maison » (dans ce contexte, on ajoute une pièce supplémentaire), de même quand on grandit, on ajoute quelques centimètres à sa taille. L'obstacle du langage sert d'échappatoire pour les élèves devant un autre obstacle : pour passer d'une dimension à la dimension agrandie, il faudrait multiplier par un nombre non entier. Si l'enseignant demande un agrandissement de sorte que la dimension de 4 cm devienne 8 cm, l'élève multiplie toutes les dimensions par 2. C'est plus difficile si on veut que 4 cm devienne 6 cm. Ne voyant pas par quel nombre ils peuvent multiplier, certains ajoutent 2 cm à chaque dimension. Beaucoup réussissent en ajoutant à chaque dimension la moitié de cette dimension. Ils multiplient ainsi chaque dimension par $1+\frac{1}{2}$ mais sans nécessairement se rendre compte qu'ils font une multiplication. Comme dans la situation très connue du puzzle de Guy Brousseau, si l'enseignant demande, même en seconde, que 4 cm devienne 7 cm, peu d'élèves trouvent qu'il faut ajouter les $\frac{3}{4}$ à chaque dimension. Certains multiplient par 2 et retranchent 1 à toutes les dimensions. Quand à la multiplication par $\frac{7}{4}$, même en seconde, elle arrive rarement. La fraction $\frac{7}{4}$ est un nombre étrange car elle est supérieure à 1, donc difficile à envisager comme une partition de l'unité (l'écriture $1+\frac{3}{4}$ a davantage de sens) et beaucoup d'élèves ne l'envisagent pas encore comme un nombre avec lequel on peut faire des multiplications.

Exemple 15

Les irrationnels ont encore plus de mal à être reconnus comme des nombres. On peut invoquer sans doute l'obstacle épistémologique, cette fois avec davantage de pertinence que pour les décimaux. Mais même si les élèves finissent par admettre que $\sqrt{2}$ est la mesure de la diagonale du carré de côté 1, une unité étant donnée, l'étrangeté de cet objet perdure du fait qu'on ne peut pas trouver « un résultat » à une opération comme $\sqrt{2}+1$ ou que $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, bien que ces deux expressions aient un aspect très différent l'une de l'autre. L'écriture $\sqrt{2}+1$ est étrange au même titre, si ce n'est plus, que $x+1$ car au moins dans ce cas, on peut comprendre que x peut se remplacer par un nombre familier. D'où les simplifications dont nous parlions dans notre exemple 2 ci-dessus.

Exemple 16

A propos de la représentation d'un nombre par une lettre, une source fréquente d'erreur vient du fait que les élèves croient que x désigne nécessairement un nombre positif et que $-x$ désigne nécessairement un nombre négatif. Admettre une convention erronée constituerait-il une cause d'erreur qui échappe à notre classification ?

En fait, on y revient dès l'instant où on analyse la cause profonde de cette erreur. Les élèves ont l'habitude de dire qu'un nombre sans signe comme 3 est positif alors que le signe − devant le nombre est indispensable pour écrire un négatif, (− 3) par exemple. C'est une connaissance récente des nombres relatifs (en Cinquième et Quatrième) qui fait obstacle à un savoir nouveau. La difficulté est renforcée par des choix didactiques. Le plongement dans $\mathbb{Z}$ de l'ensemble des entiers pratiqués depuis l'école élémentaire a fait disparaître trop rapidement le signe + devant les relatifs. Ce signe + a été encore davantage éphémère lors du plongement dans $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}^+$ dont les éléments n'ont en pratique jamais eu de signe. Le choix didactique de passer très vite sur la différence pour les signes + et − entre signes opératoires et signes prédicatoires, ainsi que le choix de ne pas consacrer une séance spécifique à l'emploi du signe − pour indiquer l'opposé, renforce la difficulté dans les classes. C'est là un obstacle didactique.

Mais, il est bien connu que l'idée de représenter un nombre (inconnue ou variable notamment) par une lettre ne va pas de soi. Le calcul littéral est arrivé jusqu'à nous depuis Diophante qui désignait l'inconnu par un nom, « l'arithme », en passant par Viète et Descartes. De plus, les nombres négatifs n'ont été formalisés que tardivement à partir du 15$^{\text{ème}}$ siècle notamment par Viète. Il y a donc bien un obstacle épistémologique.
Les élèves utilisent des lettres dans les formules d'aire et de périmètre par exemple, mais elles désignent alors des grandeurs par leurs initiales et il s'agit de les remplacer par des nombres et non d'opérer sur des expressions littérales.

Chevallard (1985) dit que l'algèbre est la science du calcul sur les programmes de calcul. Pour introduire l'algèbre au collège, on peut proposer aux élèves de travailler sur des programmes de calcul (par exemple : « je choisis un nombre, je le retranche de 2, etc »). Ils doivent appliquer ce programme à plusieurs nombres, puis prouver une conjecture vraie pour tous les nombres (voir exemple 6). Mais, pour exprimer le programme de calcul, les élèves utilisent des mots, nul besoin de l'algèbre, aussi c'est l'enseignant qui introduit la lettre. On peut leur proposer de communiquer un programme de calcul à un camarade qui ne le voit pas, sans utiliser de mots, cela amène les élèves à choisir un symbole (par exemple un point d'interrogation) pour représenter le nombre variable. l'enseignant doit imposer l'usage d'une lettre comme un usage culturel. Il y a donc encore ici un nœud d'obstacles de différentes origines.

Exemple 17

Selon nos observations, c'est sans doute au moment de l'introduction des nombres négatifs et surtout lors de la multiplication de deux négatifs que la réaction de nos élèves nous ramène au plus près de l'obstacle épistémologique. Nous avons largement traité ce point dans notre publication sur l'enseignement des nombres relatifs au collège dans la revue Repères IREM[5].

I.5 Erreurs liées au développement de l'élève : les obstacles ontogéniques

Ces erreurs sont liées à l'élève qui est limité à un moment par son développement psychogénétique. Par exemple, en même temps que l'élève grandit, sa conception de la proportionnalité se construit en fonction du développement de son cerveau, de sa maturité (selon Piaget). Il est donc important de traiter ces apprentissages sur du long terme, plusieurs années. C'est ce qui est préconisé dans les programmes pour la proportionnalité dont l'apprentissage s'étend du cycle 3 au début du lycée.
On achève ainsi de compléter le schéma du triangle. On obtient ainsi une grille d'analyse

5 Groupe didactique des mathématiques de l'IREM d'Aquitaine, « Enseigner les nombres relatifs au collège », revue Repères IREM, n°73, octobre 2008.

qui permet de classer un grand nombre d'erreurs.

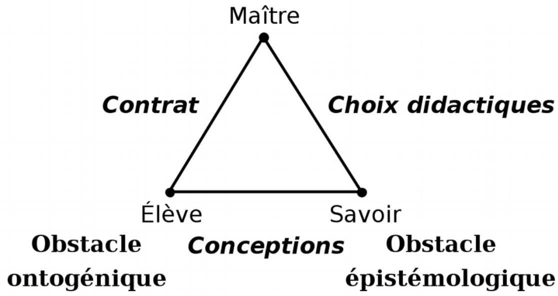
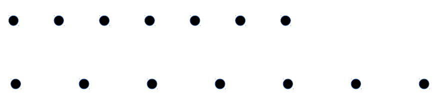


Figure 11. *Obstacles ontogéniques*

Exemple 18 (Charnay 1990-1991)

On a une ligne de billes.



Jusqu'à 6 ou 7 ans un enfant ne distingue pas la notion de la quantité numérique et celle de la place occupée. Si on étire la ligne, l'élève pense qu'il y a davantage de billes.[6]

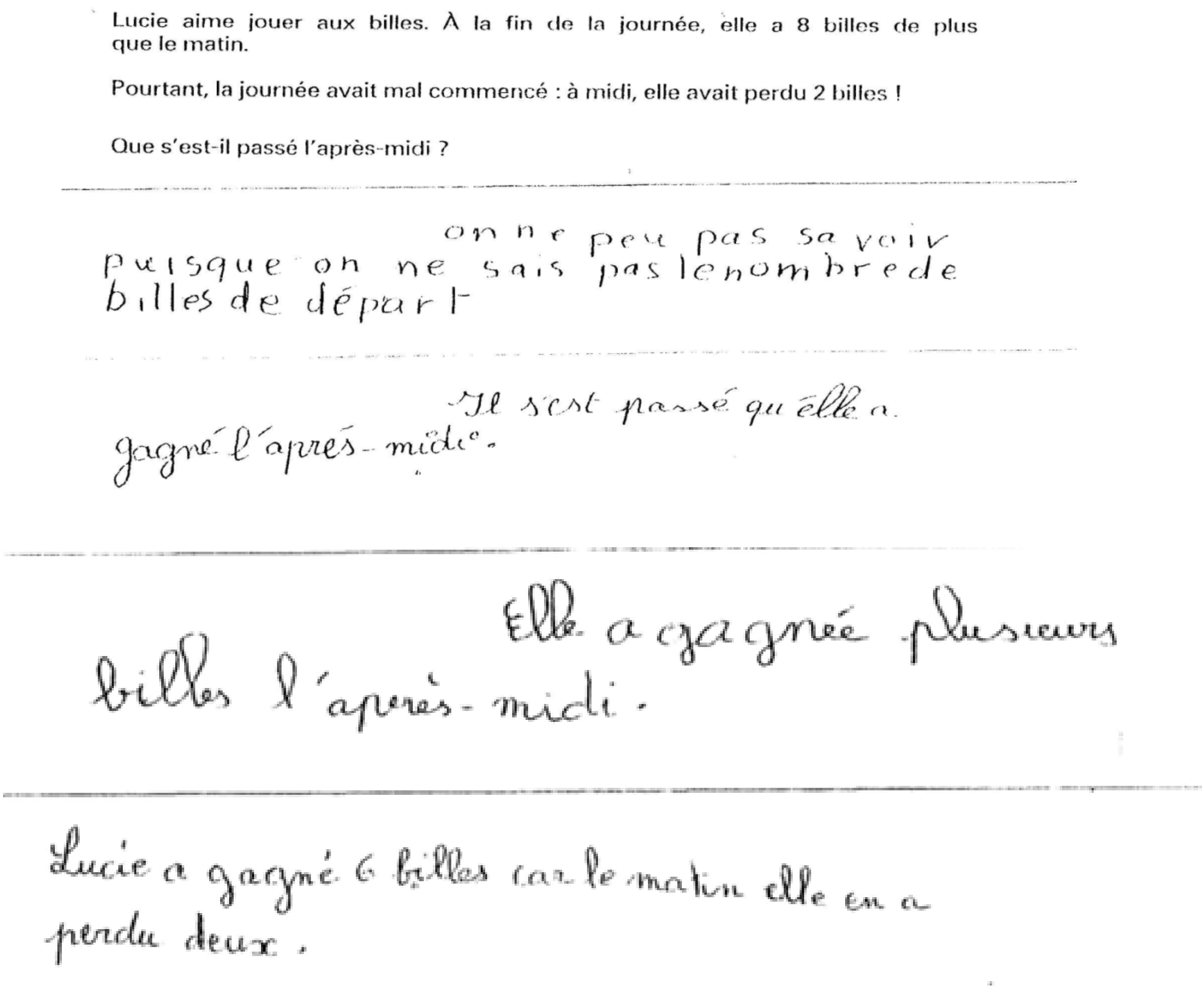
Exemple 19

On pourrait penser que le modèle additif est assimilé quand un élève entre en 6ème. Or dans l'exercice suivant, tiré des anciennes évaluations à l'entrée en 6ème, certains élèves rencontrent encore des difficultés. Elles sont dues au manque d'information concernant le nombre initial de billes et à la notion implicite de nombre relatif dans cette *variation.* Il s'agit d'un problème de composition de transformations, avec la recherche d'une des transformations intermédiaires, avec en plus une transformation négative (perdu 2 billes) et la transformation globale donnée sous forme de comparaison (8 billes de plus que le matin).

Selon la classification développée par Vergnaud, il y a 6 types de problèmes additifs et le problème ci-dessous est un des plus difficiles parmi ceux qui sont travaillés à l'école primaire.

> Lucie aime jouer aux billes. À la fin de la journée, elle a 8 billes de plus que le matin.
> Pourtant, la journée avait mal commencé : à midi, elle avait perdu 2 billes !
> Que s'est-il passé l'après-midi ?

6 Une expérience de Piaget sur la construction du concept de nombre chez l'enfant : l'épreuve de la conservation.


Lucie aime jouer aux billes. À la fin de la journée, elle a 8 billes de plus que le matin.

Pourtant, la journée avait mal commencé : à midi, elle avait perdu 2 billes !

Que s'est-il passé l'après-midi ?

on ne peu pas savoir puisque on ne sais pas le nombre de billes de départ

Il s'est passé qu'elle a gagné l'aprés-midi.

Elle a gagnée plusieurs billes l'aperès-midi.

Lucie a gagné 6 billes car le matin elle en a perdu deux.

Figure 12. *Réponse à un problème de composition de transformations*

II. Le traitement de quelques erreurs en classe

Le traitement de l'erreur peut être immédiat, sitôt après que l'erreur se soit produite, ou peut donner lieu à une situation d'enseignement qui fera référence dans l'*histoire de la classe*. En effet, une situation, dans laquelle l'enseignant sait que les élèves risquent de commettre une erreur particulière, peut être organisée en classe avant que l'erreur soit commise, précisément pour l'affronter. Ensuite, si l'erreur est tenace pour certains élèves, l'enseignant pourra se référer à ce qui s'est passé dans la classe, ce qui permet à ces élèves de comprendre beaucoup plus vite leur erreur sans que l'enseignant s'y appesantisse à nouveau.
Nous avons déjà décrit de telles situations d'enseignement dans nos publications. Nous nous bornons ici à quelques exemples, pour remédier à des erreurs qui viennent de se produire, en choisissant plutôt des cas où l'enseignant a diverses pistes. En effet, parfois une seule explication ne convainc pas un élève et, au lieu de lui répéter la même explication, il vaut mieux changer de point de vue ou changer de cadre.

Ces remédiations ont été expérimentées dans les classes des membres du groupe didactique de l'IREM de Bordeaux, depuis de nombreuses années.

II.1 Comment remédier à l'erreur : $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+c}$ ou $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-c}$?

L'enseignant peut faire fonctionner les différents statuts de l'écriture fractionnaire.

1. En utilisant la « fraction partage », il peut faire un schéma qui prouve, sur un exemple simple, que $\frac{1}{2} \neq \frac{1+2}{2+2}$.

$\frac{1}{2}$

$\frac{1+2}{2+2}=\frac{3}{4}$

Figure 13. *La fraction-partage*

2. En utilisant la « fraction quotient », il peut prouver que $\frac{3}{4} \neq \frac{3+6}{4+6}$ car $0{,}75 \neq 0{,}9$.

Cette preuve fonctionne avec des fractions décimales. Pour des fractions non décimales, l'enseignant peut revenir aux « multiplications à trous ».

L'élève sait que $\frac{2}{3}$ est le nombre qui, multiplié par 3, donne 2 : $3\times\frac{2}{3}=2$.

Si on avait $\frac{2}{3}=\frac{2+4}{3+4}$, la fraction $\frac{6}{7}$ serait également solution de l'équation $3x = 2$.

Or $3\times\frac{6}{7}=\frac{18}{7}=\frac{14}{7}+\frac{4}{7}=2+\frac{4}{7}$ mais $2+\frac{4}{7}>2$!

3. En utilisant la « fraction proportion ». Si, dans une assemblée de 25 personnes, il y a 17 femmes, la proportion de femmes est $\frac{17}{25}$. Si une femme *de plus* arrive, la proportion de femmes est plus grande, donc : $\frac{17}{25}<\frac{17+1}{25+1}$. De façon générale, quand on ajoute un même nombre n aux deux termes d'une fraction $\frac{a}{b}$:

- si elle est inférieure à 1, elle augmente et se rapproche de 1 à mesure que n augmente ;
  en effet, $1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}$ et $1-\frac{a+n}{b+n}=\frac{b-a}{b+n}$ et $\frac{b-a}{b+n}<\frac{b-a}{b}$;
- si elle est supérieure à 1, elle diminue et se rapproche aussi de 1 à mesure que n augmente.

4. À partir de la classe de Quatrième, l'enseignant peut utiliser **l'égalité des produits en croix** :

si on avait $\frac{2}{3}=\frac{2+5}{3+5}$, on aurait $\frac{2}{3}=\frac{7}{8}$, donc on aurait : $2 \times 8 = 3 \times 7$!

5. A partir de la troisième, l'enseignant peut passer au **cadre géométrique**[7].

Dire que $\frac{3}{5}=\frac{3+2}{5+2}=\frac{5}{7}$ revient à dire qu'on peut agrandir le rectangle ABCD en ajoutant une bande de largeur 2 sans changer le rapport entre ses dimensions.

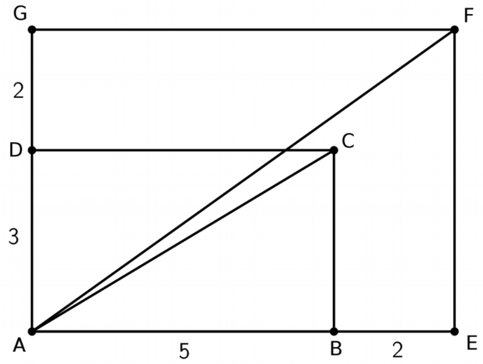


Figure 14. *La fraction pour agrandir*

Si les quotients étaient égaux, les points A, C et F seraient alignés. Le rectangle AEFG serait un agrandissement du rectangle ABCD. Or, $\tan \widehat{BAC}=\frac{3}{5}$ et $\tan \widehat{EAF}=\frac{5}{7}$, donc $\widehat{BAC} \approx 31°$ et $\widehat{EAF} \approx 36°$.

II.2 Comment remédier aux erreurs $(a+b)^2=a^2+b^2$ et $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$?

Voici quelques propositions.

1. Donner un contre-exemple.

$(2+3)^2 \neq 2^2+3^2$; $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$ et $\sqrt{(9+16)}=5$ donc $\sqrt{9}+\sqrt{16} \neq \sqrt{(9+16)}$

Même si ceci aide l'élève à prendre conscience que $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$ et $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$, c'est rarement suffisant.

2. Faire construire un tableau, éventuellement à l'aide d'un tableur, en prenant plusieurs valeurs pour a et b, éventuellement en prenant des valeurs positives et négatives dans le premier cas. Selon l'erreur traitée, les élèves comparent les résultats dans les deux colonnes $(a+b)^2$ et a^2+b^2 , ou dans les deux colonnes $\sqrt{(a+b)}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Tous les élèves, même ceux qui n'ont pas fait d'erreur, pourront alors faire des conjectures et les démontrer algébriquement au collège pour la première erreur et au lycée autant pour la première que pour la seconde.

Dans les deux cas, l'égalité ne se produit que si *a* ou *b* sont nuls. Ceci étant « naturellement » exclu :

- si *a* et *b* sont de même signe alors $(a+b)^2 > a^2+b^2$;
- si *a* et *b* sont de signes contraires alors $(a+b)^2 < a^2+b^2$;

Dans le cas des racines carrées , les nombres *a* et *b* sont nécessairement positifs. On peut comparer les carrés des nombres $\sqrt{(a+b)}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et prouver ainsi que :

$$\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

7 Cf. Annie Berté, « Mathématiques dynamiques », Nathan Pédagogie, 1993.

3. Passer au cadre géométrique.

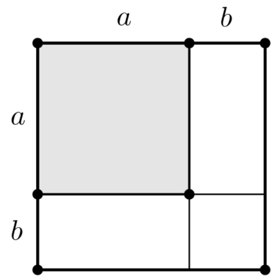


Figure 15. Le carré d'une somme

Ce schéma illustre bien la propriété que l'aire du carré de côté $a+b$ est égale à la somme de l'aire d'un carré de côté a, de l'aire d'un carré de côté b et des aires de deux rectangles de dimensions a et b.
L'inégalité $(a+b)^2 > a^2+b^2$ est également illustrée dans ce cas (a et b positifs).
Cette illustration géométrique présente cependant l'inconvénient de n'utiliser que des nombres a et b positifs.

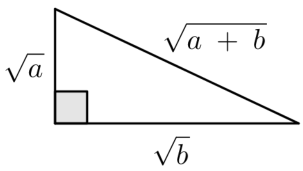


Figure 16. La racine carré ne peut être additive

On donne le triangle rectangle ci-contre dont les côtés de l'angle droit mesurent $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.
D'après le théorème de Pythagore, l'hypoténuse mesure $\sqrt{(a+b)}$ et l'inégalité triangulaire permet d'écrire $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Au collège, ce changement de cadre permet de prouver cette inégalité et de la retrouver au lycée si on l'a déjà démontrée de manière algébrique.

II.3 Comment remédier à l'erreur sur les hauteurs ?

Nous proposons une piste pour la traiter dans l'immédiat.
Tout d'abord pour faire comprendre que les objets de la géométrie sont des concepts et non des objets matériels et que les dessins que nous en faisons sur le papier ne sont que des représentations de ces objets et non les objets eux-mêmes, nous utilisons le tableau de Magritte intitulé *La trahison des images* et dans lequel il est écrit : « Ceci n'est pas une pipe ». Les élèves arrivent à dire qu'il s'agit effectivement non de l'objet mais de sa représentation. On ne peut rien prouver en regardant un dessin, on peut seulement conjecturer.
Ensuite l'enseignant montre deux triangles représentés sur un carton, dont les côtés mesurent une vingtaine de centimètres ; l'un a tous ses angles aigus, l'autre a un angle obtus ; il a percé les sommets et y a attaché des ficelles type ficelle de cuisine, auxquelles il a accroché des pinces à linge.
Il met un premier côté horizontal et, avec un crayon, suit la ficelle qui, telle un fil à plomb, se place suivant la hauteur. Puis il change la position du triangle en mettant tour à tour chacun des deux autres côtés à l'horizontale.
Dans le cas des trois angles aigus, il peut ainsi tracer les trois hauteurs à l'intérieur du triangle.

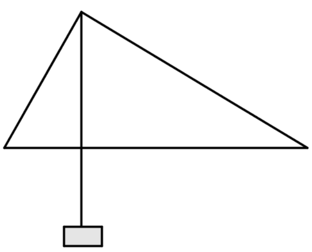
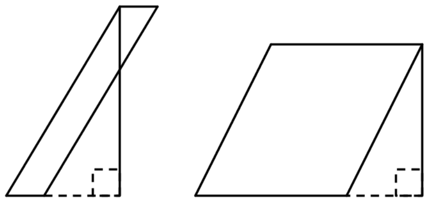


Figure 17. Hauteur comme fil à plomb

Dans le cas d'un angle obtus, on voit deux hauteurs à l'extérieur du triangle. L'enseignant peut les tracer également si le carton est assez grand. Cette expérience permet alors de visualiser le fait que les hauteurs sont concourantes. La conjecture est suivie de la démonstration.



La difficulté des hauteurs extérieures peut se présenter aussi dans le cas d'un parallélogramme comme le montre le dessin ci-contre.

Figure 18. *Les hauteurs dans un parallélogramme*

Les élèves peuvent faire un amalgame entre la hauteur en géométrie et celle d'un bâtiment (pyramide, Tour Eiffel). L'enseignant peut en profiter pour faire la distinction entre la hauteur d'un bâtiment ou d'un solide (le parallélépipède rectangle) qui est une *grandeur* et une hauteur d'un triangle qui est un objet géométrique (une droite), mais aussi parfois une grandeur dont on donne la mesure. Cette distinction étant faite, certains élèves peuvent dire que, dans la « réalité », la hauteur d'un bâtiment (au sens géométrique) ne tombe jamais à l'extérieur du bâtiment. Cette réflexion sort souvent, plus encore si l'enseignant a montré les fils à plomb. On peut alors évoquer la hauteur de la tour penchée de Pise.

II.4 Comment remédier à la confusion entre aires et périmètres ?

Les élèves confondent les deux grandeurs, ils calculent le périmètre alors qu'on leur demande l'aire. Ils mélangent les formules du périmètre et de l'aire pour « inventer » des formules fausses, par exemple pour l'aire d'un rectangle $L \times l \times 2$ car le rectangle a deux longueurs et deux largeurs. Ils pensent que l'aire et le périmètre d'une même figure varient toujours dans le même sens.
On pourrait croire que des erreurs provenant de la confusion entre ces deux notions seront évitées si on traite le chapitre des périmètres et celui des aires séparément et de façon éloignée dans le temps au cours de la progression annuelle. L'expérience prouve le contraire et il vaut mieux confronter les deux notions dans une même situation.
Nous avons plusieurs situations pour donner du sens aux deux grandeurs et faire prendre conscience aux élèves de collège de leur erreur s'ils en font l'amalgame.

1. En Sixième[e], nous utilisons une situation empruntée à Régine Douady (1984) : les élèves découpent deux rectangles superposables en papier. Ils laissent l'un intact et partagent l'autre en 5 ou 6 morceaux triangulaires qu'ils recollent sur un carton de façon à reconstituer une surface connexe polygonale dont le bord est très découpé. L'enseignant les conduit à énoncer que le rectangle témoin initial et ce polygone ont bien la même aire et leur demande de prévoir la longueur de la ficelle nécessaire pour entourer le polygone. Pour éviter de mesurer les nombreux côtés de la nouvelle surface, ils calculent le périmètre du rectangle initial pensant que le périmètre n'a pas changé. La ficelle est trop courte.

2. Un autre problème consiste à donner un triangle tracé sur une feuille et demander de construire une figure qui a le même périmètre que ce triangle mais une aire plus petite.
Élèves et adultes trouvent le problème difficile car ils s'imposent le plus souvent de tracer un autre triangle, alors qu'il suffit par exemple de construire une figure en enlevant « un bout » de la surface du triangle tout en lui donnant le même périmètre, telle celle non convexe obtenue par exemple ci-contre :ABCDE.

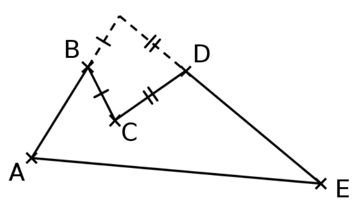


Figure 19. *Même périmètre mais aires différentes*

Du fait de la contrainte qu'ils s'imposent de tracer un triangle, certains élèves font alors une erreur en traçant un triangle à l'intérieur du triangle donné pour avoir une aire plus petite, mais très près du bord affirmant qu'ainsi le périmètre est le même.

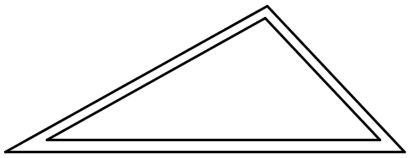


Figure 20*. Tentative pour conserver le périmètre du triangle*

S'imposer des contraintes qui ne sont pas dans l'énoncé est une des causes de l'erreur. Cette cause entre-t-elle dans notre classification ? Peut-on dire que c'est une difficulté due à l'interprétation du contrat didactique, dans la mesure où l'élève s'impose une règle croyant qu'on s'attend à ce qu'il la suive. Cet élément du contrat est-il ici spécifiquement didactique ? En fait, ce qui nous intéresse n'est pas cet élément extérieur qui a déclenché l'erreur des élèves, mais la cause profonde de l'erreur qui, elle, provient d'un obstacle d'ordre épistémologique : deux cercles de même centre O ont le même périmètre s'ils sont proches l'un de l'autre, car « ils ont autant de points ».
En effet, il existe une bijection facile à imaginer entre les ensembles de points de deux cercles. Pour tout point M de l'un, le rayon OM coupe l'autre en M', son image. La bijection est évidente sans besoin de la formaliser, d'où l'idée d'égalité des longueurs.

C'est la même bijection d'homothétie qui existe entre les deux triangles tracés par les élèves, le centre d'homothétie étant cette fois le point de concours des bissectrices communes des deux triangles, si on perçoit la bande du pourtour de largeur constante.

Il est toujours surprenant de découvrir qu'il existe une bijection entre deux segments de longueur différentes (on réalise une homothétie par exemple) ou que la fonction tangente fournit une bijection entre l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$ tout entier. Nous avons abondamment développé le traitement de ce problème dans notre brochure sur les fonctions avec les situations : « Rectangles de même périmètre » et « Rectangles de même aire ». (IREM d'aquitaine 2012)

Conclusion

Le plus important à retenir de notre propos est le fait que si une erreur est vraiment tenace, elle a généralement plusieurs causes qui se renforcent l'une l'autre.
Dans cet article, nous n'avons pas pu mentionner toutes les erreurs dont les causes peuvent se placer dans le triangle didactique qui a servi de base à notre classement. Nous laissons le soin au lecteur de le faire, cela lui permettra de mieux comprendre les erreurs de ses propres élèves, de trouver des pistes de remédiation ou d'anticiper en proposant des situations leur permettant de se confronter aux difficultés en classe.

Nous avons peu parlé des erreurs en algèbre, notamment en calcul littéral, car cela demanderait un trop long développement pour cet article. Nous renvoyons le lecteur à nos publications sur les entrées dans l'algèbre en Sixième et Cinquième (IREM d'Aquitaine 2007).

Certaines erreurs dont nous n'avons pas parlé échappent-elles à cette grille d'analyse ? Après un éventuel moment de doute, et s'il s'agit vraiment d'une erreur significative,

l'enseignant pourra presque toujours se rendre compte, comme nous avons pu le voir dans notre exemple 16 relatif justement à l'algèbre, qu'une – au moins – des causes de l'erreur y trouve sa place.
Les enseignants peuvent ainsi réfléchir aux différentes causes d'erreurs, car les élèves écrivent rarement « n'importe quoi », en ne perdant pas de vue toutefois que les explications trouvées ne sont souvent que des hypothèses. Elles seront d'autant plus précises que nous aurons pu écouter les élèves parler de leur travail, défendre leur point de vue en classe, échanger avec leurs camarades. Les échanges entre élèves et avec l'enseignant ne peuvent exister sans un climat de confiance qu'il appartient d'instaurer par une gestion de la classe qui le rend possible.

Pour que l'enseignant puisse prendre en compte les erreurs, il faut que les élèves produisent eux-mêmes des mathématiques en classe, pendant le temps de l'apprentissage. Les séquences d'enseignement sont organisées de façon à ce que les élèves cherchent des problèmes, car l'erreur se produit alors devant l'enseignant qui peut la repérer plus facilement et éventuellement la traiter dans l'instant. Le traitement de certaines erreurs peut être renvoyé à la séance suivante et faire l'objet d'une situation spécifique. Le temps de recherche des problèmes en classe doit être suffisant pour permettre aux élèves de produire des solutions écrites. En se déplaçant dans la classe, l'enseignant prend connaissance des travaux des élèves. Il peut intervenir en demandant à l'élève comment il a raisonné, ou encore relever un travail pour le soumettre à la critique de toute la classe sans que ce soit une source de moquerie ou de réprimande. Les élèves peuvent aller écrire leurs résultats au tableau, les autres élèves peuvent les corriger, l'enseignant peut en photocopier pour les exploiter.

Ce sont des situations d'enseignement bien étudiées qui peuvent permettre d'arriver à ce résultat. Elles permettent d'anticiper les erreurs probables, les différentes stratégies possibles et de prévoir les remédiations correspondantes.

Bibliographie

ANSELMO, BONNET, COLONNA, COMBIER, (1999) *La sixième entre fractions et décimaux.* IREM de LYON

ARTIGUE M. (1990) Épistémologie et didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* 10/2.3, 241- 286, La Pensée sauvage éditions.

BERTÉ A., LAFOURCADE J. (1992), Les erreurs des élèves, *document pour la formation des PLC2, IUFM d'Aquitaine, Bordeaux.*

BERTÉ A. (1993),*Mathématiques dynamiques,* Collection Perspectives didactiques, Nathan Pédagogie.

BERTÉ A. (1996) *Mathématiques du collège au lycée,* Collection Perspectives didactiques, Nathan Pédagogie.

BERTHELOT R. et SALIN M-H. (2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie de constat à la géométrie déductive ?, *Petit x*, **56**, 41-54.

BROUSSEAU G. (1998) Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. In G. Brousseau, *Théorie des situations didactiques,* 115-160. Grenoble La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (1981) Problèmes didactiques des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques,* 2/1,

CHARNAY R. (1986) L'erreur dans l'enseignement des mathématiques, extrait de « En mathématiques, peut mieux faire.. », *Rencontre pédagogique, 12, INRP*. Repris par le Ministère de l'Éducation nationale (juin 1989) Analyser les productions des élèves, mettre en œuvre des remédiations, *Mathématiques, 6ème, Annexes Vol. 1*

CHARNAY R. MANTE M. (1990-1991) De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes*, Grand N, 48 , 37-64*

CHEVALLARD Yves (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : L'évolution de la transposition didactique, *Petit x*, **5**, 51-94

DOUADY R.(1984) *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Thèse de doctorat, Université de Paris 7.

ERMEL (1998) *Apprentissages mathématiques en sixième,* Hatier Enseignants

GRENIER D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième,* Thèse de Doctorat Université de Grenoble I

GRENIER D. (2007) *Éléments de cours pour le Master 2* IC2A Didactique des sciences, Université Joseph Fourier, Grenoble.

IREM D'AQUITAINE, Groupe didactique des mathématiques (1996) *La géométrie en 6ème,* Université de Bordeaux 1.

IREM D'AQUITAINE, Groupe didactique des mathématiques (2000) *Géométrie au Cycle central (5ème et 4ème),* Université de Bordeaux 1.

IREM D'AQUITAINE, Groupe didactique des mathématiques (2007) *Entrées dans l'algèbre en 6ème et 5ème*, Université de Bordeaux 1.

IREM D'AQUITAINE, Groupe didactique des mathématiques (2012) *Les fonctions du collège à la seconde,* Université de Bordeaux 1.

IREM D'AQUITAINE, Groupe didactique des mathématiques (2008) Enseigner les nombres relatifs au collège, *Revue Repères IREM,* 73, 59-72.

MOREIRA BALTAR P. (1996 -1997) A propos de l'apprentissage du concept d'aire, *Petit x*, **43**, 43-68.

PERRIN-GLORIAN M-J (1989-1990) L'aire et la mesure*, Petit x*, **24**, 5-36.

RODITI E. (2008) La comparaison des nombres décimaux, comprendre les difficultés et aider à les surmonter*, Bulletin de l'APMEP*, 477, 479-483.

PERRIN-GLORIAN M-J, MATHE A-C et LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères IREM*, **90**, 5-41.

VERGNAUD G. (1986) Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, un exemple : les structures additives, *Grand N*, **38**, 21- 40.