DROITES PERPENDICULAIRES AU CM2 : RESTAURATION DE FIGURE ET ACTIVITÉ DES ÉLÈVES

Thomas BARRIER
LML, ESPE Lille Nord de France, Université d'Artois

Christophe HACHE
LDAR, Université Paris Diderot

Anne-Cécile MATHÉ
LML, ESPE Lille Nord de France, Université d'Artois

Le travail que nous présentons ici est le fruit d'une rencontre entre collègues de l'ESPE Lille Nord de France et, en particulier, d'une collaboration avec Stéphanie Montigny, formatrice à temps partagé et professeure des écoles dans une classe de CM2. Il se situe à la croisée de différentes recherches. Il est d'une part fortement influencé par les travaux d'un groupe de recherche du Nord de la France autour de l'enseignement de la géométrie à l'école, coordonné par Marie-Jeanne Perrin-Glorian (Duval & Godin, 2005 ; Keskessa et *al*., 2007 ; Offre et *al*., 2007 ; Perrin-Glorian et *al*., 2013)[1]. L'expérimentation dont sont issues les données analysées dans cet article constitue également un objet de travail du projet LEMME[2], constitué autour de questions liées aux aspects langagiers du processus d'enseignement – apprentissage en classe de mathématiques. Nous proposons dans une première partie d'expliciter les points de départ et ancrages théoriques de notre travail, fruits de l'articulation des positionnements de ces différents groupes de travail. Nous formulons également dans cette même partie nos questions de recherche. La suite du texte est consacrée à la présentation et l'analyse d'un problème de *restauration de figures* mettant en jeu la notion de droites perpendiculaires.

[1] Participent ou ont participé à ce groupe : Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Godeuil, Marc Godin, Bachir Keskessa, Régis Leclercq, Christine Mangiante, Anne-Cécile Mathé, Marie-Jeanne Perrin et Odile Verbaere. Les trois premières références correspondent à des articles parus dans la revue *Grand N* (n°76-77-79) et sont directement et gratuitement téléchargeables depuis le site de la revue.

[2] Langage dans l'Enseignement et l'apprentissage des MathéMatiquEs. Participent à ce projet Thomas Barrier, Caroline Bulf, Aurélie Chesnais, Christophe Hache, Anne-Cécile Mathé et Joris Mithalal.

Points de départ et questions de recherche

Pluralité de regards sur les figures, activités de restauration au cycle 3

Notre approche de l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie au cycle 3 repose notamment sur l'idée selon laquelle les élèves entrent spontanément dans les problèmes géométriques en adoptant une vision des figures en termes de surfaces (juxtapositions et / ou superpositions de surfaces). Or, même si cette vision est importante pour l'appréhension globale des figures, la plupart des concepts géométriques visés au cycle 3 puis au collège s'expriment par des relations entre des lignes et / ou des points (relation d'incidence, alignement, parallélisme, perpendicularité, égalité de longueur de segments, milieu d'un segment, *etc*.). S'approprier ces concepts, les utiliser, nécessite d'être en mesure de faire émerger les sous-éléments des figures qui sont en relation, sous-éléments de dimension 2 (des surfaces, plans, on notera ici « 2D »), de dimension 1 (des lignes, segments ou droites, on notera « 1D »), voire de dimension 0 (des points, on notera « 0D »). C'est l'idée de la *déconstruction dimensionnelle*, Duval et Godin (2005), Perrin-Glorian et *al*. (2013). Depuis plus de dix ans, les travaux du groupe de recherche du Nord de la France sur la géométrie se sont centrés sur l'élaboration de situations pour la classe visant à accompagner les élèves dans cette mobilité du regard sur les figures, vers la construction d'une approche géométrique des figures mobilisant des propriétés et relations diverses (alignement, symétrie axiale, perpendicularité, *etc*.).

Une idée - force est qu'il existe un lien fondamental entre les instruments utilisés dans les tâches géométriques et le regard que l'on porte sur les figures. On peut par exemple utiliser des « instruments 2D » permettant de tracer ou reproduire des surfaces (gabarits de polygones divers, gabarits d'angles, *etc*.) ou des « instruments 1D » permettant de tracer des lignes (la règle par exemple). Bien sûr, il existe aussi un lien direct entre les instruments utilisés et les propriétés géométriques mobilisées. Pour ces raisons, les instruments sont considérés comme une variable didactique clé dans les problèmes élaborés par ce groupe à destination des classes. Par ailleurs, une autre idée est qu'une approche sans mesure des figures est susceptible de faciliter l'entrée des élèves dans une problématique géométrique. L'utilisation de règles dites « informables », bandes de papier sur lesquelles on peut inscrire des marques pour reporter des longueurs, est alors privilégiée. Enfin, la reproduction de figures est un type de tâche central dans les propositions de ce groupe de recherche.

Ces analyses ont donné lieu à la conception de problèmes dits de *restauration de figures*. Il s'agit de reproduire une figure modèle à partir d'une amorce, à la même échelle ou non. Les élèves ont en général un large choix d'instruments, mais doivent intégrer un système de coûts portant sur leur usage. Pour chaque problème, le choix de l'amorce et le système de coûts sur l'usage des instruments sont choisis au regard des objectifs d'apprentissage, en fonction des relations entre sous-éléments de la figure que l'on souhaite que les élèves utilisent comme outils pour la restauration. Le travail collaboratif mené avec Stéphanie Montigny consistait notamment à expérimenter la mise en œuvre de tels problèmes dans plusieurs séquences de géométrie en CM2. Nous nous concentrons dans cet article sur un problème mettant en jeu la notion de droites perpendiculaires. Il s'agit pour les élèves de la première rencontre avec ce type de problème.

La dimension langagière de l'activité géométrique

Interroger le potentiel didactique des problèmes élaborés nécessite de parvenir à cerner finement l'activité des élèves, c'est-à-dire ce qu'ils font (au sens lage) pour résoudre les problèmes qui leur sont proposés, les connaissances géométriques qu'ils mobilisent et la manière dont ceci évolue au fil de la résolution. Les recherches évoquées ci-dessus s'appuient sur une réflexion concernant les liens qu'entretiennent les actions matérielles (tracés, usage des instruments) avec la manière de voir et de penser les figures géométriques. Cependant, la question de la description de l'activité géométrique des élèves et des conditions susceptibles de la faire évoluer nous semble encore loin d'être réglée. Amener les élèves à modifier leurs manières d'agir sufit-il à permettre les apprentissages en géométrie ? Comment appréhender l'activité géométrique des élèves dans toute sa complexité ? Quelles sont les modalités de son évolution ?

Nos diverses observations en classe, les diverses recherches dans lesquelles nous nous sommes impliqués[3] nous ont amenés à porter une attention particulière au fait qu'il se passe des choses fondamentales, d'un point de vue cognitif, au sein des interactions langagières orales qui se développent autour de la résolution matérielle des activités des élèves en classe de géométrie. Ce constat nous a conduit à analyser les activités géométriques des élèves comme relevant de façon indissociable d'une dimension matérielle (*l'agir*) et d'une dimension langagière (*le parler*), inscrites dans une certaine façon de *penser* le monde, un *agir-parler-penser* au sens de Rebière (2002)[4]. Sur le plan méthodologique, ceci se traduit par la prise en compte de trois types d'observables : ce que les élèves font (les tracés, l'usage des instruments), ce qu'ils disent et ce qu'ils regardent[5]. Nous attirons l'attention du lecteur sur deux points qui nous semblent importants. D'une part, le langage, et en particulier le langage verbal auquel nous attachons une attention particulière, est pour nous constitutif de l'activité géométrique des élèves, au même titre que leurs actions matérielles, plus classiquement analysées en didactique des mathématiques. D'autre part, en cohérence avec les travaux évoqués précédemment, nous veillons aussi à prendre en compte ce que les élèves regardent dans la figure, leurs mouvements oculaires ou encore la dimension ostensive de leurs gestes (par exemple, lorsqu'un élève pointe du doigt).

Nos questions de recherche portent en particulier sur la manière dont ces diférentes facettes s'oganisent au sein d'une unique activité. Dans ce texte, nous utiliserons le terme activité en référence à cette unité de pensée. Précisons que pour nous, réaliser une action matérielle, éventuellement instrumentée, produire des signes verbaux ou graphiques ou porter un regard particulier sur une figure relèvent d'un acte de pensée générateur de significations. Une dificulté que nous nous eforçons d'explorer consiste à saisir cette cohérence, pour un élève donné, à un moment donné. Nous reprenons ici une problématique formulée par Radford autour de la notion de « cognition sensible » (*sensuous cognition*) :

> *D'un point de vue méthodologique, le problème est de comprendre comment les divers canaux sensitifs et signes sémiotiques (linguistique, symboles écrits, diagrammes, etc.) sont*

[3] Voir notamment Barrier et *al*. (sous presse) ; Bulf et *al*. (sous presse) ; Mathé (2012).

[4] Voir aussi Jaubert et *al*. (2012).

[5] Cet aspect est développé dans Barrier & *al*. (sous presse).

mis en relation, coordonnés, et subsumés dans une nouvelle unité de pensée, une nouvelle unité psychologique. (Radford, 2013, p. 65, notre traduction de l'anglais)

À terme, un autre enjeu de la recherche dans laquelle s'inscrit le travail présenté dans cet article est de parvenir à mieux comprendre la manière dont l'*agir-parler-penser* des élèves est susceptible d'évoluer, lorsque ceux-ci sont confrontés à des problèmes géométriques. Il s'agit de nous donner les moyens de décrire le processus d'apprentissage, processus que nous analysons comme l'évolution de l'activité de l'élève vers une pratique donnée (un *agir-penser-parler* socialement partagé), comme une acculturation vers une pratique géométrique spécifique. Pour nous, cette acculturation s'opère à la fois par des interactions avec une situation problématique, mais également au sein des interactions sociales dans la classe (entre élèves ou avec l'enseignant). En somme, ce travail s'inscrit dans une étude plus large qui vise à explorer la manière dont les dimensions matérielles, langagière et visuelle de l'activité géométrique des élèves interagissent pour évoluer vers des pratiques géométriques scolaires conformes aux objectifs d'apprentissage visés par l'enseignant.

Analyse logique des concepts mathématiques

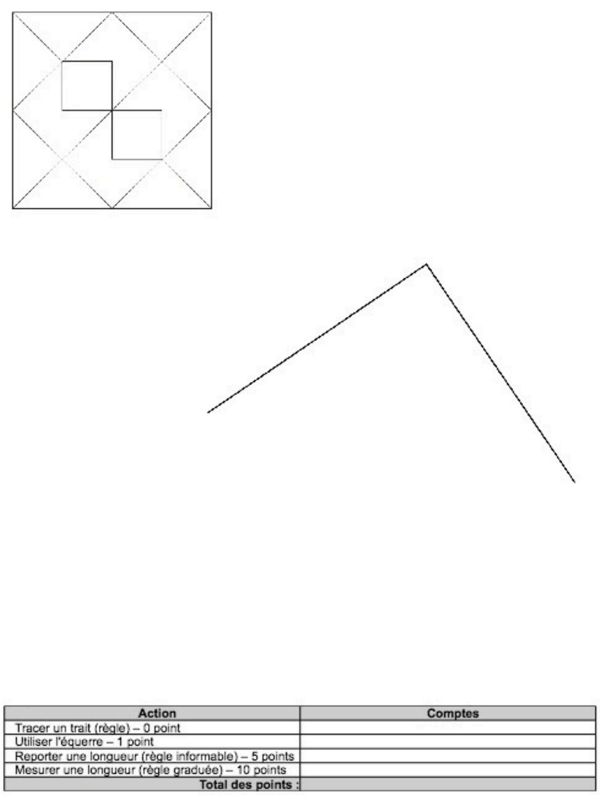
Nous avons vu ci-dessus que le concept de déconstruction dimensionnelle permettait d'éclairer la façon dont l'élève « voit » la figure, notamment la dimension (dimension 0, 1, 2) des objets qu'il identifie, qu'il manipule (intellectuellement et éventuellement matériellement). Dans le prolongement des travaux de Durand-Guerrier (2013), nous complétons cette approche par une analyse logique des concepts mathématiques en jeu, en l'occurrence ici ceux d'angles droits et de droites perpendiculaires.

À l'école, l'angle droit est le plus souvent implicitement introduit comme un secteur angulaire particulier, c'est-à-dire un élément de surface vérifiant une propriété spécifique. Vérifier si un angle est droit consiste, par exemple, dans de nombreuses tâches, à vérifier si un gabarit d'angle droit donné (équerre ou autre) se superpose ou non avec le secteur angulaire concerné. En cas de superposition, l'objet secteur angulaire est qualifié d'angle droit. Sur le plan logique, on dira que le prédicat "être droit" s'applique à l'objet considéré, le concept d'angle droit s'analyse alors comme une propriété d'objet 2D. Le concept de droites perpendiculaires met en jeu des objets différents en nature et en nombre. Percevoir une perpendicularité nécessite l'identification d'une relation particulière entre deux objets rectilignes. Le concept de droites perpendiculaires s'analyse donc comme une relation binaire entre deux objets 1D. Cette distinction élémentaire, mais pour nous fondamentale, permet de se doter d'un arrière-plan unificateur dans l'analyse des trois dimensions retenues pour la description de l'activité géométrique des élèves. Ces objets (secteur angulaire, droites) peuvent en effet aussi bien être des références extralinguistiques pour certains termes du langage utilisés que des points d'appui à la fois théoriques et matériels pour la dimension instrumentée de l'activité des élèves ou encore des cibles pour le regard géométrique. Cette analyse logique nous renseigne notamment sur le nombre et la nature des objets susceptibles d'intervenir lors de la mobilisation des concepts mathématiques, en fonction des propriétés et relations mises en jeu. Du point de vue de la description de l'activité géométrique des élèves ou de l'enseignant, l'analyse logique nous procure des outils pour caractériser les objets manipulés par les élèves, que cela soit dans leurs usages des instruments, dans leurs discours, dans leurs gestes.

Le problème de restauration de figure mise en œuvre en classe

Le problème de restauration de figure qui va faire l'objet de nos analyses est issu de la deuxième séance d'une séquence portant sur les droites perpendiculaires, conçue en collaboration avec l'enseignante et en comprenant quatre. Dans la première séance, la tâche des élèves était de tracer la droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné. Nous avons repris une idée de l'ouvrage ERMEL Géométrie Cycle 3 (ERMEL, 2006, pp. 221-229) qui consiste à faire varier les positions relatives du point et de la droite donnés de manière à rendre nécessaire certains prolongements (de la représentation de la droite ou encore des côtés du gabarit d'angle droit). Cette séance est décrite avec plus de précision dans Barrier et *al*. (sous presse). Dans la deuxième séance, séance à laquelle nous nous intéressons ici, l'identification et le tracé des droites perpendiculaires sont des outils au service d'un problème de restauration de figure. Nous présentons ce problème plus en détail dans la suite du paragraphe. Les troisièmes et quatrièmes séances de la séquence constituent un réinvestissement des connaissances construites autour de ce problème de restauration de figure, en appui sur la résolution d'autres problèmes de restauration.

Présentation du problème de restauration


Nom, Prénom : .... Classe : ....

Date :...................................

Figure 1

Action	Comptes
Tracer un trait (règle) – 0 point	
Utiliser l'équerre – 1 point	
Reporter une longueur (règle informable) – 5 points	
Mesurer une longueur (règle graduée) – 10 points	
Total des points :	

Figure n°1 : Fiche élève

La fiche ci-dessus est distribuée aux élèves (Figure n°1)[6]. La consigne, formulée oralement, est la suivante :

> *Vous avez ici une figure, vous allez devoir reproduire cette figure à partir des deux côtés du carré tracés en dessous. Mais il y a une règle du jeu particulière. Aujourd'hui, il va y avoir un coût sur l'utilisation des instruments. C'est-à-dire que ça va vous coûter des points. Le but du jeu c'est d'avoir le moins de points possible. (...).*

Le fonctionnement des coûts de l'utilisation des instruments est ensuite présenté par l'enseignante. Les élèves ont à leur disposition une règle informable (voir supra, ils connaissent déjà cet outil), une équerre, une règle graduée et une bande de papier (susceptible d'être pliée). Le système de coûts est précisé sur la fiche élève (Figure n°1)[7]. Précisons également que, sur la figure modèle, utiliser un instrument, quel qu'il soit, est gratuit. Après présentation du problème et formulation de la consigne, le déroulement de la séance articule deux phases de recherche individuelle et deux phases de mise en commun. Au terme d'une première phase de recherche, les élèves valident leurs productions par superposition avec une version sur papier calque de la figure attendue mise à disposition par l'enseignante. La première mise en commun porte sur les réussites et échecs dans la tâche de restauration, les procédures utilisées et leur coût, et sur l'importance de bien analyser la figure modèle. Elle fait notamment apparaître des écarts importants dans les déclarations des élèves concernant le nombre de points utilisés : de moins de 10 points à plus de 100. Ce phénomène sert de ressort pour lancer une nouvelle phase de recherche en invitant chaque élève à essayer d'améliorer sa stratégie de façon à la rendre plus « économique ». À l'issue de cette deuxième phase de recherche, une nouvelle mise en commun est orchestrée par l'enseignante. Les propriétés géométriques de la figure modèle sont mises en évidence, notamment les propriétés de perpendicularité, en lien avec une procédure de restauration « économique » (en 4 points).

Nous proposons de détailler, dans l'analyse *a priori* qui suit, les enjeux de ce problème ainsi que les différentes procédures envisageables, en les mettant en lien avec les connaissances géométriques mobilisées.

Analyse *a priori*, enjeux du problème

La figure modèle, l'amorce, ainsi que le système de coûts sur l'usage des instruments sont choisis dans le but d'amener les élèves à mobiliser des relations d'incidence (concevoir un point comme l'intersection de deux droites), d'alignement ou d'appartenance (par exemple tel segment est sur telle droite), et tout particulièrement des relations de perpendicularité entre droites. La figure modèle est donc construite sur un réseau riche en droites perpendiculaires (Figure n°2 ci-après). L'amorce induit un changement d'échelle, empêchant ainsi les reports de longueur de la figure modèle vers la figure à construire. La position oblique de l'amorce vise à mettre l'accent sur les relations entre sous-éléments d'une même figure : les élèves ne peuvent s'aider ni de l'orientation des bords de la feuille, ni de celle de la figure modèle. Le système de coûts a été choisi afin de favoriser d'une part

[6] Ce problème de restauration est élaboré autour d'une figure extraite de IREM de Lille (2000).

[7] Ce système de coûts compte un certain nombre d'implicites, étant donnée la multiplicité des rôles possibles pour un même outil. Par exemple, l'usage de la bande de papier susceptible d'être pliée relève du report de longueur et coûte donc 5 pt, utiliser la graduation de l'équerre pour mesurer une longueur coûte bien 10 pt, *etc*. Ces implicites seront à l'origine de certaines difficultés dans le calcul des coûts, et de débats.

le tracé de droites (gratuit), notamment pour matérialiser les relations d'incidence ou d'alignement, et d'autre part le tracé de droites perpendiculaires *via* l'utilisation de l'équerre (1 point), conformément aux objectifs d'apprentissage de la séance. Par contre, le coût du report de longueurs, à l'aide de la règle informable ou par l'intermédiaire d'une mesure, est choisi pour être dissuasif (5 ou 10 points). Dans ce problème, il est en effet possible de réaliser une restauration sans aucun recours à ce type de reports. La procédure attendue à ce niveau nécessite 4 points[8]. Il s'agit d'utiliser deux fois l'équerre pour « fermer » le carré, puis de construire les milieux de deux côtés consécutifs du grand carré comme point d'intersection en traçant, à l'aide de l'équerre, la perpendiculaire à chacun de ces côtés passant par le centre du carré. Le reste de la construction se fait à l'aide de la règle non graduée uniquement, en utilisant des propriétés d'alignement. Nous avons néanmoins fait le choix de laisser à disposition des élèves une règle graduée afin de ne pas trop les déstabiliser, leur laissant dans un premier temps la possibilité de recourir à des mesures, par exemple pour positionner les milieux des côtés du « grand » carré[9].

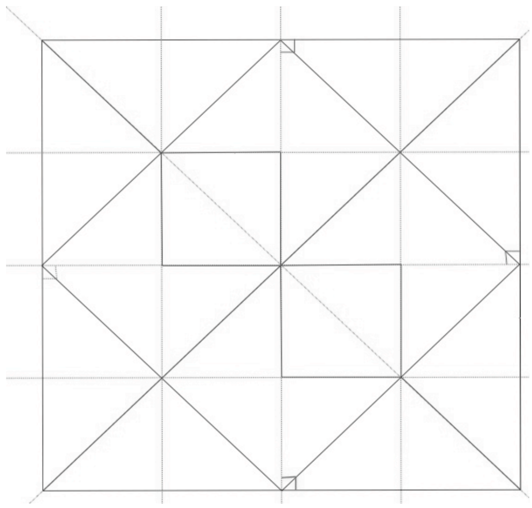


Figure n°2 : Le réseau de perpendiculaires de la figure modèle

Nous choisissons, dans la suite de cette analyse *a priori*, de nous attacher plus particulièrement à trois moments clefs de la restauration : la « fermeture » du grand carré, le tracé des sommets du carré « moyen » et, plus globalement, la décomposition de la figure. Ces trois points ne correspondent pas nécessairement à des étapes à effectuer dans un ordre chronologique mais à des moments qui nous semblent particulièrement intéressants en termes d'enjeux d'apprentissage.

Fermer « le grand carré »

Dès le début de la séance, le quadrilatère extérieur de la figure est présenté comme un carré, les deux segments de l'amorce étant donnés comme deux côtés du grand carré. Nous nous intéressons ici aux procédures consistant à tracer les côtés manquants de ce

---

[8] Signalons qu'il existe des solutions en seulement 2 points.

[9] Cette procédure est particulièrement prégnante, voir Barrier et *al.* (2012) pour un exemple en 6ème.

grand carré, à partir des deux côtés donnés.[10] Soulignons que ce moment n'est pas nécessairement premier.

Une vision de la figure en termes de surfaces peut amener les élèves à vouloir tracer l'angle droit manquant, vu comme un coin du quadrilatère à compléter, en positionnant l'équerre une seule fois, de façon perceptive, à l'endroit supposé de ce coin (Figure n°3). Il est probable que cette construction soit invalidée par l'utilisation du calque ou de l'équerre placée sur un des angles problématiques du carré ainsi tracé.

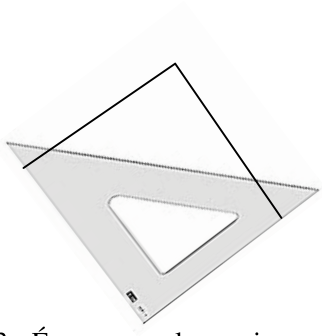


Figure n°3 : Équerre sur le « coin manquant »

Il est aussi possible de fermer le carré en traçant un segment perpendiculaire à un des côtés déjà tracés et en faisant en sorte, à l'aide de la règle graduée, que le segment tracé ait même longueur que les côtés du carré donnés (Figure n°4). Il suffit alors de relier les deux sommets libres (on peut imaginer un élève traçant le quatrième côté avec le bord de l'équerre, s'assurant au passage, du fait que le dernier angle est bien droit). Le recours à la mesure, pour savoir « où s'arrête » le trait que l'on trace, peut être rattaché à une vision en termes de surface et de coins. On peut penser qu'il s'agit encore une fois, pour l'élève, de fermer la surface « carré » en en reconstituant les bords. Ce procédé de construction pourra être remis en question pour son coût.

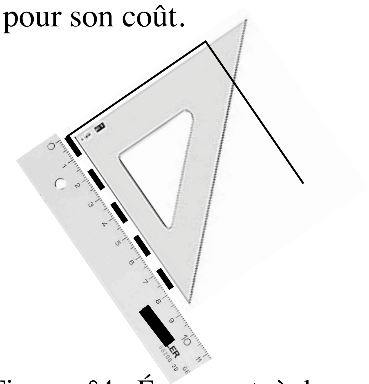


Figure n°4 : Équerre et règle graduée

Pour fermer le carré, une procédure plus économique consiste à utiliser deux fois l'équerre. Il s'agit alors de tracer deux droites perpendiculaires aux deux côtés donnés, passant par les extrémités « libres », à l'aide de l'équerre (Figure n°5). Le quatrième sommet du carré est ensuite construit comme une intersection de droites (des traits dont on ne se préoccupe pas de « où ils s'arrêtent »). La surface « carré » n'est alors plus seulement vue comme

[10] Notons que l'on pourrait envisager des procédures de restauration qui permettraient de construire le sommet manquant du grand carré en utilisant d'autres éléments de la figure que les côtés de ce carré (ses diagonales par exemple). Nous n'évoquerons pas ici ces procédures, qui nous paraissent trop éloignées des pratiques d'élèves de cycle 3.

une forme globale ayant des angles droits, mais aussi comme un réseau de droites perpendiculaires.

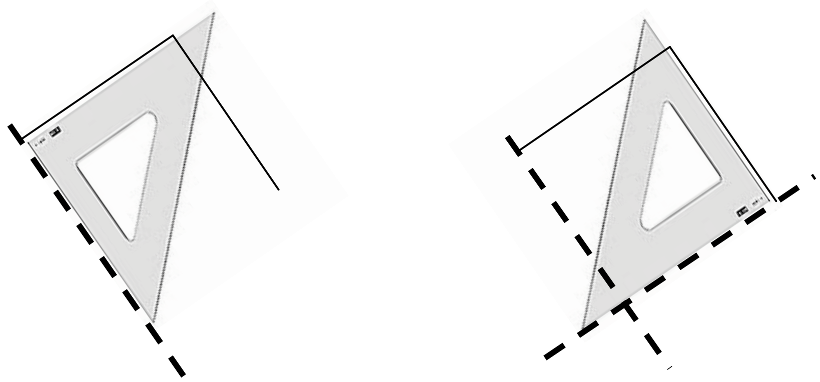


Figure n°5 : Procédure en 2 points

Différents regards sur le carré, en termes de surface ou (réseau) de droites, peuvent donc être mobilisés par les élèves et donner lieu à différentes procédures instrumentées de construction. Cette rapide analyse montre dans quelle mesure le système de coûts sur l'usage des instruments incite les élèves à se dégager du recours à la mesure, et les accompagne ainsi vers une première modification, un enrichissement de leur regard sur l'objet géométrique « carré » en jeu. Il s'agit pour nous d'un premier enjeu d'apprentissage de la situation, lié à la notion de droites perpendiculaires. Conformément à l'approche théorique esquissée plus haut, il nous semble important d'évoquer dans cette analyse *a priori* portant jusqu'ici sur les rapports entre *regard* et *tracé instrumenté* par la prise en compte d'une dimension langagière. Ces mêmes (réseaux de) points, segments, droites, petits et grands carrés, qui peuvent être perçus (vus ou encore pointés du doigt) ou faire l'objet de tracés, peuvent aussi faire l'objet de verbalisation. Néanmoins, rien ne garantit *a priori* que les différents aspects de l'activité des élèves que nous retenons ici soient nécessairement convergents, au sens où les élèves mobiliseraient les mêmes objets, en nombre et en nature, pour chacun d'entre eux. Nous veillerons donc également à identifier les objets et relations convoqués par les élèves dans leurs discours, lors de la verbalisation de leurs procédures. Nous nous attacherons en particulier à saisir la référence des unités linguistiques par lesquels les élèves désignent les objets à construire pour fermer le carré (coin d'un quadrilatère, point d'intersection, *etc*.).

Tracer « les quatre sommets du carré moyen »

Construire le « carré moyen » nécessite d'identifier les positions relatives du carré moyen et du grand carré. Comme rien n'est dit à ce sujet dans l'énoncé, on peut penser que les élèves reconnaîtront de manière perceptive que les sommets du carré moyen sont les milieux des côtés du grand carré. Une vérification sur la figure modèle par la mesure ou le pliage est possible. La construction usuelle des milieux en classe utilise la règle graduée (mesure, calcul de la moitié et report de cette nouvelle longueur à l'aide de sa mesure). De façon moins coûteuse, on peut également envisager de construire ces milieux avec la bande de papier (reports de longueur, pliage et report de cette nouvelle longueur). Une procédure plus économique encore (avec le système de coût mis en place) consiste, une fois les deux diagonales tracées, à construire les milieux des côtés du grand carré avec l'équerre, comme intersections des côtés du grand carré avec les droites perpendiculaires à ces côtés et passant par le centre du carré (ces droites sont les médianes du carré).

Les contraintes posées sur l'usage des instruments et l'organisation du déroulement de la séance (alternance de phase de recherche et de mise en commun) visent à amener progressivement les élèves à enrichir leur regard sur ces sommets à construire. Il s'agit en particulier de parvenir à articuler trois regards sur ces mêmes points, chacun d'entre eux mobilisant divers objets et relations (Figure n°6). Les points à construire peuvent tout d'abord être vus comme les sommets du « carré moyen ». Ici, l'idée de point semble plutôt seconde par rapport à celle de surface (2D). Les relations entre ces sommets et les côtés ou les médianes du grand carré ne sont alors pas considérées. Ces points peuvent aussi être perçus en tant que milieux des côtés du grand carré. Dans ce cas, les points sont appréhendés du point de vue de leur relation avec des lignes particulières (1D). Enfin, ils peuvent être conçus comme des projetés orthogonaux du centre du grand carré sur ses côtés, c'est-à-dire comme point d'intersection entre deux lignes perpendiculaires entre elles (1D). En résumé, le statut de ces objets change (sommet, milieu, intersection) en fonction des composants de la figure qui leur sont associés. Bien sûr, la dernière approche décrite (points d'intersection) est la plus économique à mettre en œuvre.

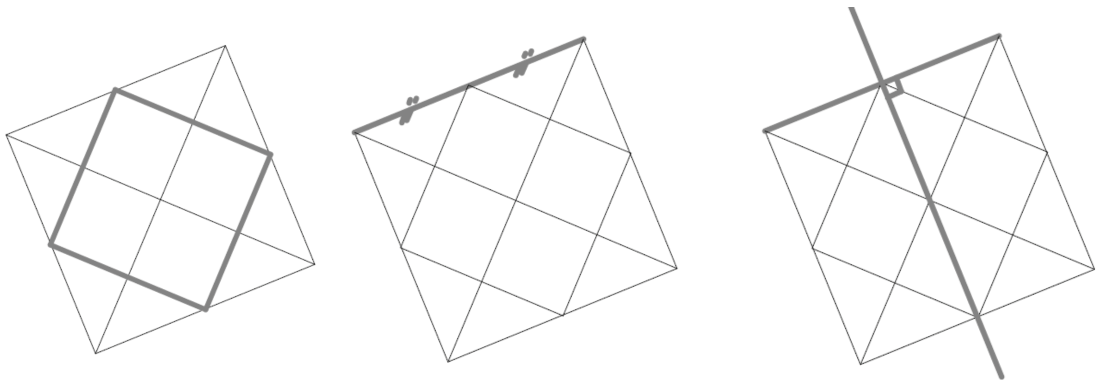


Figure n°6 : Trois regards

Analyse de la figure

D'une manière générale, la tâche de restauration, organisée par le système de coûts sur les instruments, met en jeu plusieurs regards sur la figure, mobilisant alternativement une vision en termes de carrés juxtaposés et superposés, et une vision en termes de réseaux de segments, de droites, de points et de relations entre ces objets. Pour prendre un autre exemple, le tracé des diagonales demande également une analyse de la figure : sur la figure modèle, une des deux diagonales relie effectivement deux sommets opposés du grand carré, mais l'autre n'est présente que sous forme de deux traits disjoints. Voir la diagonale (sous forme de segment joignant les sommets ou sous forme d'une droite portant les deux segments) nécessite de repérer une relation d'alignement entre ces deux éléments. De même, le tracé des deux « petits carrés » avec un coût minimal demande d'identifier certains alignements de leurs côtés. Qu'il s'agisse de mobiliser des relations d'alignement, des relations de perpendicularité ou encore d'incidence, cette tâche repose sur un jeu complexe entre différents regards portant sur les sous-éléments composant la figure. Ces différents regards doivent coexister, dans un mouvement de déconstruction – reconstruction. Il s'agit pour nous d'un enjeu fondamental de l'enseignement de la géométrie à la liaison entre fin d'école primaire et collège (Perrin-Glorian et *al*. 2013).

Nous illustrons cette remarque par un exemple d'exercice classique de fin de collège (Figure n°7).

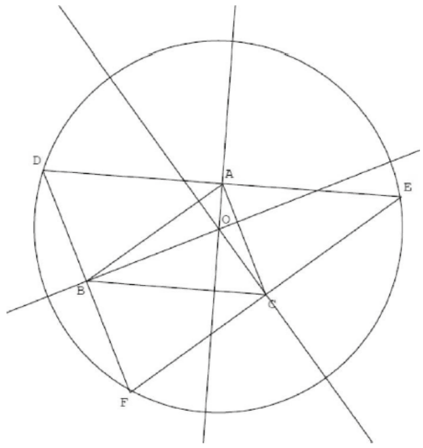


Figure n°7 : Déconstruction - reconstruction

Considérons l'énoncé suivant :

> *Soit ABC un triangle quelconque. On place les points D, E, et F tels que CABF, ABCE et ACBD soient des parallélogrammes. Montrer que les médiatrices du triangle DEF sont les hauteurs du triangle ABC. En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.*

Si l'apprentissage de la démonstration en géométrie ne se limite pas à ce point, il nous semble essentiel de prendre conscience que l'élaboration de la preuve demandée nécessite l'identification de certains sous-éléments 2D, 1D et 0D de cette figure et la mise en œuvre d'un jeu sur les figures englobantes pour les sous-éléments considérés (*via* des mises en relation). La droite (*OA*) est à la fois médiatrice du triangle *DEF* et hauteur du triangle *ABC*. Le point *A* est à la fois un sommet du triangle *ABC*, le milieu d'un côté du triangle *DEF*, le milieu du segment [*DE*] et un sommet du parallélogramme *ABCE* (ou *ACBD*). Ces regards sont mathématiquement en partie redondants, ils sont complémentaires et tous nécessaires pour travailler sur cet exercice. Du point de vue langagier, il semble clair que ces remarques portant sur la vision de la figure pourraient être transposées en termes d'aptitude à verbaliser (à l'oral comme à l'écrit) à propos de ces différents éléments et de leurs relations.

Éléments d'analyse du déroulement

La séance a été observée et filmée par deux expérimentateurs. Nos questions de recherche portant essentiellement sur l'activité des élèves, nous nous sommes efforcés de recueillir le maximum de traces de ces activités au cours de chaque phase de travail, les expérimentateurs n'hésitant pas à demander parfois à certains élèves d'expliciter la procédure qu'ils venaient de mettre en œuvre. Nos analyses du déroulement de la séance s'appuient sur ces vidéos, notamment pour observer les mouvements et gestes des élèves et de l'enseignante, ainsi que sur leur transcription, pour une analyse plus fine des interactions verbales. En faisant appel à une analyse des aspects matériels, verbaux et gestuels de l'activité des élèves, elles visent à identifier leurs manières d'*agir-penser-parler* spontanées, en lien avec les possibles dégagés lors de l'analyse *a priori*, ainsi que leur évolution, en interaction avec la situation et avec l'enseignante.

La séance dure environ 1h15. Elle se découpe en plusieurs moments. La mise en place dure 6 minutes : distribution des feuilles, du matériel, explication de la tâche et du système des coûts. La première phase de travail individuel dure 28 minutes. Au début de cette phase, l'enseignante répond encore à quelques questions techniques, parfois en s'adressant à la classe entière, parfois à quelques élèves de manière individuelle (rappelons qu'il s'agit de la première rencontre des élèves avec ce genre de problème de restauration). En fin de phase, elle distribue les calques pour validation. La première mise en commun dure 13 minutes. L'enseignante orchestre les tours de parole, sollicite des passages ponctuels d'élèves au tableau, *etc*. La séance se poursuit par une seconde phase travail individuel (12 minutes) suivi d'une nouvelle mise en commun au cours de laquelle un élève ayant trouvé une procédure en 4 points est sollicité pour présenter sa procédure (construction au tableau et échanges avec la classe durant 8 minutes). Il s'ensuit un retour collectif sur quelques autres propositions d'élèves (2 minutes) puis la séance se termine (aparté sur quelques productions individuelles suite à des questions, rangement du matériel, retour au calme).

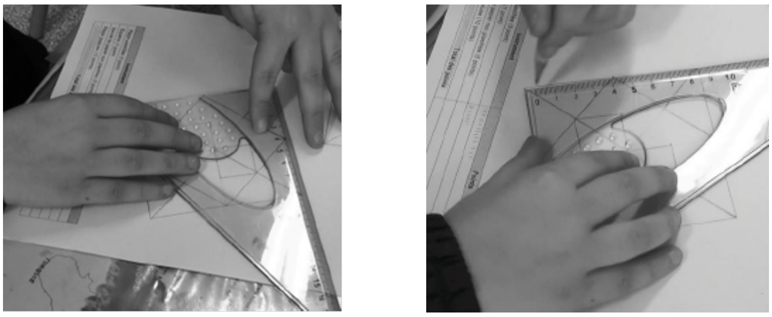
Pour des questions de place, nous proposons de nous restreindre à quelques épisodes : une procédure spontanée d'un premier élève, certains aspects de la phase de mise en commun intermédiaire puis une seconde procédure d'un nouvel élève, postérieure à cette mise en commun. Avant de développer, notons que la succession des analyses qui suit ne peut bien sûr que nous livrer des indices quant à l'évolution de l'activité de quelques élèves. La méthodologie de cette recherche ne permet pas de conclure définitivement sur l'influence de la mise en commun, ou de tel autre aspect de la séance ou de la situation, sur l'activité des élèves ou d'un élève en particulier. Ces précautions étant prises, soulignons néanmoins que notre sentiment, suite à l'observation *in situ* de cette séance et au visionnage des vidéos, est que les extraits sélectionnés sont globalement « significatifs » du travail des élèves.

Une première procédure d'élève (avant mise en commun)

Un élève vient de terminer une première restauration de la figure. Un expérimentateur lui demande d'expliquer sa démarche. L'élève dit d'abord avoir « pris l'équerre pour faire un angle droit dans le coin », il positionne l'équerre à l'endroit supposé du coin du carré manquant (Photo n°1).

Photo n°1 : Équerre dans le coin

Conformément à l'analyse *a priori*, nous interprétons cette entrée en matière (geste de désignation et parole) comme relevant d'une approche en termes de surface. L'angle droit est spontanément perçu comme le coin de la surface à fermer (un objet 2D vérifiant une propriété particulière) en accord avec l'expression employée par l'élève. On pourrait comprendre que l'élève a tracé « le coin manquant » à partir de cette position de l'équerre, mais il ne s'agissait que de préciser son objectif. L'élève explique ensuite avoir tracé successivement deux angles droits, d'abord en partant d'une extrémité d'un des côtés du grand carré donné (Photo n°2), puis en partant de l'extrémité du côté nouvellement tracé (Photo n°3).



Photos n°2 et n°3 : Deux angles droits

Dans son explication l'élève n'évoque pas la nécessité de vérifier la longueur du premier côté tracé (ou que le côté tracé doit « fermer » le carré). Son discours est celui d'une description de procédure, les mots utilisés sont essentiellement centrés sur le matériel et les actions (« équerre », « j'ai assemblé »), il utilise beaucoup de déictiques (« là », « ça », « le coin » en le montrant, « comme ça ») et parle essentiellement en termes de figure globale (« coin », « angle droit »). En somme, il ne semble pas percevoir le sommet manquant comme l'intersection de deux droites, il est en train de construire un carré (ou ses bords) en s'appuyant sur le tracé des coins manquants.

L'élève explique qu'il a ensuite tracé une première diagonale, visible sur la figure modèle (il parle de « trait »), puis la seconde diagonale (« l'autre trait ») afin de s'aider (il précise « pour m'aider à faire les carrés »). On peut donc supposer qu'il perçoit le fait que les deux segments à tracer appartiennent tous deux à cette diagonale, voire que deux sommets de chaque petit carré appartiennent également à cette diagonale. Il trace donc des « traits » sous-jacents à la figure, des traits de construction non nécessairement apparents sur la figure modèle, faisant ainsi apparaître certains sous-éléments et matérialisant par la même occasion des relations entre ces sous-éléments 1D et 0D (ici des relations d'alignement).

Par la suite, l'élève repère de façon perceptive que les sommets du carré « moyen » sont les milieux des côtés du grand carré. Il place ces points en mesurant (« j'ai pris l'équerre quatre fois pour mesurer la moitié là »), puis trace le carré « j'ai mis des points [il pointe le milieu d'un autre côté du grand carré] et je les ai assemblés »). On retrouve donc ici la trace d'un jeu sur ces objets et leurs figures englobantes, entre sommets d'une surface et points définis comme milieux de segments (Photo n°4).

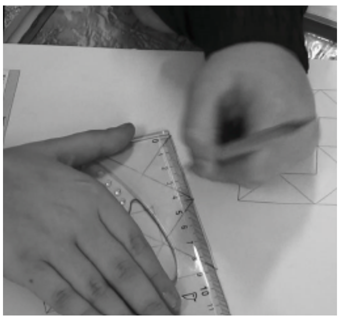


Photo n°4 : Milieu et sommet

Pour tracer les « petits carrés » l'élève a, à nouveau, utilisé la mesure (« j'ai réutilisé l'équerre pour faire la moitié comme ça »). Il positionne alors son équerre, utilisée comme une règle graduée, de façon perceptive, sans s'assurer des angles droits. On peut remarquer, par ce placement de l'équerre, que l'élève ne prend pas en compte le fait que le point obtenu comme intersection d'une diagonale du grand carré avec un côté du carré moyen, appartient à la droite portant le côté du petit carré qu'il est en train de tracer. Cette propriété d'alignement / d'appartenance n'est pas utilisée pour la construction et n'est sans doute pas perçue (Photo n°5).

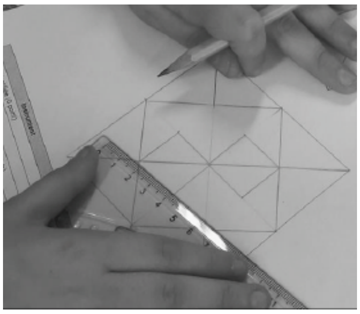


Photo n°5 : Mesure et non-alignement

La procédure de fermeture du grand carré de cet élève repose donc spontanément sur une vision en termes de surface. Celui-ci s'est ensuite montré capable d'une première analyse de la figure modèle lui ayant permis d'identifier que les sommets du carré « moyen » sont aussi les milieux des côtés du grand carré par exemple. Mais, sans doute de façon cohérente à ses habitudes, cet élève a prioritairement eu recours à des procédures de mesure. Cela a également été le cas pour beaucoup d'autres élèves. Ce faisant, ils ne mobilisent pas les relations d'alignement, d'incidence ou encore de perpendicularité (malgré leur caractère économique). Ce premier extrait témoigne cependant du fait que cette situation, en laissant un large panel d'instruments à disposition, permet aux élèves d'entrer librement dans la tâche. Les contraintes posées sur l'action matérielle *via* le coût des instruments, ainsi que la phase intermédiaire de mise en commun, doivent ensuite permettre aux élèves de dépasser ces procédures...

Mise en commun intermédiaire

Après un premier temps de travail individuel d'une petite demi-heure, comprenant un temps au cours duquel les élèves ont pu utiliser un calque pour valider ce qu'ils avaient fait, l'enseignante organise un temps collectif de mise en commun intermédiaire (13 minutes) : « Allez, vous regardez tous au tableau même si vous n'avez pas terminé ». Nous nous centrons ici sur trois moments de cette mise en commun, nous semblant décisifs du point de vue du travail collectif autour de la tâche de restauration.

L'analyse de la figure modèle

L'ensemble de cet épisode est rythmé par des questions de l'enseignante du type « Qu'est-ce qu'il était important de voir dans la figure pour nous aider ? », « Est-ce qu'il y avait d'autres choses sur votre figure qu'il était important de voir qui pourraient nous aider ? ». Elle semble plus vouloir accompagner les élèves dans leur travail d'analyse de la figure modèle qu'aboutir à une procédure partagée. Les élèves répondent de leur place ou sont invités (parfois rapidement) à venir préciser leur point de vue au tableau où figure un agrandissement en A3 de la figure modèle.

Après un premier échange sur les instruments utilisés, et le fait de pouvoir ou non utiliser le coin de la règle informable pour tracer un angle droit, le débat s'oriente vers la figure modèle, et plus particulièrement sur les différents carrés qui la composent (de 1 à 15) :

> *1. Stéphanie : Qu'est-ce qu'il était important… Ouh ouh, Émilie. Euh, Hugo. On discute ensemble là. Qu'est-ce qu'il était important de voir dans la figure pour nous aider ? Émile ?*
>
> *2. Émile : Tous les carrés.* [inaudible] *carré.*
>
> *3. Stéphanie : Alors, tu veux bien venir au tableau. Alors montre.*
>
> *4. Émile : Alors, y avait un grand carré là…* [désigne le contour avec un doigt]
>
> *5. Stéphanie : Oui.*
>
> *6. Émile : Un moyen carré là* [main à plat], *et puis deux petits* [désigne du doigt le centre de chacun des deux carrés].

Comme nous le signalons entre crochets dans le fil de la transcription, le discours d'Émile s'accompagne souvent de gestes larges lui permettant de désigner différents objets, en complément des verbalisations. L'appréhension première de la figure s'opère donc en termes de surfaces juxtaposées et superposées. La restauration de la figure, sans recours à des gabarits de carré, nécessite d'aller plus en avant dans l'identification de ses sous-éléments et de leurs positions relatives. L'analyse de la figure se poursuit par un échange sur les diagonales du grand carré :

> *7. Stéphanie : D'accord. Et est-ce que ça t'aidait à tracer ta figure ?*
>
> *8. Émile : Ben oui parce que là c'est la moitié* [il désigne la diagonale]. *Donc je savais que, que si je traçais ça* [toujours la diagonale], *je pourrais avec l'équerre être plus précis.*
>
> *9. Stéphanie : D'accord. Donc tu as tracé quoi en premier ? Une fois que tu as fait ton carré, tu as tracé quoi en premier ?*
>
> *10. Émile : Celle-là.*
>
> *11. Stéphanie : Ça s'appelle comment ?*
>
> *12. Ensemble : La diagonale.*
>
> *13. Émile : Euh la diagonale.*
>
> *14. Stéphanie : D'accord. Tu n'en as tracé qu'une ?*
>
> *15. Émile : Oui et après j'ai fait ceux-là* [les côtés manquants du carré] *et après j'ai fait celle-ci* [la deuxième diagonale].

Si la diagonale apparente sur la figure modèle est immédiatement perçue, ce n'est pas le cas de l'autre diagonale, dont la perception nécessite la mobilisation de propriétés d'alignement / appartenance. Notons que la diagonale a un statut intermédiaire : elle est un objet 1D (ligne, trait, segment, droite) défini en relation avec une figure 2D, à la fois partie du réseau de lignes et de points perçu en déconstruisant la figure et élément d'une figure englobante (le grand carré ici). L'ensemble des deux diagonales est aussi passagèrement désigné par « la croix », expression correspondant à un regard plus englobant. Enfin, cette première analyse collective de la figure se termine par l'évocation de la position des sommets du carré moyen :

29. Stéphanie : (…) Est-ce qu'il y pas autre chose dans votre figure qu'il était important de voir ? Pierre.

30. Pierre : La moitié des traits du carré.

31. Stéphanie : Ah, ben viens-là.

[Pierre montre successivement les quatre milieux des côtés du carré]

32. Stéphanie : Alors. C'est quoi ça ? Ce que Pierre nous a montré.

33. Élèves : … Carré.

34. Stéphanie : Ici, ici/

35. Élève ? : Les sommets/ Les points.

36. Stéphanie : Ici, ici [Stéphanie montre successivement les quatre milieux des côtés du carré]. *Donc il dit que c'est le deuxième carré. À partir de ces points-là je suis d'accord qu'on trace le deuxième carré. Regarde où se situent ces points-là.*

37. Pierre : Au milieu des…

38. Élève ? : Au centre.

39. Pierre : Côtés [?] *du carré.*

40. Stéphanie : Oui. Au milieu. Comment vous avez fait pour trouver ces points-là ? Pour ceux qui l'ont fait. Laurent.

L'analyse de ces interactions témoigne de façon intéressante d'un jeu de regard sur la figure et ses sous-éléments. Ce jeu peut se repérer à la manière dont les objets sont désignés en référence (ou non) à certaines figures englobantes : sommet du carré moyen, milieu d'un côté, point. Que ce soit dans les mots et expressions de l'enseignante (« c'est le deuxième carré » ou « ces points-là ») ou dans ceux des élèves (« sommets », « milieux », « centre », « moitié »), divers regards s'orchestrent progressivement, accompagnés de l'explicitation progressive des liens entre différentes lectures de la figure. Désigné comme une surface par Émile (l.6), notamment dans le geste (une main posée), le carré moyen est ensuite caractérisé par un réseau de points : placer ces quatre points (en tant que milieu) suffit pour le construire. L'expression « la moitié des traits du carré » (l.30) est, par exemple, significative de ce qui se joue entre les figures englobantes d'une part et les points et lignes qui les composent d'autre part. L'élève semble en effet vouloir désigner un point, le milieu d'un segment, il fait pour cela référence au grand carré. Le mot « moitié » a un double statut : à la fois, dans le contexte de la mesure, il évoque plutôt un segment (et sa longueur), mais aussi, comme dans l'expression « être *à* la moitié », le milieu du segment (et, implicitement, la relation entre ce milieu et le segment).

Tout au long de cet épisode, tout se passe comme si l'enseignante accompagnait implicitement les élèves dans un mouvement de déconstruction et de reconstruction dimensionnelles. Signalons que dans cette séance, ce travail d'analyse de la figure est avant tout motivé pour son aspect opératoire pour la tâche de restauration, comme on le voit clairement dans le précédent extrait.

Autour de procédures de la construction des milieux des côtés du grand carré

41. Stéphanie : Comment vous avez fait pour trouver ces points-là ? Pour ceux qui l'ont fait. Laurent.

42. Laurent : On devait prendre la règle. On devait faire [inaudible] *la moitié. Ou prendre ça, on le plie en deux pour faire euh* [la bande de papier non plastifiée].

43. Stéphanie : Alors viens au tableau. Tiens, tiens, tiens, je vais t'en donner une grande. [Laurent juxtapose la grande bande de papier avec le côté du carré, mais ne voit pas comment s'en servir ensuite].

Jusqu'alors portés sur le *voir*, les échanges verbaux basculent ici sur le *faire*, sous l'impulsion de l'enseignante (« Comment vous avez *fait* pour trouver ces points-là ? », ou plus loin « Est-ce qu'il y en a qui ont *tracé* des droites sur la figure qui auraient pu les aider ? », *cf.* ci-dessous l.79). Pour restaurer la figure, il fallait « voir »[11] que les sommets du carré moyen étaient les milieux des côtés du grand carré, comment maintenant les construire sur la figure à restaurer ? La première procédure évoquée est celle d'un recours à la mesure, avec la règle graduée, conformément à la technique usuelle. Cependant, le principe d'une construction sans mesure et donc moins coûteuse, via le pliage d'une bande de papier, est assez vite mis en avant. Une élève parvient à le mettre en œuvre :

[Émilie est au tableau]

62. Stéphanie : Ah. Regardez bien ce qu'elle fait.

[Émilie effectue un report de la longueur du côté du grand carré à l'aide d'une bande de papier, puis plie la bande obtenue en deux]

63. Stéphanie : Tu peux expliquer avec des mots pour tout le monde.

[Émilie déplie la bande]

64. Stéphanie : La première phase.

65. Émilie : On prend la bande de papier…

66. Stéphanie : Tu la plies pour que ça se superpose au segment, au côté du carré, on est d'accord.

67. Émilie : Et voilà [Elle plie la bande en deux].

68. Stéphanie : Et pourquoi tu la plies en deux ?

69. Émilie : Euh [Inaudible, elle pointe le milieu du doigt].

70. E ? : Le milieu.

71. Stéphanie : Oui donc le milieu du segment ça veut dire quoi, cette partie-là et cette partie-là elles sont comment ?

72. E ? : Égaux.

73. Stéphanie : Oui c'est, oui tout à fait. Elles sont…

74. Es : Égaux.

75. Stéphanie : Elles sont la moitié plus la moitié donc ça fait un segment de même…

76. Es : Longueur. Ils sont égaux.

---

[11] « Qu'est-ce qu'il était important de *voir* », « autre chose dans votre figure qu'il était important de *voir* » ci-dessus.

77. Stéphanie : Oui, donc déjà est-ce que ça coûtait beaucoup de points ça ?

78. Es : Non-oui.

Dans cet extrait, Émilie se situe plutôt dans le domaine du faire (« On prend la bande de papier »). Elle verbalise assez peu autour de ses actions matérielles (« Et voilà »). L'enseignante encourage alors les élèves, notamment par le biais de questions portant sur le pourquoi, à mettre en lien technique de construction et définition géométrique du milieu d'un segment (l.66, l.71). Sous l'effet des contraintes de coût (le coût a été évoqué ci-dessus l.77 et entre les deux extraits précédents[12]), l'instrument devient alors outil de matérialisation de propriétés géométriques du milieu, que l'on cherche à expliciter. Le changement d'instrument permet de réinterroger des propriétés qui sont en général masquées (car naturalisées) lors de l'usage de la règle graduée et de la mesure. L'emploi des expressions « cette partie-là, cette partie-là » (l.71) et « la moitié » (l.76), accompagné de gestes désignant des segments, permet d'ailleurs de relever que la réflexion se fait ici en termes de lignes. Le milieu d'un segment est vu comme le point qui partage le segment en deux segments de même longueur.

À l'issue de ce travail collectif la classe n'aboutit pas à la procédure la plus économique, ce qui n'était d'ailleurs pas le principal enjeu de cette mise en commun. L'enseignante laisse à la charge des élèves, notamment en vue de la deuxième phase de recherche des élèves, l'identification des propriétés de perpendicularité susceptibles de réduire encore le coût de la procédure de restauration.

Prolongements de segments en droites

Dans cette mise en commun, un troisième épisode nous semble particulièrement important du point de vue du travail collectif d'analyse de la figure. L'enjeu d'apprentissage est de construire des manières de *voir* et de *parler* partagées, en lien avec un *agir* et en vue de la restauration. En voici un extrait.

79. Stéphanie : Y en a… Est-ce qu'il y en a qui ont tracé des droites sur la figure qui auraient pu les aider ? Est-ce qu'il y en a qui l'ont fait ? Kamila.

80. Kamila : Oui.

81. Stéphanie : Tu as fait quoi ?

82. Kamila : J'ai tracé [inaudible] *et l'autre je l'ai continuée.*

83. Stéphanie : Ben vas-y. Viens nous montrer.

84. Kamila : Ben ici, j'ai démarré d'ici et j'ai continué [désigne ainsi la partie non tracée de la diagonale incomplète du grand carré].

85. Stéphanie : Donc, ici c'est quoi ? [montre un des deux petits segments portés par la diagonale]

86. E ? : L'angle.

87. Stéphanie : Est-ce que ça c'est une droite ? [même segment]

---

[12] 55. Stéphanie : Tu as mesuré, sauf que ça coûtait combien de mesurer ?

56. Plusieurs élèves : dix.

57. Stéphanie : dix points. Alors est-ce qu'on ne peut pas, par exemple, se servir de cette bande ?

88. Es : Non un segment !

89. Stéphanie : Ici [elle pointe l'autre petit segment porté par la diagonale] *?*

90. Es : Un segment.

91. Stéphanie : Et Kamila elle a tracé ici [elle parcourt plusieurs fois la diagonale non tracée avec son doigt]. *Donc elle a fait quoi ?*

92. Es : Elle a / elle a fait une ligne / droite

93. Stéphanie : Oui, j'ai entendu la réponse.

94. Es : Elle a fait une droite.

[Stéphanie trace la diagonale en dépassant les sommets du carré]

95. Stéphanie : Donc le segment on l'a prolongé en quoi ?

96. E ? : Une droite.

97. Stéphanie : En une droite. On est tous d'accord ?

98. Es : Oui.

(…) [un élève signale à l'enseignante qu'il ne voit pas le trait, elle recommence]

103. Stéphanie : Ca [sans geste]*, vous auriez très bien pu le tracer sur votre figure, ça* [montre la partie de la diagonale qui n'était pas tracée] *vous permet de comprendre ensuite rien ne vous empêche de gommer* [montre alternativement les deux diagonales des petits carrés nouvellement tracées].

En introduisant le terme « droite », dont la référence se construit en lien avec l'action « prolonger des segments », l'enseignante ouvre une nouvelle fois les champs du voir et de l'agir des élèves. Sous son impulsion, la classe semble en effet se construire progressivement un *agir-penser-parler* commun, plus spécifique à la géométrie et plus opératoire dans la tâche. À l'issue de cet échange, certaines relations d'alignement et d'incidence ont été explicitement évoquées et se trouvent matérialisées par le tracé de droites du réseau sous-jacent à la figure. Nous avons vu l'importance de ce thème lors de l'analyse a priori de la tâche.

Cette phase de mise en commun se poursuit par un échange autour de l'utilisation de l'équerre. L'enseignante convient avec les élèves de règles d'usage des instruments : l'équerre ne doit servir que pour vérifier ou tracer des angles droits (ou des droites perpendiculaires), il n'est pas permis d'utiliser les graduations de l'équerre, seule la règle graduée peut servir à mesurer des longueurs. La mise en commun se termine par un débat autour du nombre de points nécessaires à la restauration de la figure. Les élèves, qui ont très largement eu recours à la mesure, comparent le coût de leur procédure. Certains déclarent avoir utilisé 176 points, 103 points, d'autres beaucoup moins, sans que l'on soit vraiment en mesure de contrôler ces affirmations. L'enseignante conclut sur l'idée que la restauration peut se faire en 4 points (nouveau défi donné aux élèves !) et que l'instrument le plus économique est l'équerre. Une nouvelle fiche vierge du même problème est alors distribuée.

Une seconde procédure d'élève, après la mise en commun intermédiaire

Un élève (Mathis) a commencé à restaurer la figure lors de la seconde phase de construction (après la mise en commun intermédiaire). Il a fermé le grand carré et tracé deux côtés du carré moyen (Photo n°6). Un expérimentateur lui demande alors d'expliquer sa procédure.

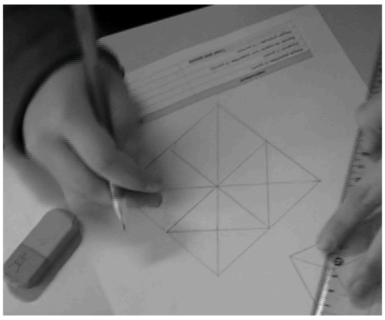
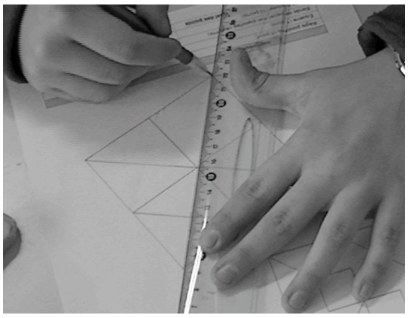


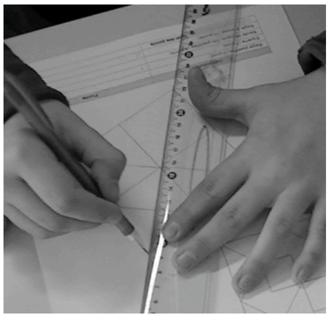
Photo n°6 : Production de Mathis

1. Thomas : Est-ce que tu m'expliques comment tu as fait ?

2. Mathis : Bin j'ai, j'ai tracé de ce point-là[13] *à ce point-là, après…*

[La règle est positionnée comme pour un tracé. L'élève désigne successivement les deux extrémités de l'amorce, puis revient à la première extrémité en suivant la diagonale.]





Photos n°7 et n°8 : Désignation des extrémités

La question de l'expérimentateur porte sur le *faire*. L'élève va alors être amené à désigner des objets et s'exprimer par des gestes, en complément de ses explications verbales. La diagonale est présentée comme un segment, ligne droite joignant deux points (le positionnement de la règle est systématique dans les explications de l'élève). Le mot « segment » n'est pas prononcé mais la référence aux extrémités (« de ce point-là à ce point-là ») marque un regard sur la figure mettant en relation points et lignes.

3. Thomas : Comment ça s'appelle ça ?

La question porte sur le *dire*. La diagonale est désignée comme un objet (« ça »), alors que l'élève était resté dans la description de l'action. L'expérimentateur signifie, en quelque sorte, qu'il veut parler des objets géométriques.

4. Mathis : Bin… une ligne [écarte ses deux mains, le crayon et la règle pour regarder], *après…*

---

[13] Il n'y a pas de tracé pendant l'échange, les photos précisent ce que désigne l'élève.

5. Thomas : Une diagonale, d'accord ?

6. Mathis : Une diagonale, après j'ai fait cette diagonale-là [parcourt la seconde diagonale d'une extrémité à l'autre, petits arrêts aux extrémités, puis parcourt dans l'autre sens].

7. Thomas : Oui.

Le changement de mot semble laisser indifférent l'élève, qui souhaite visiblement surtout faire le récit de sa construction. On peut cependant penser (voir paragraphe précédent) que le mot « diagonale », désignant une ligne droite (ici un segment), porte aussi en lui un arrière-plan géométrique que ne porte pas le mot « ligne ». Il a un statut intermédiaire, entre l'objet 1D et la partie d'une figure englobante 2D. En utilisant ce mot, l'élève intègre ces nuances dans son discours. Cette intégration se fait peut-être à son insu (en tout cas pas de sa propre initiative), mais la construction d'un langage est d'abord un phénomène social : au-delà de l'apprentissage du mot, c'est aussi par son utilisation, en constatant les réactions de ses interlocuteurs ou leurs propres usages, que l'élève apprend à en cerner les contours, les sens, les règles d'utilisation et construit donc progressivement un *agir-penser-parler* davantage adapté au cadre spécifique de la géométrie. L'échange se poursuit d'ailleurs par un retour à l'explicitation d'un *faire* convoquant ce mot.

08. Mathis : Et après j'ai... j'ai fait cette diagonale-là [une médiane[14] du grand carré, parcourue une fois].

09. Thomas : Alors ça c'est pas tout à fait, c'est pas une diagonale, hein, les diagonales c'est d'un coin à un autre [parcourt la médiane avec le doigt en marquant un petit arrêt aux extrémités]*, d'un angle à un autre.*

10. Mathis : Cette ligne [parcourt à nouveau la médiane, une fois].

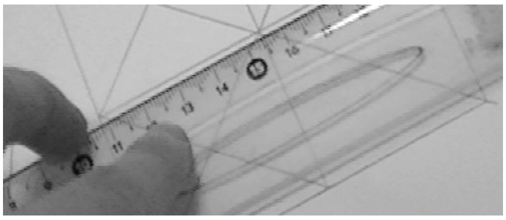
11. Thomas : Oui d'accord, elle n'a pas de nom celle-ci, une ligne, d'accord ?

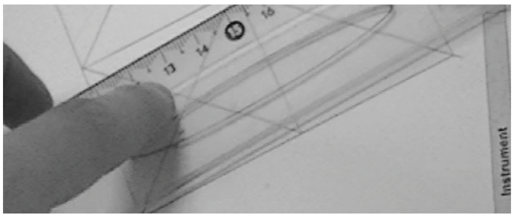
12. Mathis : Et celle-là [rapidement parcourt la 2ème médiane].

Ici, les extrémités des segments sont moins présentes, que ce soit dans les mots (absentes) ou dans le geste (moins marquées). Les segments tracés (les médianes) ne sont, en quelque sorte, que des lignes. Ils n'ont pas de nom permettant de les distinguer ou de mettre en valeur telle ou telle de leurs propriétés. Le fait même qu'il y ait vraiment des extrémités n'est pas clair puisque les termes désignant l'objet tracé (« diagonale » et « ligne ») peuvent aussi bien renvoyer à une droite ou un segment. On peut noter cependant que l'élève désigne ici les objets, et non simplement le tracé comme au début de l'échange (l.2).

13. Thomas : Comment tu les as mises ? Pourquoi tu l'as mise, par exemple [prend la règle] *tu me dis que tu l'as mise comme ça* [sur la médiane, cf. Photo n°9] *mais pourquoi tu ne l'as pas mise un petit peu comme ça ?* [petit angle] *Ou comme ça par exemple ?* [autre décalage, cf. Photo 10]

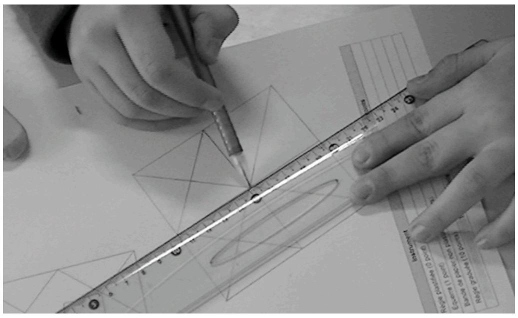
[14] Il n'est pas impossible que l'élève ait voulu désigner la diagonale du « carré moyen » plutôt que la médiane. Signalons néanmoins que seuls deux côtés du carré moyen sont effectivement tracés.

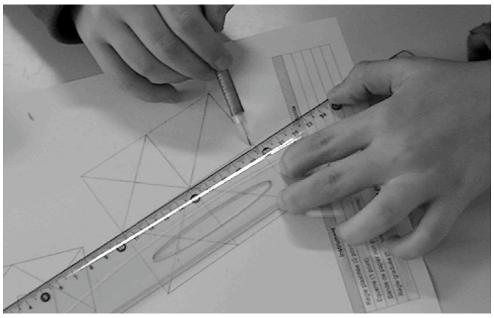




Photos n°9 et n°10 : « comme ça » ou « comme ça »

14. Mathis : Bin parce que j'ai suivi le point [montre le centre du carré, cf. Photo n°11] *et après* [montre le milieu d'un des côtés, cf. Photo n°12].





Photos n°11 et n°12 : centre du carré puis milieu

L'élève est à nouveau dans la description du *faire*. Cependant, si « j'ai suivi le point » donne une information sur l'action matérielle effectuée, cette expression nous renseigne aussi sur les objets mis en jeu au cours la procédure, à l'image de « j'ai tracé de ce point-là à ce point-là » (l.2).

14. Mathis (suite) : J'ai pris ma règle [écarte sa règle et prend son équerre, on peut penser qu'il s'agit d'un lapsus] *et* [désigne le milieu du côté] *après j'ai, mon équerre/*

15. Thomas : Oui.

16. Mathis : Et j'ai mis le [désigne par de petits cercles la zone du milieu du grand côté, ne s'arrête pas sur le point]*... Ça c'était droit, un angle droit* [l'angle droit de l'équerre est positionné le long de la médiane et du côté, l'élève parcourt du doigt l'angle droit de l'équerre, cf. Photo n°13].

17. Thomas : Tu as essayé de faire un angle droit.

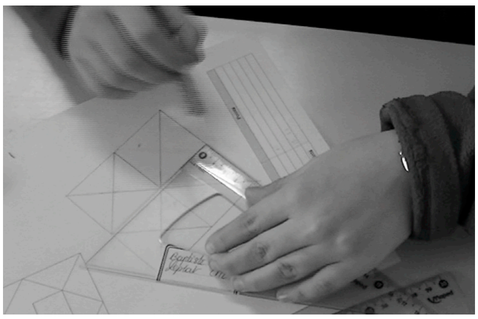


Photo n°13 : « un angle droit »

Nous observons la coexistence entre une première approche centrée sur l'angle droit comme secteur angulaire et un autre mettant en jeu deux sous-éléments 1D de la figure liés par la relation de perpendicularité. La première est attestée par des verbalisations comme « ça c'était droit, un angle droit » ou encore par des gestes comme le mouvement circulaire désignant la zone de l'angle droit. La seconde approche peut être perçue dans l'expression « j'ai suivi le point » (l.14), que Mathis utilise pour dire qu'il a disposé l'équerre de manière à ce que l'un de ses bords soit sur le point au moment de son tracé (tout en maintenant l'autre bord de l'équerre le long du côté du grand carré). Mathis prend en compte une double contrainte, deux objets spatialement et linguistiquement différenciés. Enfin, le fait que celui-ci soit parvenu à tracer la médiane, sans appui sur le sommet de l'angle droit (le milieu du côté du grand carré) confirme au niveau des gestes instrumentés un ancrage au niveau de la relation de perpendicularité[15].

> *18. Mathis : Et après, et après j'ai voulu faire le carré* [pose son équerre, reprend sa règle, montre le contour du carré moyen sur la figure modèle].
>
> *19. Thomas : D'accord, ok, bon, ça marche* [l'élève s'apprête à poursuivre son dessin en traçant un côté du carré moyen].

Après avoir décrit sa procédure de restauration en évoquant des points et des lignes, Mathis revient ici au carré moyen en tant que figure englobante pour les points qui viennent d'être construits. Il adopte donc un regard plus global en lien avec les objectifs généraux de la restauration, dans un mouvement inverse au précédent mouvement de déconstruction dimensionnelle de la figure.

À la différence des premières procédures décrites, avant ou lors de la mise en commun, on peut relever dans ces derniers extraits l'usage de la relation de perpendicularité comme outil pour mettre en œuvre la restauration de la figure. Pour cela, Mathis a été amené à identifier que les sommets du carré moyen étaient les points d'intersection des médianes du grand carré avec un de ses côtés. Son activité géométrique s'est appuyée sur différents types d'objets, de nature différente, des points, des lignes mais aussi des formes 2D comme les différents carrés constituants la figure au travers d'un processus complexe de déconstruction et de reconstruction dont nous faisons l'hypothèse qu'il est fondamental dans le contexte géométrique.

Conclusion

Le problème de restauration qui vient d'être analysé vise à conduire les élèves à mobiliser le concept de droites perpendiculaires comme outil pour la résolution d'un problème géométrique. Ici, les traits, segments, droites à reproduire ne sont pas toujours directement donnés sur la figure modèle. La tâche de restauration de cette figure est donc plus généralement pensée dans le but d'amener les élèves à analyser la figure, c'est-à-dire à identifier des réseaux de segments, points, droites sous-jacents à la construction de cette figure, à identifier les relations entre ces sous-éléments de dimension un ou zéro (notamment la perpendicularité, mais aussi les relations d'incidence et d'alignement) et à les utiliser pour reproduire un agrandissement de cette figure, à partir d'une amorce. Cette analyse et son utilisation nécessitent un jeu complexe et fondamental de déconstruction en sous-éléments et de reconstruction en figures englobantes.

---

[15] Voir Barrier et *al*. (sous presse) pour plus de précisions sur la distinction entre les deux approches (angles droits et droites perpendiculaires).

Notre ancrage épistémologique consiste à penser le processus d'apprentissage en géométrie comme une acculturation vers un *agir-penser-parler* opératoire, vers des pratiques stabilisées dans un groupe social donné. Nous avons cherché à décrire l'activité des élèves et son évolution, leur inscription dans ce jeu de déconstruction – reconstruction, selon trois dimensions : une dimension visuelle associée à la notion de regard, une dimension matérielle impliquant notamment la manipulation des instruments et une dimension verbale. Cette grille de lecture, complétée par une analyse logique des concepts en jeu, nous a permis de situer et de contraster l'activité de certains élèves observés à diverses étapes de la séance. Nos analyses montrent des inscriptions différenciées dans le jeu de déconstruction – reconstruction, tout comme un recours variable aux relations géométriques, notamment à la relation de perpendicularité. Au-delà des variations liées aux personnes (que nous ne maîtrisons pas dans ce travail), deux aspects nous semblent susceptibles de contribuer à expliquer les différences observées au niveau de l'activité géométrique des élèves. Le premier est que certaines stratégies de restauration ont été écartées en raison de leur coût trop élevé. Le choix d'un système de coût favorisant l'usage de l'équerre et pénalisant la mesure a clairement pesé en faveur de l'analyse de la figure et du recours aux relations de perpendicularité. Il s'agit là d'une des idées à la base des situations de restauration. Elle a, semble-t-il, fonctionné dans le cas présent. Le second aspect a trait aux interactions verbales. Si le langage (verbal en particulier) est pour nous constitutif de l'activité des élèves, ce même langage est aussi le lieu des constructions interindividuelles. Les interactions verbales constituent un lieu central de négociation vers des manières de faire, de dire ou de voir plus adaptées aux pratiques géométriques visées. L'analyse de la mise en commun intermédiaire a souligné le rôle de ces interactions autour des actions matérielles, en particulier celles impliquant l'enseignante.

Références bibliographiques

BARRIER, T., MATHÉ, A.-C., de VITTORI Th. (2012) Des séances ordinaires comportant une dimension historique : quels enseignements ? *Petit x*, 81, 5-33.

BARRIER T., CHESNAIS A., HACHE C. (sous presse) Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant. *Spirale – Revue de recherches en éducation, numéro thématique 54*.

BARRIER T., HACHE C., MATHÉ A.-C., MONTINGY S. (sous presse) Décrire l'activité géométrique des élèves : instrument – regard – langage. In *Actes du 40ème colloque COPIRELEM*, 2013, Nantes.

BULF C., MATHÉ A.C, MITHALAL J. (sous presse) Mode de fréquentation : un outil pour une analyse du dire et de l'agir en géométrie. *Spirale – Revue de recherches en éducation, numéro thématique 54*.

DURAND-GUERRIER V. (2013) Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques. In A. Bronner et *al*. (Eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques: problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage - Actes de la XVI école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

DUVAL R., GODIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.

ERMEL (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3*. Paris : Hatier.

IREM DE LILLE (2000) Travaux géométriques – Apprendre à résoudre des problèmes au cycle 3. CRPD Nord Pas-de-Calais.

JAUBERT M., REBIERE M., BERNIE J.P. (2012) Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs : l'hypothèse énonciative. Disponible en ligne sur la Plate-forme consacrée à la littératie forumlecture.ch http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf

KESKESSA B., PERRIN-GLORIAN M.-J., DELPLACE J.-R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur des figures de géométrie. *Grand N*, 79, 33-60.

MATHÉ A.-C. (2012) Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32(2), 195-228.

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.-J., VERBAERE O. (2007) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N*, 77, 7-34.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHÉ A.-C., LECLERCQ R. (2013) Comment penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM*, 90, 7-41.

RADFORD L. (2013) Perceiving with the eyes and with the hands. *International Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1), 56-77.

REBIERE M. (2002) Quelques remarques pour réfléchir au rôle des pratiques langagières dans les apprentissages mathématiques. In *Actes du 29ème colloque COPIRELEM* (pp. 33-55). http://www.arpeme.fr/documents/27C678BC216956B50DB2.pdf