UN EXEMPLE DE PROBLÈME

Dans le problème qui va suivre, on se place dans le plan affine euclidien P et on désigne par P l'ensemble des vecteurs associés à P. On s'intéresse aux figures du plan, et en particulier aux triangles et aux droites remarquables de ces triangles.

Partie A : Des histoires de partages

Source : Perrin (2007)

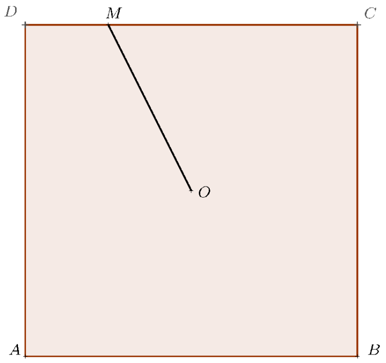
1. *Dans cette première question, on s'intéresse au problème suivant : On considère un triangle ABC. Quels sont les points M du plan P qui sont tels que le rapport $\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)}$ soit égal à une constante positive d donnée ? (où $\mathcal{A}(AMB)$ désigne l'aire du triangle AMB)*
   (a) On s'intéresse au cas où $\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)}$ égale 1. Démontrez la proposition suivante : *si M est sur la médiane issue de A ou sur la parallèle à (BC) passant par A, alors les aires de AMB et AMC sont égales.*
   (b) On note M un point distinct de A. On suppose de plus que (AM) coupe (BC) en M'. Démontrer que l'on a :$\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)} = \frac{M'B}{M'C}$. On pourra distinguer plusieurs cas suivant que M est à l'intérieur de ABC ou que M est à l'extérieur de ABC.
   (c) Énoncez une proposition dans le cas général ($\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)}$ est égal à une constante positive quelconque) et démontrez la.
   (d) L'énoncé du problème évoqué à la question 1.a. est proposé sous la forme suivante à des élèves de seconde :
   "On considère un triangle ABC. Quels sont les points M qui sont tels que le rapport des aires des triangles AMB et AMC soient égales ? "
   Discutez l'intérêt potentiel de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique dans la résolution de ce problème par les élèves.
2. *Dans cette seconde question, on considère un triangle ABC et un point M situé sur un côté de ce triangle. On s'intéresse à la question du partage de ce triangle en n parties de même aire par des droites issues de M (n entier naturel non nul).*
   (a) On s'intéresse dans un premier temps au cas particulier où $M = A$. Énoncez une proposition sur le partage de ABC en n parties de même aire et démontrez la.
   Rédigez un programme de construction dans le cas $n = 5$.

(b) On s'intéresse dans un second temps au cas où $n = 2$ et où M n'est pas un sommet. Énoncez une proposition sur le partage de ABC en 2 parties de même aire par des droites issues de M et démontrez la.

(c) Faites de même pour $n = 3$ puis pour n un entier quelconque non nul.

(d) Un problème proche concernant le partage d'un carré a été proposé à des élèves de cinquième.

On veut effectuer le partage d'un gâteau carré en trois parts égales avec un couteau. Un premier coup a été malencontreusement donné du centre au bord du gâteau comme ci-dessous. Comment poursuivre la découpe ?



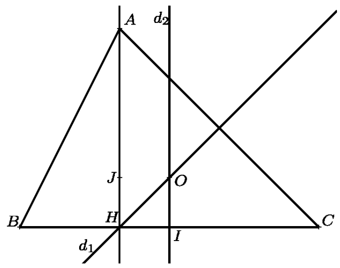
Proposez une résolution possible de ce problème en précisant les connaissances mathématiques mises en jeu.

Partie B : Les médiatrices du triangle

Source : Chevallard (2006-2007)

1. Démontrez la propriété de concours des médiatrices du triangle.

2. Considérons dans la suite le cas particulier de la figure ci-contre, où le point H est le projeté orthogonal de A sur (BC). $AH = HC = 4$ et $BH = 2$. On se place dans le repère (H, I, J) tel que $4\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HC}$ et $4\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HA}$. d_1 et d_2 sont respectivement les médiatrices de $[AC]$ et $[BC]$ et se coupent en O.



   (a) Dans le repère (H, I, J), la médiatrice d_2 de $[BC]$ a pour équation $x = 1$. Supposons alors que, par suite d'une erreur de tracé, la médiatrice d_2 de $[BC]$ soit remplacée subrepticement par la droite d'équation $x = 1+\varepsilon$, avec ε "petit". Le point O, intersection de d_1 et d_2 est alors remplacé par le point O'. Démontrez que $O'B \geq O'C$ ou $O'B \leq O'C$ selon que $\varepsilon \geq 0$ ou $\varepsilon \leq 0$, l'égalité se produisant lorsque $\varepsilon = 0$.

   (b) On considère $\varepsilon \geq 0$. Calculez $lim_{\varepsilon->0^+}\dfrac{O'B - O'C}{\varepsilon}$. En déduire qu'avec une erreur ε donnée, la distance $O'B - O'C$ est presque deux fois plus grande que ε.

3. Partant du fait que les erreurs de tracé en géométrie sont inévitables, et souhaitant faire démontrer à ses élèves de quatrième que les médiatrices d'un triangle sont concourantes, un enseignant propose la situation d'enseignement suivante :

> *Le professeur demande "sérieusement" à ses élèves de tracer les trois médiatrices d'un triangle ABC très aplati et prétend donner des noms appropriés A' B' C' aux sommets du petit "co-triangle" qu'ils "doivent" ainsi obtenir. Devant la trop petite taille de ce triangle le professeur prétend avoir choisi un triangle ABC particulier et incommode. Il demande aux élèves de trouver un triangle dont le "co-triangle" sera le plus grand possible.*

Source : Brousseau (1983)

Analysez les potentialités de cette situation au regard de l'objectif visé par le professeur.

Partie C : Triangles "aplatis"

Source : Chevallard (2006-2007)
Le texte cité ci-dessous est extrait d'un article intitulé *Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classes* d'A. Berté, paru dans la revue *Petit x.*

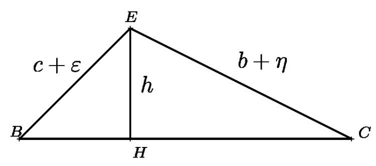
> La séquence se passe cette fois en début de seconde. Le maître demande à chaque élève : "Choisissez trois nombres entre 2 et 10 et écrivez-les". Le maître renouvelle sa demande plusieurs fois. Trois ou quatre triplets suffisent car les choix de chacun étant indépendants de ceux du voisin, on a ainsi une variété assez grande. En général, ils prennent uniquement des entiers, mais ce n'est pas gênant, au contraire, car les choix étant ainsi limités pour eux, ils ont davantage de chance de tomber sur les trois cas, particulièrement sur le cas limite. Le maître demande alors : "Dans chaque cas, essayez de construire un triangle dont les côtés mesurent ces trois nombres en centimètres. Faites un bilan de ce qui se passe suivant les cas"
> Mais en classe de seconde environ 50% des élèves, et parmi eux, certains, repérés par le professeur comme "bons", tracent encore un vrai triangle quand ils ont choisi eux-mêmes des triplets de nombres donnant le cas limite de l'alignement.
> Un élève de seconde a choisi les nombres 2, 5 et 7, dans cet ordre, et il a de ce fait commencé par tracer $AB = 2$. Il a obtenu un " vrai triangle" en plaçant la pointe du compas en A puis en B. Intrigué par le dessin d'un camarade qui, avec les mêmes nombres, ne trouvait pas de triangle, il a recommencé son dessin en traçant d'abord le côté de 7 cm. Il a alors trouvé un triangle complètement plat ! Il en a conclu le "théorème" suivant : *Si on commence par 2, le triangle existe, si on commence par 7, le triangle n'existe pas".*
> C'est parce que, sur une longueur de 2 cm, une erreur sur la place de la pointe du compas est relativement plus forte que sur une longueur de 7 cm, ce qui permet d'obtenir un triangle dans le premier cas et pas dans le second.

Source : Berté A. (1995), Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classes, Petit x, 40, 41-63.
Nous proposons dans un premier temps d'examiner la dernière affirmation de l'auteure.

1. Soient deux points B et C. On se propose ici de conduire la construction du triangle plat ABC avec $BC = a$, $BA = c$ et $AC = b$ et tel que $a = b + c$, en simulant une imprécision dans le tracé du troisième sommet A. La construction usuelle du point A consiste à l'obtenir comme intersection du cercle de centre B et de rayon BA avec le cercle de centre C et de rayon CA. Considérons alors, pour simuler une

imprécision dans le tracé, le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre B et de rayon $c+\varepsilon$ et le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre C et de rayon $b+\eta$, avec $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$.
Justifier que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants en deux points E et F.

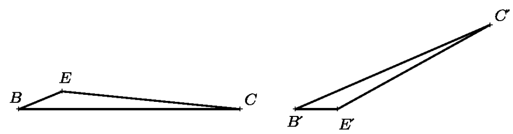
2. Dans le triangle EBC, soit H le pied de la hauteur issue de E. On note $EH = h$



(a) Démontrez que l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle ABC est donnée par la formule suivante (formule de Héron) $\mathcal{A}(ABC) = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$ où p désigne le demi-périmètre du triangle ABC.

(b) En déduire que $h^2 \sim \dfrac{2bc}{b+c}(\varepsilon+\eta)$ (c'est à dire que h est proportionnel à la racine carrée de l'erreur $\varepsilon+\eta$).

(c) On se propose d'examiner la phrase suivante :
"Le triangle obtenu apparaît exister d'autant plus qu'on commence à le construire par un plus petit côté"
Démontrer que l'on a : $h' \sim \dfrac{a}{c} h$ où h' est la hauteur issue de C'.

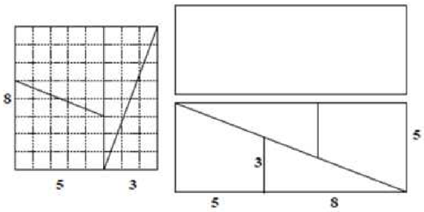


3. Comment expliqueriez-vous le propos de l'élève de seconde cité dans l'article : *"Si on commence par 2, le triangle existe, si on commence par 7, le triangle n'existe pas"* ?

Partie D : Le paradoxe de Lewis Carroll

On se propose d'étudier le problème suivant souvent proposé au collège et au lycée.

Découpez les quatre pièces qui forment le carré ci-dessous et les réarranger pour former un puzzle rectangulaire puis coller les pièces. Comparez l'aire du carré de départ de côté 8 unités avec l'aire du rectangle obtenu. Comment expliquer ce résultat ?



1. On remarque que le triplet (3,5,8) caractérise le problème évoqué. Pour ce triplet et les deux triplets suivants : (2,3,5) ; (8,13,21), comparer les aires du carré initial et du rectangle obtenu.
2. On remarque que chacun de ces triplets sont trois termes consécutifs de la suite de Fibonacci : $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in N$. A chaque triplet (u_{n-1}, u_n, u_{n+1}), on associe le carrée de côté $u_{n-1} + u_n$ et le rectangle de côtés u_n et $u_n + u_{n+1}$. On se propose donc d'étudier cette suite pour explorer ce problème.
   Pour $n \geq 2$ fixé, démontrez que l'aire du carré est : $u_{n+1} \times u_{n+1}$ et que l'aire du rectangle est $u_n \times u_{n+2}$.
3. On se donne la matrice $M(n) = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que $M(n) = AM(n-1)$, où A est une matrice 2x2 qu'on précisera.
   (b) On pose $d(n)$ le déterminant de $M(n)$.
   Calculer $d(n)$.
   Monter que $|d(n)|$ est la différence des aires entre la carré et le rectangle associé pour un triplet donné.
   Interpréter géométriquement ce résultat.
4. Origine de l'illusion géométrique
   (a) Soit φ la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Montrer que sa seconde racine est $-\dfrac{1}{\varphi}$.
   Montrer que pour tous coefficients b,c la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = b\varphi^n + \dfrac{c}{(-\varphi)^n}$ vérifie $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.
   Comment choisir b et c pour que pour tout $n \geq 0$ on ait $u_n = v_n$?

(b) Démontrez que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers φ.

(c) Démontrez que $\dfrac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$ tend vers $\varphi - 1$.

(d) Démontrez que $\dfrac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$ équivaut à $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

(e) Donnez une interprétation géométrique de ces deux quotients et de leur équivalence pour n suffisamment grand, qui permette d'expliquer le paradoxe de Lewis Carroll au cœur du problème posé.

5. Un professeur a posé le problème dont l'énoncé a été reproduit ci-dessous à ses élèves de seconde.

96 Le puzzle de Lewis Carroll*

Dans un carré de côté 8, on a découpé deux triangles rectangles et deux trapèzes (**fig. 1**).
À l'aide des quatre pièces ainsi obtenues, on reconstitue un rectangle (**fig. 2**).

fig. 1

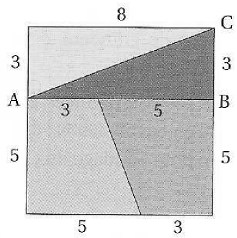
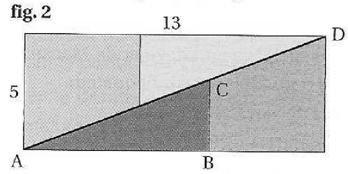


fig. 2



1. Calculer l'aire du carré
Calculer l'aire du rectangle.
Que constate-t-on ?

2. a. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.
b. Expliquer alors les résultats obtenus à la question **1**.

* Charles Lutwidge Dodgson, alias Lewis Carrol, (1832-1898), logicien, s'est rendu célèbre grâce à son ouvrage *Alice au pays des merveilles*. Il est l'auteur de nombreuses énigmes mathématiques.

Source : Manuel Odyssée 2de

(a) A la surprise de leur professeur, quelques élèves n'ont pas paru étonnés de la différence d'aires obtenues pour le carré et le rectangle. Certains élèves ont même cherché à justifier la différence obtenue de la manière suivante : *"Quand on change la disposition des pièces du puzzle, l'aire de la figure change"* ou *"On n'utilise pas la même formule pour calculer l'aire d'un carré et l'aire d'un rectangle. C'est pour cela qu'on n'obtient pas le même résultat"*.
Analysez ces réponses d'élèves. Précisez ce qui fait obstacle à l'identification du paradoxe de Lewis Carroll, du point de vue de leurs connaissances mathématiques.

(b) Dans le manuel, on propose de démontrer que les points A, C et D ne sont pas alignés. Rédigez la démonstration visiblement attendue par les auteurs du manuel puis deux autres possibles en précisant à chaque fois les connaissances mathématiques mises en jeu.