PRÉPARER LA GEOMÉTRIE DU COLLÈGE. DÉVELOPPEMENT DU RAISONNEMENT DÉDUCTIF EN CM2 À TRAVERS DES ACTIVITÉS DE GÉOMÉTRIE ET DE MESURE

Stéphane CYR
Université du Québec à Montréal

Résumé. L'idée d'introduire la preuve à élémentaire est de plus en plus mentionnée dans les écrits en didactique comme solution aux problèmes qu'éprouvent les élèves du secondaire avec cette notion. La rupture qui s'opère entre le primaire et le secondaire en géométrie, à la base de ces problèmes, pourrait être amoindrie en introduisant des activités de validation théorique dès la fin de l'élémentaire. Cet article discute des résultats d'une expérimentation menée en ce sens avec des élèves québécois de l'élémentaire (CM2). L'expérimentation a permis de démontrer l'apparition d'une démarche de validation se rapprochant d'une preuve basée sur un raisonnement déductif chez nos élèves. Par ailleurs, certains facteurs ont entravé ce recours au raisonnement déductif alors que d'autres l'ont favorisé. Nous exposerons ces principaux résultats ainsi que les facteurs ayant influencé la démarche de validation des élèves.

Mots clés. Raisonnement déductif, preuve, géométrie, élémentaire, argumentation.

Abstract. The idea of introducing proof at elementary school is increasingly mentioned as a solution to the problems faced by secondary school students with this concept. The break that occurs between the primary and secondary school in geometry, which is one of the causes of these problems, could be lessened by introducing theoretical validation activities at the end of elementary school. This paper discusses the results of an experiment conducted in this sense with Quebec elementary students (CM2). The experiment demonstrated the appearance of a validation process by students, approaching a proof based on deductive reasoning. In addition, some factors have hampered the use of deductive reasoning while others favored. We will present these results and the main factors influencing the validation process of the students.

Keywords. Deductive reasoning, proof, geometry, elementary school, argument.

Introduction

Depuis plusieurs années, bon nombre d'études se sont penchées sur la rédaction de preuves chez les élèves du secondaire. La quantité importante de travaux dans ce domaine s'explique en partie par les nombreuses difficultés observées chez ces derniers dans ce type d'activités (Houdebine 1990, Moore 1994), mais aussi par le rôle fondamental qu'on lui confère dans le processus de formation en mathématique (Arsac & coll. 1992, Duval 1990, Hanna 1995, Houdebine 1990).

Plusieurs études récentes prônent même pour une introduction graduelle de la preuve dans les programmes dès le niveau élémentaire (Stylianides & Stylianides 2006 Ball & Bass 2003, Cyr 2011). Cette recommandation constitue d'ailleurs une piste de solution envisageable aux problèmes observés chez les élèves du secondaire dans ce type d'activité (Cyr 2011, Gousseau-Coutat 2006, Stylianides & Stylianides, 2006). En effet, pour plusieurs chercheurs, l'une des principales causes de difficultés face à la preuve au secondaire serait imputable à une rupture du contrat didactique entre les niveaux primaire et secondaire ainsi qu'à une initiation trop abrupte à la démonstration (Arsac & coll. 1992, Balacheff 1987, Ball & al. 2002, Gousseau-Coutat 2006, Harel & Sowder 1998).

1. Une différence d'activité géométrique entre le primaire et le secondaire

La géométrie, qui est le domaine mathématique privilégié afin d'initier les élèves à la preuve, voit la nature de son activité se modifier considérablement entre le primaire et le secondaire. Il convient ici de rappeler que le terme preuve est pris au sens de Balacheff (1987), c'est à dire : «une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné » (p.148). Ainsi, la modification constatée, que l'on qualifie de rupture, s'explique par une différence importante au niveau du type d'activité géométrique proposée aux élèves entre le primaire et le secondaire mais surtout, par une différence fondamentale de la démarche de validation entre ces deux niveaux.

À l'école primaire, l'activité géométrique se caractérise principalement par des constructions, des reproductions, des comparaisons et des descriptions d'objets géométriques. C'est une géométrie que Balacheff (1987) qualifie de «pratique» alors que Houdement et Kuzniak (2006) parlent de «géométrie naturelle» (G1). Dans cette géométrie, la démarche de validation est instrumentée, c'est-à-dire que l'élève fonde son argumentation de validation sur des données obtenues à partir d'instruments de mesure ou même par l'observation. Au secondaire, cette activité géométrique est de nature «théorique» et repose principalement sur une axiomatique bien précise. Houdement et Kuzniak qualifient cette dernière de «géométrie axiomatique naturelle» (G2). La validation se fonde sur le recours à des propriétés théoriques. Ainsi la théorie prend une place prédominante et le travail de réflexion se fait sur les définitions et les propriétés géométriques des figures en jeu et non plus sur le dessin.

Or, comme le mentionne Muller (1994), ce nouveau statut de la figure oblige les élèves du secondaire à raisonner sur le concept et non sur le dessin, ce qui constitue en soi un obstacle pour ces derniers. Gousseau-Coutat (2006) résume bien ce problème qui, à l'image du Québec, est rencontré en France dans les programmes d'études, les manuels scolaires et les pratiques de classe :

> Le changement de niveau de réflexion, fondé sur la visualisation et la perception à l'école primaire, à une réflexion portant sur les objets théoriques au collège est certainement à l'origine de ce saut. Cette rupture transparaît dans les classes à travers une rupture dans les registres privilégiés, les énoncés de références (caractéristiques, propriétés). Cette rupture dans les programmes intervient dans les classes comme une rupture du contrat didactique accompagnant le changement d'institution (p. 26).

1.1 Importance de la déduction et des propriétés théoriques

La «géométrie axiomatique naturelle» (G2) rencontrée principalement au secondaire implique que les élèves doivent appuyer leurs justifications sur la base de propriétés théoriques (Cyr 2011, Duval 1991, Gousseau-Coutat 2006). Cette démarche de validation requiert de leur part un mode de pensée différent de celui fondé sur l'utilisation des instruments de mesure. La validation instrumentée s'effectue selon une démarche empirique dont le mode de pensée prédominant est le raisonnement inductif, alors qu'une validation théorique nécessite que l'élève organise son argumentation à partir d'un raisonnent déductif.

Plusieurs auteurs établissent d'ailleurs un lien étroit entre le recours aux propriétés théoriques et l'utilisation du raisonnement déductif. Selon Duval, la simple utilisation de définitions et de théorèmes relève déjà de cette pratique associée au raisonnement déductif. Gousseau-Coutat du même avis, considère pour sa part que les propriétés théoriques constituent le noyau du raisonnement déductif. Or, selon Stylianides (2005), le développement du raisonnement déductif est directement en lien avec le développement des habiletés de rédaction de preuve. Quant à Duval, il considère même que la compréhension de ce type de raisonnement est la condition préalable à l'activité de démonstration. À l'opposé, des problèmes rencontrés avec ce type de raisonnement risquent selon Stylianides d'entraîner des difficultés lors de la rédaction de preuve. Ces difficultés sont, selon lui, attribuables à une introduction trop abrupte des élèves au mode de raisonnement déductif.

Ainsi, développer cette forme de raisonnement chez les élèves constitue un premier pas vers une introduction graduelle de la rédaction de preuves et contribue également, à atténuer cette rupture qui existe entre les deux formes d'activités géométriques rencontrées lors du passage du primaire au secondaire.

1.2 Introduction de la preuve au primaire

L'introduction de la preuve au primaire, comme le proposent plusieurs auteurs, serait l'une des solutions envisageables afin de contrer les difficultés vécues par les élèves au secondaire avec cette notion. Selon Perrin-Glorian (2003), c'est à la fin du primaire et au début du secondaire que doit s'orchestrer progressivement ce passage de la géométrie naturelle (G1) à la géométrie axiomatique naturelle (G2). Il serait possible, à son avis, de choisir des situations bien précises qui amèneraient les élèves à passer d'une géométrie à l'autre. Stylianides et Stylianides (2006), du même avis, considèrent que la preuve, de par son importance dans les curriculum et le rôle fondamental qu'elle joue dans l'apprentissage des mathématiques, se doit d'être explorée dès le primaire. Au Québec actuellement, sans retrouver explicitement une référence à la rédaction de preuve, celle-ci apparaît de façon implicite à travers différentes exigences propices à son initiation. Il est en effet question dans ce programme de développement du raisonnement déductif, de démarche de justification et d'explication précise et complète d'un raisonnement (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, Gouvernement du Québec, 2006).

Par ailleurs, bon nombre d'études ont démontré que le raisonnement déductif, à la base de ce type d'activité, serait accessible à des enfants de cet âge (Daniel 2005, English 1997, Stylianides & Stylianides 2006). Ces derniers mentionnent à ce sujet que «Several studies suggest that it is possible to expect from pre-high school students to engage successfully in tasks involving deductive reasoning and proof» (p.212). Selon eux, les recherches en psychologie ont montré que le raisonnement déductif se développe graduellement tout au long du primaire et qu'il faut ainsi favoriser ce développement. Étant l'un des raisonnements les plus complexes pour des élèves de cet âge, il est en effet suggéré d'accompagner et de guider les élèves à travers des tâches qui visent le recours à ce type de raisonnement. English (1997) dont les travaux ont porté sur l'étude du raisonnement déductif chez des enfants d'âge primaire, est d'avis que même si ce mode de raisonnement est une partie intégrante du système procédural humain, a plus de chance de se développer adéquatement chez l'enfant au primaire s'il bénéficie d'un encadrement de la part de l'enseignant. Selon cet auteur, les manuels et les programmes d'études du primaire doivent prendre en compte les processus de raisonnement en incluant des problèmes de déduction informelle.

Ces recommandations visant le développement du raisonnement déductif et l'introduction de la preuve au primaire nous apparaissent une position intéressante à explorer. Lors de l'introduction à la rédaction de preuves au secondaire, en plus d'être confrontés à un nouveau mode de validation plus rigoureux qu'est la preuve et à une axiomatique nouvelle, les élèves doivent apprendre à raisonner déductivement à partir d'une géométrie axiomatique naturelle (G2). Or, cet environnement qu'est la rédaction de preuve, est à elle seule une activité très problématique et complexe pour les élèves. De vouloir intégrer en même temps tous ces éléments n’offre pas nécessairement les conditions idéales pour favoriser l’apprentissage du raisonnement déductif et le passage à une géométrie axiomatique naturelle et à la rédaction de preuve. Nous sommes plutôt d’avis d’initier les élèves à ce mode de raisonnement et à la rédaction de preuve à travers des situations plus familières pour eux dans lesquelles des concepts mathématiques déjà abordés interviennent.

1.3 Raisonnement déductif et argumentation

Selon Duval (1993) il existerait une différence importante entre raisonnement déductif et argumentation, et par conséquent, entre démonstration et argumentation. Cette distinction repose sur une analyse structurelle effectuée par ce dernier du raisonnement déductif et de l’argumentation. Dans le premier cas, la structure du raisonnement s’appuie sur le respect du schéma suivant où les pas de déduction sont connectés entre eux par un principe de recyclage de la conclusion qui devient l’hypothèse du pas suivant.

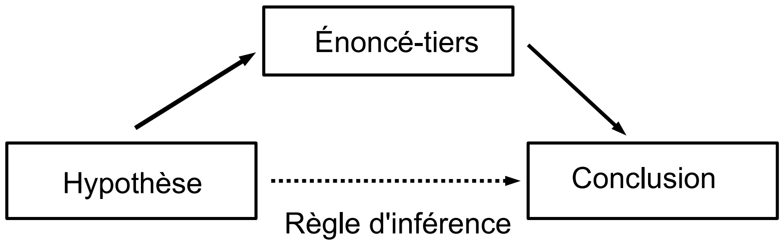


Figure 1. Le raisonnement déductif selon Duval (1993)

Ce fonctionnement répond à une règle syntaxique et logique bien précise. Quant à l’argumentation, Duval stipule qu’elle « recourt à des règles implicites qui relèvent en partie de la structure de la langue, et en partie des représentations des interlocuteurs : le contenu sémantique de propositions y est donc primordial. Au contraire, dans un pas de déduction, les propositions n'interviennent pas directement en fonction de leur **contenu** mais en fonction de leur **statut opératoire,** c'est-à-dire de la place qui leur est préalablement assignée dans le fonctionnement du pas » (p.235). Ainsi, Duval écarterait l’argumentation mathématique comme démarche constitutive de la rédaction de démonstrations mathématiques.

À la différence de ce dernier, Pedemonte (2005) conçoit qu’un lien étroit unit démonstration et argumentation. Selon elle « la présence d’une argumentation préalable peut se révéler très utile pour la construction d’une démonstration » (p.318), à condition que cette argumentation soit associée à un raisonnement logique. Ce type d’argumentation a comme finalité la justification des énoncés et ainsi, contribuerait à la construction d’une démonstration. Selon elle, tout comme pour le raisonnement déductif, l’argumentation dont il est question ici possède une structure ternaire mais qui parfois peut être cachée ou implicite et relever de la situation ou de la conception du sujet.

Afin d’appuyer ce fait, elle utilise le modèle de Toulmin (1969) qui conçoit l’argumentation comme une structure ternaire composée de l’énoncé ou conclusion, d’un certain nombre de données justifiant l’énoncé et d’un permis d’inférer qui fournit une règle permettant d’établir un pont ou une connexion logique entre les données et la conclusion. Dans ce contexte, l’argumentation se distingue de la démonstration par le fait que dans la démonstration, le permis d’inférer est théorique et fait référence à des propriétés mathématiques reconnues en classe, alors que dans l’argumentation, il peut aussi être lié aux connaissances de l’élève ou à ses conceptions. Dans ce modèle, d’autres éléments viennent se greffer à cette structure ternaire dont l'indicateur de force (F) de l'argument, la réfutation potentielle de l'énoncé conclusion (Rp) et le support du permis d'inférer (S). Ce support vient appuyer le permis d'inférer en le légitimant à partir d'une justification qui peut être fondée sur un schéma visuel ou une propriété théorique.

Afin de clarifier ces éléments, reprenons l'exemple cité par Pedemonte (2005) issu d'une situation de corps en chute. Le problème consiste à déterminer laquelle des deux boules de même forme, l'une en fer et l'autre en bois, arrivera en premier, si elles sont lancées en même temps d'une tour. Dans le modèle de Toulmin, les données de départ sont le contexte initial du problème. L'énoncé ou la conclusion adéquate serait : *elles arrivent à terre au même instant*. Le permis d'inférer permettant de partir des données et d'arriver à la conclusion peut s'exprimer comme suit: « la vitesse de chute est proportionnelle au temps ». Enfin, ce permis d'inférer s'appuie sur un support (S) qui est, dans le cas présent, la loi de gravitation de Newton.

Associant au modèle de Toulmin, celui de Balacheff (2002), Pedemonte associe ainsi le permis d'inférer à ce que Balacheff appelle un opérateur de conception, qui fait référence à la conception d'un élève lors d'une situation d'argumentation. Cette conception peut apparaître de façon explicite dans l'argumentation ou être implicite et fonction du contexte. Par ailleurs, lorsque cette conception correspond à un permis d'inférer qualifié d'adéquat, il existe alors un théorème qui peut se substituer au permis d'inférer de l'argumentation. En revanche, si cette conception ne correspond pas à un permis d'inférer qui fait référence à un théorème mathématique abordé en classe, il y a peu de chance que l'argumentation construite par l'élève mène à une démonstration acceptable.

Le lien qui unit alors démonstration et argumentation est fonction de la nature de la conception de l'élève à travers le permis d'inférer. Selon elle, pour favoriser le passage entre argumentation et démonstration, il est essentiel de s'assurer que la conception de l'élève puisse correspondre à une propriété théorique abordée en classe.

2. Objectif de la recherche

Dans le cadre de notre expérimentation, nous avons comme intention de développer chez les élèves du primaire leur capacité à employer adéquatement le raisonnement déductif et leurs habiletés préparatoires à la rédaction de preuves. Partageant le point de vue de Pedemonte, nous pensons qu'il est possible de recourir à une forme d'argumentation bien précise fondée sur des propriétés théoriques à travers le permis d'inférer afin de développer chez l'élève sa capacité à raisonner déductivement et à rédiger des preuves. Notre expérimentation repose d'ailleurs en parti sur le postulat suivant énoncé par Pedemonte : «La continuité du système de référence entre argumentation et démonstration peut favoriser la construction d'une démonstration si l'opérateur de la conception utilisé pendant l'argumentation peut être remplacé par un théorème dans la démonstration» (Pedemonte, p.330).

2.1 Hypothèse

Notre hypothèse étant que si l'on modifie le rapport à la figure chez les élèves et le rôle des propriétés dans le processus de validation, une forme de raisonnement déductif apparaîtra spontanément chez les élèves. Nous cherchons ainsi à faire passer les élèves d'une appréhension perceptive de la figure à une appréhension discursive au sens de Duval (1994). En effet, le changement de statut de la figure induit un nouveau mode de validation, basé non plus sur la perception ou sur la mesure, mais sur des propriétés théoriques. Or, le recours à de telles propriétés ne peut se faire qu'à travers l'emploi du raisonnement déductif (Duval 1993).

2.2 Méthodologie

Dans le cadre de cette recherche, nous cherchons ainsi à effectuer un rapprochement entre la conception des élèves participant à l'étude et un permis d'inférer adéquat sur le plan mathématique. Pour y parvenir, nous visons à invalider le support de l'argument de l'élève si ce dernier ne correspond pas à un permis d'inférer adéquat. Cette démarche méthodologique s'appuie sur celle de Pedemonte (2005) stipulant que : « Afin de construire une démonstration, il est obligé de revenir à l'argument et réexaminer son raisonnement pour autant qu'il ait conscience de cette incorrection […] Afin d'invalider le permis d'inférer, la restriction doit miner le système de contrôle de la conception, c'est-à-dire une partie du support de l'argument » (p.342). Pedemonte propose différentes stratégies afin d'invalider ce système de contrôle. C'est à l'aide de restrictions instaurées par des rétroactions du milieu (intervention d'un autre élève, de l'enseignant, utilisation de matériel ou de logiciels, …) qu'il est possible de susciter un doute sur la vérité du permis d'inférer. Elle propose notamment de provoquer une opposition entre deux opérateurs de conceptions différents à l'aide de questions supplémentaires ou de tâches additionnelles afin de créer un conflit chez l'élève.

Dans notre étude, le principal support utilisé est la figure géométrique. Comme nous voulons faire émerger chez l'élève le recours spontané à des propriétés théoriques et au raisonnement déductif comme support de l'argument, nous cherchons par le fait même à conduire ce dernier à invalider l'utilisation de la mesure ou de l'observation sur les figures. Pour y parvenir, nous avons soumis aux élèves des tâches écrites dans lesquelles ils devaient identifier des données manquantes sur des figures géométriques. Tout comme Dib (2000), nous pensons que le travail sur des figures géométriques peut faire émerger une validation théorique chez l'élève et favoriser le recours au raisonnement déductif. Toutefois, ce passage d'une validation « pratique » à une validation « théorique » ne peut se faire que sous certaines conditions d'organisation des tâches et du milieu matériel. Les tâches proposées possédaient ainsi certaines particularités qui avaient pour but de créer un confit entre une validation empirique (observation et mesure) et une validation théorique basée sur les propriétés. Ce dispositif didactique était de plus, appuyé par un contexte de débat entre les élèves alors qu'ils devaient argumenter sur la validité des réponses données.

2.3 Sujets

Deux classes de 25 élèves de sixième année (11-12 ans) d'une école primaire de Montréal ont participé à l'étude. Il est à souligner que bien que l'âge de nos élèves coïncide avec un niveau scolaire français de 6$^{\text{ième}}$ du collège, les contenus mathématiques touchés ciblent plutôt des élèves du CM2 en France. En effet, la nature des activités géométriques, le regard sur les figures et les processus de validation géométrique sont comparables à un contexte scolaire du primaire en France. Avant notre expérimentation, ces élèves n'avaient pas encore utilisé l'argumentation déductive afin de valider des propositions géométriques. Les activités géométriques qu'ils avaient effectuées jusqu'alors consistaient à réaliser des tâches en utilisant leurs instruments de mesure afin de trouver des données manquantes d'un problème ou afin de construire ou reproduire une figure.

2.4 Tâches

Pour l'élaboration de nos tâches, nous avons adopté la méthodologie du «Design Research» (Edelson 2002). Cette méthode procède par fonctionnement cyclique où chaque cycle contient cinq phases : 1) le design de la séquence d'enseignement ; 2) son expérimentation en classe ; 3) l'analyse rétrospective des données expérimentales ; 4) la révision, à la lumière de cette analyse, des hypothèses théoriques, des choix didactiques, des trajets d'apprentissage anticipés ; 5) l'ajustement du design de la séquence découlant de cette révision, et à partir duquel un nouveau cycle peut être amorcé. Également, nous avons élaboré nos tâches en nous appuyant sur les travaux de Coppé et al. (2005) et de Houdement et Kuzniak (2006).

Nous avons élaboré 12 tâches visant à favoriser une émergence spontanée du raisonnement déductif chez des élèves de sixième année du primaire. Ces tâches avaient aussi comme fonction de favoriser le passage d'une géométrie naturelle (G1) à une géométrie axiomatique naturelle (G2) chez l'élève. Les tâches ciblaient des savoirs essentiels identifiés dans le programme de formation du primaire, ceci afin de ne pas ajouter de nouveau contenu mathématique et de faciliter leur intégration dans une planification régulière d'enseignement. Nous avons réalisé notre expérimentation sur une période de 3 mois à raison d'une heure par semaine. Le déroulement des activités en classe a été filmé afin d'effectuer une analyse ultérieure des réactions des élèves face à celles-ci. Les élèves travaillaient en équipe de deux afin de favoriser les débats autour du procédé de validation.

Procédé de mise en doute de l'argumentation basée sur l'observation et la mesure

Notre but par ces tâches était de créer un doute chez les élèves quant au niveau de certitude fourni par une mesure ou l'observation. Les élèves devaient ainsi en arriver à percevoir les limites d'un tel procédé de validation. Afin d'y parvenir, nous avons utilisé différentes stratégies. Tout d'abord, nous avons proposé des figures géométriques conduisant à un niveau de précision très discutable. À cet effet, nous avons utilisé soit des figures avec des mesures exactes mais possédant des traits gras et épais ou des figures tracées à la main. Les élèves avaient l'entière liberté de la méthode à utiliser afin de réaliser la tâche. Par la suite, ils devaient répondre à différentes questions les amenant à réfléchir sur leur résultat. Ils devaient également comparer leurs réponses avec celles d'une autre équipe.

3. Résultats

Afin d'exposer le comportement des étudiants dans cette expérience et d'illustrer l'évolution de leur méthode de validation, nous présentons les résultats des tâches 1, 4, 6 et 7.

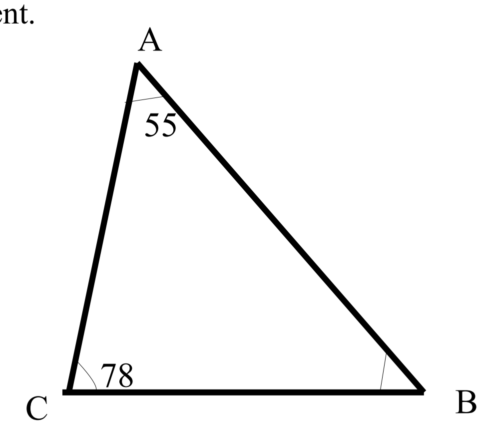
Tâche 1

Mesure de l'angle A = 55degrés

Mesure de l'angle C = 78 degrés

1.a) Trouvez la mesure de l'angle B. Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

b) Trouvez la mesure manquante d'une autre façon. Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.



L'expérimentation 1 visait à identifier la méthode personnelle privilégiée par les élèves pour résoudre un problème ne comportant qu'une seule étape et potentiellement un seul pas déductif. Lors de cette expérimentation, les élèves devaient trouver un angle manquant selon la procédure de leur choix. N'ayant jamais utilisé de propriétés théoriques à cette fin, propriétés qu'ils connaissent cependant, ils se sont presque tous rabattus sur l'observation ou la mesure pour trouver l'angle B. Vingt équipes (40 élèves) ont en effet opté pour l'utilisation du rapporteur d'angle contre seulement cinq équipes (10 élèves) qui ont fondé leur argumentation sur la propriété de la somme des angles intérieurs d'un triangle. Ainsi, l'opérateur utilisé par la majorité des élèves est fondé sur une démarche empirique à l'aide d'un instrument de mesure. Il est cependant normal à ce stade de voir apparaître ce mode de validation chez les sujets étant donné qu'ils n'ont jamais utilisé d'autres méthodes auparavant. D'ailleurs, à la question b) vingt deux équipes sur vingt cinq (44 élèves) ont fait référence à la propriété de la somme des angles du triangle comme autre méthode possible afin de trouver l'angle manquant. Ceci nous suggère que les élèves qui se placent de prime abord en géométrie naturelle (G1) sont aptes à faire le pas vers la géométrie axiomatique naturelle (G2) avec un peu d'aide et dans un contexte simple.

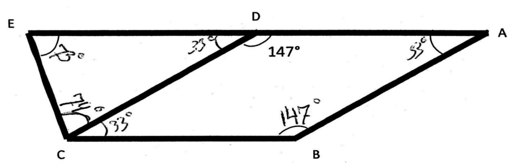
Ce recours à une démarche déductive fondée sur l'utilisation de propriétés théoriques s'est d'ailleurs accentué au fur et à mesure des expérimentations. Étant confrontés à des mesures imprécises causées par le trait gras des figures et à des réponses différentes entre équipes, les élèves ont de plus en plus questionné cette méthode de validation par la mesure. L'opérateur de conception des élèves s'est alors graduellement modifié. Toutefois, nous avons observé des régressions importantes chez les élèves lorsque confrontés à des problèmes comportant plusieurs étapes ou pas déductifs. Par exemple, lors de la tâche 4, nous avons noté la présence de démarches mixtes comme opérateur de conception (utilisation de propriétés théoriques jumelée à l'utilisation d'instrument de mesure ou à l'observation). Pour illustrer ce procédé employé par plusieurs élèves, nous présentons à titre d'exemple, la démarche d'une équipe à la tâche 4. Cette tâche a d'abord été réalisée par un seul des deux groupes (25 élèves).

Tâche 4

Activité 1

Soit ABCD, un losange. D est le point milieu du côté AE.

On sait que la somme des 4 angles du losange est de 360 degrés.



1. a) Trouvez la mesure des angles A, B et E.

Laissez les traces de votre démarche et expliquez votre raisonnement.

Vu que l'angle D est égal à l'angle B, c'était logique que la mesure de l'angle B était de 147°. Ensuite pour l'angle A, nous avons additionné l'angle D et B et cela nous a 294°. Ensuite, nous avons soustrait 294° de 360° puis cela nous a donné 66° et comme l'angle A était pareil que l'angle C, nous avons diviser par 2 66° puis cela nous a donner 33°. Pour l'angle E nous l'avons tout simplement mesuré. Donc, A = 33°, B = 147° et E = 73°

On remarque que la première étape empruntée par l'équipe est de trouver la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$. Pour ce faire, ils ont utilisé la propriété de la congruence des angles opposés dans un losange et par conséquent le raisonnement déductif. La formulation de la propriété n'y est pas, mais nous pouvons affirmer que c'est fort probablement cette propriété qui a été utilisée puisqu'elle a été apprise en classe et qu'elle était énoncée dans leur *Boîte à outils*. On a ici affaire à un opérateur de conception qui apparaît de façon implicite. La deuxième étape de la démarche s'articule autour de l'angle $\widehat{DAB}$. Cette fois-ci, l'équipe a utilisé la propriété sur la somme des angles dans un losange, énoncée dans le problème, en la jumelant avec la propriété sur la congruence des angles opposés d'un losange. Ici encore, ils ont eu recours à une démarche théorique et déductive. La troisième étape de la solution est d'identifier la mesure de l'angle $\widehat{DEC}$. Pour ce faire, l'équipe a employé son rapporteur d'angles tel qu'elle le précise.

On constate que l'angle à identifier a une forte influence sur la méthode employée par les élèves. En effet, parmi les 25 élèves, 12 d'entre eux (6 équipes) ont utilisé une propriété du losange pour trouver l'angle $\widehat{ABC}$. Cependant, ce nombre s'amenuise par la suite pour l'angle $\widehat{DAB}$ alors que seulement 6 élèves (3 équipes) ont eu recours à la propriété théorique, le reste se rabattant sur la mesure. Il est fort probable que l'identification de l'angle $\widehat{DAB}$ ait causé plus de difficultés aux élèves du fait que deux propriétés doivent être jumelées. De plus, le calcul à effectuer est plus complexe que ce qu'ils rencontrent normalement à ce niveau. Finalement, la dernière mesure, celle de l'angle $\widehat{DEC}$ a été la plus difficile pour les élèves, car elle impliquait l'utilisation du point milieu et par conséquent, de la transitivité pour prouver que le triangle est isocèle avant de trouver la mesure de ses angles. La transitivité apparaît effectivement comme une source importante de difficulté de sorte que les élèves ont plutôt opté pour l'utilisation du rapporteur d'angles pour trouver la mesure ou bien ont tout simplement fondé leur validation sur la perception visuelle d'un triangle isocèle afin de poursuivre la résolution du problème. En effet, une seule équipe a effectué cette transitivité afin de résoudre le problème de façon théorique.
Un autre facteur nous apparaît fondamental pour expliquer cette difficulté des élèves. Au cours du déroulement de l'activité, nous avons remarqué par les commentaires des élèves que l'absence de valeur numérique pour les mesures de côtés les empêchait de raisonner et de travailler adéquatement sur le problème. Rien de surprenant puisque l'absence de valeurs numériques implique généralement un raisonnement de type algébrique. Or, comme le stipule Damboise (2007), il peut être difficile pour un élève de faire la transposition entre le mode numérique et le mode algébrique pour résoudre un problème.

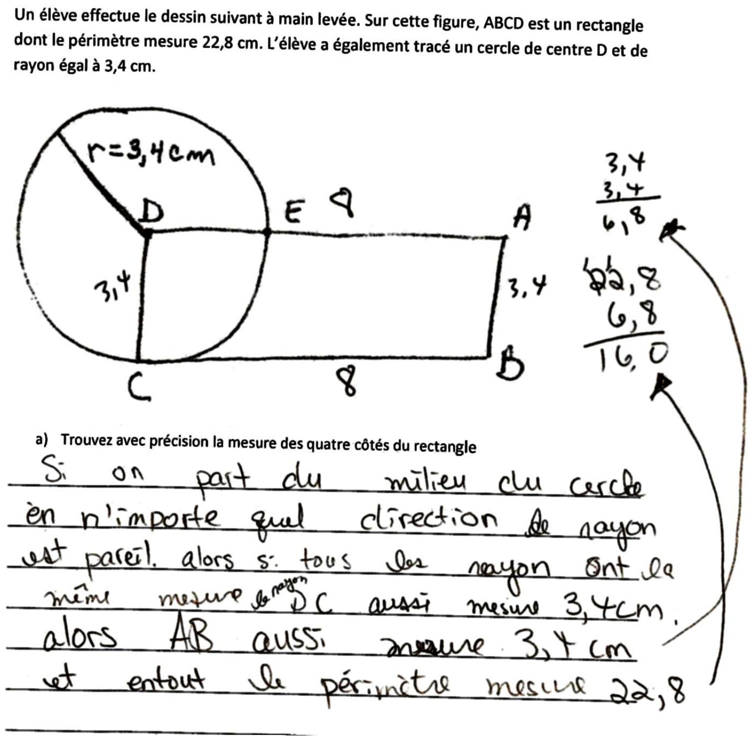
Dans le second groupe, nous avons proposé la même tâche mais cette fois en ajoutant une valeur numérique de 6 cm au côté AD. Bien que cette valeur ne soit pas nécessaire à la résolution du problème, sa présence semble avoir favorisé l'application de la transitivité par les élèves et le recours à la déduction. En effet, dans le groupe n'ayant pas cette valeur, seulement une équipe a trouvé l'angle $\widehat{DEC}$ de façon déductive, tandis que dans le second groupe, plus de la moitié des équipes (13 élèves) a eu recours à une démarche déductive. Ainsi, il semblerait que la présence de valeurs numériques associée à une mesure puisse dans certains cas, favoriser le recours au raisonnement déductif et à l'utilisation de propriétés théoriques. Toutefois, il se peut également que la présence de cette mesure additionnelle, qui a incité les élèves à raisonner à partir de cette grandeur plutôt que par comparaison de segments géométriques, ait transformé la nature de la tâche en lui conférant un aspect davantage métrique que géométrique. Du coup, les élèves on pu se rabattre sur un type de preuve plus près de l'exemple générique que de l'expérience mentale (Balacheff, 1987). Par contre, que l'élève soit dans un niveau hiérarchique ou dans l'autre, la finalité du problème implique l'emploi d'un pas déductif et l'utilisation de propriétés théoriques.

Tâche 6

À la suite des cinq premières tâches, nous avons proposé une autre série d'activités dont le support proposé aux élèves pour appuyer leur argument était constitué de figures géométriques tracées à la main. Ce type de dessin est décrit dans les travaux de Coppé et coll. (op.cit.), qui relatent la transition d'une géométrie pratique (géométrie naturelle) vers une géométrie théorique (géométrie axiomatique naturelle) à partir du changement du statut du dessin qui doit passer d'un objet matériel sur lequel les élèves fondent leur raisonnement et leur réponse, à un statut de support à l'argumentation. C'est dans le but d'accentuer ce passage que nous leur avons proposé, à partir de la tâche 6, des dessins à main levée dont les traits ne sont pas droits et précis mais dont les sommets sont identifiés et les mesures exactes indiquées.

Lors de cette tâche, tous les élèves ont utilisé les propriétés théoriques afin de trouver les données manquantes. L'imprécision évidente du dessin ne laissant probablement aucune place à l'utilisation de la mesure ou de l'observation et par conséquent, à un autre mode de validation, ils ont spontanément fondé leur argumentation sur le raisonnement déductif. Par ailleurs, certains opérateurs de conception sont apparus explicitement dans les justifications des élèves alors que d'autres, absents, pouvaient cependant être déduits de ces réponses et justifications. Le premier cas présenté expose une démarche adéquate d'élèves où les principaux opérateurs de conception apparaissent explicitement.

Yanis et Raphaël


Un élève effectue le dessin suivant à main levée. Sur cette figure, ABCD est un rectangle dont le périmètre mesure 22,8 cm. L'élève a également tracé un cercle de centre D et de rayon égal à 3,4 cm.

a) Trouvez avec précision la mesure des quatre côtés du rectangle

Si on part du milieu du cercle en n'importe quel direction le rayon est pareil. alors si tous les rayon ont la même mesure le rayon DC aussi mesure 3,4cm. alors AB aussi mesure 3,4 cm et entout le périmètre mesure 22,8

Dans cet exemple, on constate que les élèves ont explicitement eu recours à la propriété du rayon du cercle afin de trouver la mesure de CD. En effet, dans la figure initialement présentée aux élèves, seule la valeur du rayon était inscrite. De plus, à la fin du problème ils ont cherché à valider leur réponse par un calcul impliquant le périmètre. Également, la démarche employée par les élèves emprunte une structure relativement standard du raisonnement déductif si-alors. Dans ce cas, on peut donc penser que l'utilisation de propriétés théoriques a conduit les élèves à structurer leur raisonnement de façon déductive, et même à employer une démarche qui prend la forme d'une preuve relativement rigoureuse pour des élèves de cet âge.

Cependant, dans certains cas, comme celui de Noémie et Jannie, nous constatons que les élèves trouvent les mesures exactes de AB et CD mais avec une argumentation très peu élaborée. Leur référence au « rayon du cercle » laisse toutefois penser qu'ils ont, au même titre que l'exemple précédent, utilisé la propriété du rayon du cercle et celle de la congruence des côtés opposés du rectangle afin de trouver les données manquantes. Ainsi, dans cet exemple, même si les élèves n'ont pas exprimé de façon explicite leur argumentation, leur démarche nous permet de croire que leur opérateur de conception est basé sur des propriétés théoriques. Également, la structure de leur démarche, bien que n'étant pas la même que l'équipe précédente, est tout de même fondée sur un raisonnement déductif.

Noémie et Jannie

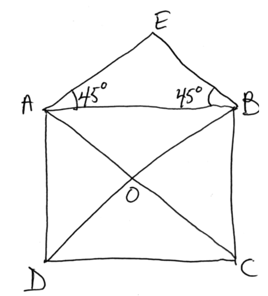
a) Trouvez avec précision la mesure des quatre côtés du rectangle.

Nous avons trouvé les mesures des côtés: AB et DC grâce au rayon du cercle. Nous avons fait 3,4 + 3,4 = 6,8 et on lue et s'est écrie 22,8 . On a soustrain 22,8 - 6,8 = 16,0÷2 = 8 cm.

Par ailleurs, d'autres problèmes avec des dessins à main levée ont suscité certains problèmes chez les élèves. En effet, la tâche suivante, la septième dans la séquence, a vu le nombre de solutions utilisant uniquement le raisonnement déductif chuter considérablement, les élèves optant plutôt pour une démarche mixte déduction-observation.

Tâche 7

Un élève effectue le dessin suivant à main levée. Sur cette figure, ABCD est un carré avec les diagonales AC et BD qui se croisent au point O. Ensuite l'élève dessine un triangle ABE. Ce dernier affirme finalement que le quadrilatère AEBO est un carré.
Note : Dans un carré, les diagonales se coupent au milieu perpendiculairement.
Est-ce qu'il a raison ? Expliquez votre réponse.



Dans cette tâche, la majorité des équipes a adopté une démarche mixte (19 équipes sur 26). Une seule équipe a déduit convenablement tous les angles nécessaires en plus de démontrer la congruence des côtés afin de prouver que AEBO est un carré. Quant aux autres équipes, les démarches sont variées alors qu'ils ont eu recours à l'observation ou à des affirmations non prouvées pour l'une ou l'autre des étapes du problème. De plus, ils n'ont pas mis en œuvre le raisonnement déductif avec la même profondeur ni la même exactitude. À titre d'exemple, Amy et Élianne ont déduit la mesure des angles AEB et AOB, mais ont eu recours à une interprétation géométrique fondée sur l'intuition ou l'observation pour trouver les mesures des angles ABO et OAB non-identifiées dans l'énoncé du problème. Pour la congruence des côtés, elles ont employé une propriété théorique pour appuyer leur affirmation.

Amy et Élianne

L'angle a est de 45° le trou vide en dessous est
lui aussi de 45°. Nous les avons additionné
et ça nous a donné 90°. ~~90~~ On a
fait la même chose pour l'angle B et son
trou vide. Pour trouver l'angle B
nous avons fait 180 - 45 - 45, et ça nous a
donné 90° alors l'angle est de 90°.
~~À partir~~ On a fait la même chose pour l'autre
triangle. Ensuite nous avons essayé
de prouver que ce n'était pas un rectangle.
Vu que le point O est le centre du carré,
les segments AO, BO, CO et DO sont égaux.

Donc ça nous prouve que c'est un carré!

Nous pensons que l'usage de la perception par un si grand nombre d'élèves s'explique par la difficulté du problème. Les problèmes comportant plusieurs étapes de résolution ont été source d'ennui pour les élèves dans nos différentes tâches, car ils leur demandent d'avoir une vision d'ensemble et de réaliser plusieurs pas de déduction. De plus, il est à noter que la mesure n'a été utilisée par aucun élève dans la résolution du problème. Ceci nous laisse croire qu'ils ont bien compris les limites du dessin à main levée par rapport à la mesure. Cependant, l'utilisation de ce type de dessin n'a pas empêché les élèves d'avoir recours à la perception. Nous croyons qu'il y a une amélioration chez les élèves, car le statut matériel de la figure semble évoluer. Cependant, tout comme Coppé et coll. (2005) l'ont observé dans leurs travaux, les élèves contournent le problème. En effet, dans leur recherche les élèves retraçaient la figure, dans notre cas, ils se servent de leur perception.

Conclusion

Dib (2000-2001) dans son article s'interroge sur la capacité des situations a-didactique à mettre en place un contexte dans lequel les connaissances théoriques puissent être perçues par les élèves comme des outils pertinents pour résoudre un problème. Selon lui : « Concevoir des situations où la validation se fasse par rétro-action du milieu matériel n'est pas une chose simple : le milieu ne renvoie pas toujours des informations pertinentes et suffisantes pour que les élèves puissent conclure seuls » (p.59). Il rajoute que : « Le maître doit donc accepter, lorsqu'il met en place des situations où le milieu matériel favorise l'émergence de systèmes de preuves, que les élèves ne concluent pas ou alors que cette conclusion soit inachevée et/ou transitoire » (p.59). Dans le cas qui nous concerne, nos tâches ont été construites dans une perspective de situation a-didactique au sens de Brousseau (1997). Nous espérions par ces tâches favoriser l'apparition spontanée d'une validation théorique chez les élèves. C'est à travers l'observation des conceptions mobilisées par les élèves, explicites ou non, servant de support au permis d'inférer, que nous avons jugé de leur capacité à faire appel à un raisonnement déductif fondé sur des propriétés théoriques. Les résultats de nos tâches ont clairement montré que l'emploi de propriétés théoriques adéquates dans le processus de résolution conduisait les élèves vers une démarche de validation se rapprochant d'une preuve. Par exemple, le cas de Yanis et Raphaël à la tâche 6 illustre bien cette idée. Ces élèves ont explicitement formulé la propriété de l'égalité du rayon d'un cercle. Sur la base de cette égalité, ils ont déduit les mesures manquantes. Ce résultat va dans le sens de l'hypothèse de Pedemont (2005) stipulant qu'un opérateur de conception dans l'argumentation, s'il pouvait être remplacé par un théorème, favorisait une continuité entre argumentation et démonstration.

Cependant, à l'instar de Dib (2002-2001), nous avons constaté que certaines de nos tâches sélectionnées favorisaient un contrôle perceptif plutôt qu'un contrôle théorique. En effet, ce ne sont pas toutes nos tâches, même les dernières, qui ont conduit nos élèves vers une démarche de validation théorique. Il nous apparait que le passage d'une validation pratique à une validation théorique ne s'effectue pas d'un seul coup et de façon linéaire et continue. Il semble y avoir un moment de transition et de régression où la démarche mixte réapparaît. Houdement et Kuzniak (2006) attribuent ce phénomène à une forme de malaise chez les élèves quant au paradigme géométrique dans lequel ils doivent se positionner. Nous avons, pour notre part, identifié certains facteurs ayant provoqué des difficultés chez les élèves et du même coup, conduit ces derniers à une telle régression dans leur mode de validation.

Un de ces facteurs bien connu, grâce aux travaux de Duval (2001) notamment, est le nombre de pas déductif à effectuer dans la démarche de validation. Les tâches qui nécessitaient 2 ou 3 pas déductifs étaient en effet source de problème pour les élèves. Plusieurs d'entre eux, après avoir effectué un premier pas déductif dans la démarche, optaient pour la mesure par la suite. Également, le recours à la transitivité s'est avéré très problématique pour bon nombre d'entre eux. Ce facteur, conjugué à une absence de donnée numérique dans la tâche 4, a constitué la source la plus importante de difficultés chez une grande majorité des élèves, contribuant ainsi à augmenter considérablement le nombre de solutions fondées sur la mesure et l'observation au détriment d'un raisonnement déductif.

Ces résultats nous laissent penser, à l'instar de Dib (2000-2001), qu'une des grandes difficultés dans ce type d'expérimentation est de bien choisir les tâches afin qu'elles favorisent ou permettent l'utilisation d'un contrôle théorique par l'emploi de connaissances géométriques (propriétés, concepts et liens logiques qui les unissent) plutôt que de connaissances spatiales (orientation et structuration des objets dans l'espace).

Ainsi, à l'opposé, plusieurs contextes semblent avoir conduit les élèves vers une démarche de validation théorique. Tout d'abord, l'emploi de figures possédant des traits gras semble avoir instauré un doute chez nos élèves quant à la validité des résultats obtenus par la mesure. Cette stratégie, conjuguée à l'exigence d'une production de plus d'une stratégie de résolution, ainsi que la comparaison des solutions entre équipe, sont autant de facteurs qui ont favorisé le recours au raisonnement déductif chez nos élèves. Également, nous sommes d'avis que les tâches utilisant des dessins à main levée ont renforcé l'usage de la déduction chez les élèves, sans pour autant les amener à délaisser la mesure puisque dans ce cas, l'utilisation de la déduction était la seule solution valable. Pourtant, cette stratégie a été fortement questionnée par Coppé et coll., à la suite d'une expérimentation qui leur a permis de montrer : « en particulier à travers l'usage des « dessins à main levée », l'évolution difficile pour les élèves en classe de 5ième, d'une géométrie descriptive et pratique vers une géométrie théorique où l'argumentation occupe une place importante. » (2005, p.34-35). Cette différence avec leur résultat est attribuable, nous le pensons, au fait que d'autres tâches employant les traits gras et ayant permis de questionner la validité des solutions obtenues par la mesure, ont précédé les tâches basées sur des dessins à main levée. Les élèves étant davantage sensibilisés aux limites du dessin comme support exclusif de la validation, ont amorcé la réalisation des tâches employant le dessin à main levée avec une certaine expérience de la validation à l'aide des propriétés théoriques. Ainsi, ce type de dessin, plutôt que de semer la confusion chez les élèves, a au contraire, renforcé leur certitude quant aux limites d'une validation par la mesure. Coppé et coll. (2005) suite à leurs résultats, ne penchaient pas pour l'abandon complet de ce type de dessin, mais plutôt vers une réflexion plus approfondie sur « des dispositifs et des pratiques permettant de l'intégrer aussi dans le topo de l'élève, pour qu'il y trouve une meilleure fonction heuristique» (2005, p.35).

À travers l'analyse globale des 12 tâches, nous pouvons également souligner l'importance des contextes mathématiques et des concepts rencontrés par les élèves à travers les situations. Notre expérimentation nous a révélé que les élèves étaient plus enclins à recourir aux propriétés théoriques lorsqu'ils avaient devant eux des contextes mathématiques familiers et dans lesquels les concepts et objets géométriques utilisés étaient bien maîtrisés.

En conclusion, nous pensons que la séquence de 12 tâches proposées a favorisé le détachement de la mesure au profit de la déduction. Cependant, les régressions observées au cours de la séquence ainsi que les difficultés vécues par les élèves avec certaines tâches nous invitent à réfléchir davantage sur le type de situations à proposer afin de favoriser ce passage d'une validation pratique à une démarche de validation théorique. À ce titre, Dib rappelle que : « La recherche en didactique n'ayant pas produit beaucoup de travaux dans ce domaine ce terrain d'investigation reste à explorer». (Dib, 2000-2001; p.60). Ayant réalisé une étude dans ce sens, nous invitons à poursuivre la réflexion dans ce domaine afin d'investiguer l'influence des différents facteurs que nous avons identifiés comme étant susceptibles d'influencer la méthode de validation des élèves.

Bibliographie

ARSAC, G., Chapiron, G., COLONNA, A., GERMAIN, G., GUICHARD, Y., MANTE, M., (1992). *Initiation au raisonnement déductif*. Lyon : Presses Universitaires de Lyon.

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 147-176.

BALL, D. L., & BASS, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27–44). Reston, VA: National Council of

Teachers of Mathematics.

BROUSSEAU, G. (1997), Théories des situations didactiques, Conférence de Montreal,

http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf

COPPE, S., DORIER, J. L et MOREAU, V. (2005). Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de 5^{ième}. *Petit x*, 68, 8-37.

CYR, S., (2011). Development of beginning skills in proving and proof-writing by elementary school students. *7th congress of European Society for Research Education,* 1-10. Rzeszow, Poland.

DAMBOISE C. (2007). Rôle d'un logiciel de manipulation symbolique dans l'apprentissage de l'algèbre au secondaire. Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de maîtrise en didactique des mathématiques. Université du Québec à Montréal, 154 pages.

DANIEL, M.-F. (2005). *Pour l'apprentissage d'une pensée critique au primaire*. Québec, Presse de l'université du Québec.

DIB, M. (2000-2001). Validation dans l'environnement papier crayon. *Grand N,* 68, p 41-60.

DUVAL, R., (1990). Pour une approche cognitive de l'argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 3,* 195-221. Strasbourg : IREM de Strasbourg.

DUVAL, R., (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 233-261. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

DUVAL R., (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif, *Repère IREM*, 12, 114-140.

EDELSON, D. C. (2002). Design research : What we learn when we engage in design. *Journal of the Learning Sciences*, 11 (1), pp. 105-121.

ENGLISH, L. D. (1997). Interventions in children's deductive reasoning with indeterminate problems. *Contemporary educational psychology*, 22, 338-362.

GOUSSEAU-COUTAT, S., (2006). *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement pour favoriser la liaison école primaire collège : une géométrie didactique au collège sur la notion de propriété.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 265p.

HANNA, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics,* 15, 3, 42-49.

HAREL, G., SOWDER, L. (1998). Students' proof schemes: Results from Exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III*, (pp 234-283). Washington, DC: Mathematical Association of America.

HOUDEBINE, J. (1990). Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question. *REPERES-IREM*, *1*, 5-27.

HOUDEMENT, C. et KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécois, Éducation préscolaire, Enseignement primaire*, Québec.

MOORE, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.

PEDEMONTE, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol.

25, n°3, pp. 313-348.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2003). Studying geometric figures at primary school from surface to point. *European Research in Mathematics Education*, p. 1-10.

STYLIANIDES, G.J. (2005). Investigating students' opportunities to develop proficiency in reasoning and proving: a curricular perspective. Thèse de doctorat (Ph. D) non publiée, University of Michigan, Michigan.

STYLIANIDES, G. J., STYLIANIDES, A. J. (2006). Making proof central to pre-high school mathematics is an appropriate instructional goal : Provable, refutable, or undecidable proposition ?. in J. Novotna, M. Kratka, N. Stehlikova (Eds). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education*, Vol. 5, pp. 209-216. Prague.

TOULMIN, S. (1969). *The Uses of Argument*. Cambridge, England: Cambridge University Press.