# QUE RETIENNENT LES NOUVEAUX BACHELIERS DE LA NOTION D'INTÉGRALE ENSEIGNÉE AU LYCÉE ?

**Sassi HADDAD**
Institut Supérieur de l'éducation et de la formation continue
Université de Tunis

**Résumé.** L'article présente l'analyse d'un questionnaire soumis à des étudiants en première année d'université. Le questionnaire part d'un constat empirique sur les difficultés éprouvées par des élèves tunisiens en classe terminale et des étudiants en première année d'université en rapport avec la notion d'intégrale. Il vise à explorer ces difficultés et à évaluer les connaissances sur la notion d'intégrale capitalisées en classe terminale par les étudiants interrogés.

**Mots clés.** Intégrale- antinomie Vrai/Faux- connaissances- erreurs.

**Abstract.** This paper presents the analysis of a questionnaire for first year University students. The origin of this questionnaire comes from the observation of students' difficulties with the notion of integral. It aims at the categorization of these difficulties and an assessment of which knowledge students have built about the concept of integral when they attended the last year of high secondary school.

**Key-words.** Integral, contradiction in terms of true/false, knowing and knowledge, mistakes.

## Introduction

L'article rapporte l'analyse d'un questionnaire qui fait partie d'un ensemble d'analyses préalables ayant servi dans la préparation et la conception d'une ingénierie didactique sur l'enseignement de l'intégrale en classe terminale, ingénierie que nous avons réalisée dans notre thèse de doctorat (Haddad, 2012). Le choix de ce thème est motivé, pour l'essentiel, par un constat, partagé par un grand nombre d'enseignants du secondaire et d'université, sur les difficultés éprouvées par des élèves en classe terminale et des étudiants en première année d'université en rapport avec la notion d'intégrale.

Dans la thèse, nous avons analysé le programme officiel de la classe terminale de l'enseignement tunisien (section Mathématiques), le manuel scolaire de cette classe, les exercices sur la notion d'intégrale proposés dans cinq sessions successives du baccalauréat ainsi qu'une enquête auprès d'un groupe de 79 enseignants de classe terminale. Au vu du contenu critique de ces analyses et des opinions émises par des enseignants d'université sur la faiblesse et l'inadéquation des connaissances des nouveaux bacheliers sur la notion d'intégrale, nous nous sommes interrogés sur ce que retiendraient les élèves à propos de cette notion après avoir passé l'examen du baccalauréat.

Notre problématique est donc celle de la consistance et de l'adéquation des connaissances sur la notion d'intégrale capitalisées par les élèves tunisiens à l'issue du baccalauréat. Cette problématique est posée pour évaluer les effets de l'enseignement de l'intégrale au lycée. Pour ce faire, nous avons cherché à interroger l'adéquation et la validité des connaissances des étudiants sur la notion d'intégrale définie, leur capacité à discriminer le vrai du faux et leur capacité à reconnaître qu'une question donnée relève du calcul intégral. Ce faisant, nous pourrons vérifier, du coup, le bien-fondé des opinions des enseignants d'université sur la faiblesse de cet enseignement.

# 1. Le questionnaire et les outils d'analyse

Le questionnaire a été soumis deux fois à des étudiants en première année Licence (L1) de la faculté des Sciences de Bizerte (Tunisie). Il a été passé une première fois en Octobre 2009 par un groupe de 37 étudiants de première année Mathématiques Appliquées, et une deuxième fois en Octobre 2010 par un groupe de 39 étudiants de première année Mathématiques Fondamentales. Ce choix est motivé par le souci d'observer si les résultats enregistrés sont susceptibles de stabilité ou non.

Le questionnaire est soumis aux étudiants pendant une heure sous le contrôle de l'enseignant chargé des travaux dirigés. Dans la mesure où le questionnaire est proposé seulement à de nouveaux bacheliers et cela avant qu'ils n'abordent le cours d'intégration à l'université, les connaissances interrogées sont celles acquises en classe terminale au lycée.

Ce questionnaire est constitué de dix questions réparties en deux parties. Il s'agit d'interroger les étudiants sur la définition de l'intégrale définie, sur les liens entre aire, intégrale et primitive ainsi que sur certaines propriétés de l'intégrale définie. Les connaissances requises pour répondre au questionnaire renvoient à la fois aux compétences visées par le programme officiel de la classe terminale et exigées en première année d'université. Ici, il nous semble utile de préciser ces compétences :

- *Savoir définir et interpréter une intégrale définie.*
- *Savoir discerner les différences de nature entre aire, intégrale et primitive.*
- *Savoir produire un argument pour valider une affirmation en utilisant des inférences et des déductions.*
- *Savoir développer des chaînes de raisonnements déductifs pour prouver un résultat.*
- *Savoir produire un contre-exemple pour montrer qu'une assertion est fausse.*
- *Savoir distinguer entre une implication et une équivalence, entre une condition nécessaire et une condition suffisante.*

## 1.1 Le questionnaire

*Partie I*

*$Q_{11}$. Donner la définition du nombre réel* $\int_a^b f(t)\,dt$ .

*$Q_{12}$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a, b] et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé. On désigne par S la surface délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b. Comparer l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,dt$ *et l'aire de la surface S.*

*$Q_{13}$. Soit f une fonction bornée et positive ou nulle sur l'intervalle. Donner des conditions suffisantes pour que* $\int_a^b f(t)\,dt > 0$ .

*$Q_{14}$. L'aire permet-elle de calculer certaines intégrales ?*

*$Q_{15}$. L'aire permet-elle d'expliciter certaines primitives ?*

*Partie II*
*Dans chacun des cas suivants, préciser, en le justifiant, si la proposition est vraie ou fausse.*

*$Q_{21}$. Si* $\int_a^b f(t)\,dt$ *existe alors la fonction f est continue sur [a, b].*

*$Q_{22}$. La moyenne des carrés des réels compris entre 0 et 1 est égale à* $\frac{1}{3}$ .

*$Q_{23}$. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a, b].*

*Si* $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$ *alors, pour tout* $x \in [a,b]$ , $f(x) \leq g(x)$,

*$Q_{24}$. Soit f une fonction continue sur un intervalle [c, d],*

*Si* $[a,b] \subset [c,d]$ *alors* $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_c^d f(t)\,dt$ .

*$Q_{25}$. Soit* $f$ *une fonction continue sur* $[a,b]$ . *Nous avons :* $\int_a^b f(t)\,dt = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$ .

## 1.2 Élaboration d'un outil d'analyse

C'est en se plaçant dans un contexte mathématique qui s'écarte suffisamment du contexte calculatoire que l'on peut cerner la nature et la qualité des connaissances des étudiants sur la notion d'intégrale et le niveau de leur compréhension. Pour en rendre compte, il nous faut chercher un outil approprié à cette tâche dont on ne peut ignorer la difficulté. Il importe de souligner que nous ne nous occupons pas ici de l'aspect psychologique de la compréhension. Notre but est de trouver un moyen d'explorer le niveau de compréhension des étudiants, en tant qu'elle est une forme de contrôle et de maîtrise de connaissances.

Les mathématiques calculatoires, plus soucieuses d'efficacité que de signification, inclinent à négliger la question du sens au profit de recettes acquises à la faveur de leur systématisation en classe et ne rendent pas compte, en général, du rapport des étudiants à la signification qu'ils entretiennent avec la notion d'intégrale. Il faut reconnaître que ce rapport, non seulement ne peut être saisi objectivement[1], mais encore ne peut renseigner pleinement la question de compréhension. C'est que la question de compréhension en mathématiques est assez ambiguë. D'abord, il est difficile de dire en quoi consiste en général le fait d'avoir compris une notion mathématique. Ensuite il est difficile, s'agissant précisément de mathématiques, d'apprécier exactement l'épaisseur et la portée de ce qu'on a compris. Est-ce à dire que toute tentative de cerner la compréhension est vaine? N'y a-t-il pas moyen de l'explorer et de l'éclairer ?

En nous plaçant strictement au plan scolaire, la compréhension de la notion d'intégrale doit s'entendre comme la capacité à saisir ses attributs et ses fonctions. Un élève n'aurait bien compris la notion d'intégrale que lorsqu'il a appris à la manipuler en tant qu'*objet* : sa définition, ses propriétés, leurs conditions de validité et leurs limites; et en tant qu'*outil* : quand l'utiliser et comment l'appliquer. Il faut ajouter que, dans le même temps, la compréhension suppose une forme de contrôle sur le rapport qui s'établit entre l'élève, l'objet mathématique *Intégrale* et les outils afférents auxquels se réfèrent la situation qu'il étudie. On voit alors que seule la compréhension qui appréhende les attributs et les fonctions de l'intégrale comme un tout structuré et cohérent serait à même de générer des connaissances significatives et adéquates. Inversement, si l'on nous accorde que toute

1 Ce rapport est jugé par un acte qui se définit lui-même par son rapport à la connaissance en question.

connaissance acquise par l'élève rencontre inévitablement ses limites, il devient possible d'évaluer la qualité de sa compréhension aux limites de ses connaissances, en ce sens que ces limites déterminent le champ d'action et la validité des connaissances de l'élève. Reste à savoir comment nous comptons repérer ces limites, si l'on veut les saisir.

Pour tenter d'explorer les limites de ces connaissances, nous distinguons, sur un choix méthodologique, deux niveaux de connaissances[2]. Le premier niveau que nous appelons niveau des *connaissances basiques* correspond aux connaissances empiriques, techniques, instrumentales et notamment tous les énoncés mathématiques institutionnalisés comme les définitions, les formules, les propriétés, les théorèmes, etc. Ce niveau contient généralement les outils, justifiés ou non, que l'élève utilise dans son activité mathématique. Le deuxième niveau que nous appelons niveau des *connaissances élaborées* correspond à la fois à l'organisation et la structuration des connaissances basiques. Les connaissances de ce niveau sont exercées par une pensée réfléchissante et consciente capable non seulement de contrôler sa propre démarche mais aussi de se soumettre à son propre examen et d'élaborer des outils spécifiques de validation comme par exemple la construction de contre-exemples.

La compréhension s'exerce dans les mathématiques, mais elle n'est pas un être mathématique. On ne peut donc déterminer sa qualité à la façon des objets mathématiques, mais cela ne signifie pas qu'elle soit insaisissable sous tous les rapports. Pour tenter de l'éclairer nous allons chercher à la faire paraître indirectement en la confrontant à des foyers de tensions. Dans la mesure où de telles situations sont susceptibles de manifester avec le moins d'équivoque des formes d'être dans lesquelles la connaissance est en tant qu'elle-même (donc adéquate) et des formes où elle n'est pas (ces formes renvoient aux cas où elle est viciée, réduite, bornée ou simplement absente), un recours à l'antinomie du «vrai» et du «faux» constitue un outil approprié pour l'exploration des conditions et des limites des connaissances des étudiants. Comme nous le savons déjà, la notion d'intégrale entretient des liens étroits avec les notions d'aire et de primitive. L'articulation de ces trois notions est une composante fondamentale dans la compréhension de la notion d'intégrale. Tant que l'élève n'a pas intégré cette articulation à la structure de ses connaissances sur la notion d'intégrale, les liens entre ces trois notions lui restent extérieurs, et il peut alors arriver qu'ils se dégradent en des incompréhensions malheureuses. C'est donc à l'intérieur de l'articulation entre aire, intégrale et primitive que nous pensons tenir des foyers de tension susceptibles d'abriter ambiguïtés, confusions, contresens, et bien d'autres erreurs.

Nous soumettons aux étudiants des questions qui couvrent les deux niveaux de connaissance que nous avons déjà distingués et qui sont en rupture avec les standards de types de tâches auxquels les étudiants sont habitués, en l'occurrence «*des tâches centrées sur la mise en fonctionnement de connaissances apprises dans le cours: travail du comment*» (Robert, 2005). Car ce n'est pas dans ces types de tâches que nous pouvons rencontrer les erreurs que nous recherchons, d'autant plus que ces types de tâches ne requièrent pas souvent le développement de leur sens, telles celles qui renvoient à des manipulations calculatoires ou à des applications directes d'énoncés de cours. Ces tâches sont généralement suffisamment travaillées en classe terminale que leur simple apparition provoque une réponse adéquate. Nous insistons toutefois sur le fait que ces types de tâches sont nécessaires dans les apprentissages des élèves et leur intérêt ne doit pas être

2 Pour prévenir toute méprise sur la question, nous insistons sur le fait qu'il s'agit ici seulement de connaissances spécifiques à la notion d'intégrale qui s'inscrivent strictement dans les programmes de la classe de terminale et de la première année d'université.

nié. La situation peut être totalement différente pour des tâches qui se situent hors du contexte des activités calculatoires ritualisées. Il est en effet d'autres contextes où la tâche, en devenant une proposition qui doit être décodée, identifiée, modifiée, démontrée ou niée, manifeste certaines erreurs significatives. Il faut distinguer ici les erreurs contingentes, celles dues à l'inattention, à l'oubli ou à l'ignorance et qui sont potentiellement surmontables, des erreurs essentielles qui peuvent se constituer en obstacles aux apprentissages ultérieurs, les seules qui doivent retenir notre analyse. Le travail de Barrier (2011) sur *les pratiques langagières de validation des étudiants en analyse réelle* fournit, à travers la preuve de Cauchy, un exemple instructif sur le rapport des étudiants à la vérité des énoncés.

### 1.3 Méthodologie

Conformément à ce qui est couramment d'usage en didactique, le questionnaire est analysé a priori et a posteriori. Dans la première analyse, nous expliquerons les motivations de chaque question et nous préciserons les réponses que nous pensons rencontrer dans les copies des étudiants. Dans l'analyse a posteriori, nous examinerons les réponses des étudiants et nous répertorierons les erreurs significatives rencontrées. Pour les besoins de ce travail, nous distinguons trois formes d'erreurs: des erreurs d'identification, des erreurs de confusion et des erreurs que nous assimilons à des défauts de validité des connaissances des étudiants. Ce qui est en jeu dans le recours à ces trois formes d'erreurs, c'est plus qu'une manière d'évaluer les connaissances disponibles (ou non disponibles) chez les étudiants, ce sont les conditions même et les limites de ces connaissances, c'est aussi leur cohérence et leur adéquation. Dans la dernière étape de notre analyse nous essayerons d'évaluer, à la lumière des erreurs observées dans l'analyse a posteriori, l'adéquation des connaissances et la qualité de compréhension des étudiants interrogés. Nous vérifierons en particulier le bien fondé des propos de certains enseignants d'université sur le caractère lacunaire et inadéquat des connaissances des nouveaux bacheliers sur la notion d'intégrale.

#### *Analyse a priori du questionnaire*

La notion d'intégrale est étroitement liée à celles d'aire et de primitive. Et c'est précisément à travers la capacité des étudiants à distinguer les différences de nature entre ces trois notions que se juge en grande partie l'adéquation de leurs connaissances. À défaut de cette distinction, ce sont des erreurs d'identification que nous pourrons saisir. Il est en effet fréquent qu'en classe terminale des élèves traitent aire et intégrale et/ou primitive et intégrale, en synonymes. Les questions $Q_{11}$ et $Q_{12}$ nous semblent bien désignées pour observer cette forme d'erreur.

Dans la plupart des énoncés du cours les hypothèses expriment des conditions suffisantes. Mais ce fait n'est pas mis en avant par les auteurs du manuel scolaire, alors même que discriminer le vrai du faux et distinguer entre condition nécessaire, condition suffisante et équivalence font partie à la fois des objectifs du programme officiel de la classe terminale et des exigences de l'enseignement supérieur[3]. Toutefois, des erreurs observées chez beaucoup d'élèves en classe terminale nous semblent inhérentes à cette négligence didactique vis-à-vis des conditions de validité des résultats du cours. Ces erreurs s'expriment sous forme de *confusions* entre condition nécessaire, condition suffisante et équivalence mais aussi sous forme d'incohérence et de contresens. Nous considérons que les questions $Q_{13}$, $Q_{21}$ et $Q_{23}$ sont appropriées pour faire apparaître ces erreurs.

---

3 Voir (Haddad, 2006).

On observe aussi que beaucoup d'élèves isolent souvent le résultat principal d'une propriété ou d'un théorème de celles, parmi ses propres données, qui l'invalident sûrement du point de vue interne et possiblement dans l'usage qui en est fait lorsque la situation n'assure pas elle-même ces données. Il s'agit alors d'un défaut de *validité* qui peut être *interne*[4] ou *externe*[5]. Il importe de remarquer qu'en général l'utilisation dans les exercices des résultats du cours est sécurisée contre les erreurs de validité par le contenu même des énoncés proposés aux élèves. Nous pouvons saisir des erreurs de validité interne dans toutes les questions et des erreurs de validité externe particulièrement dans les questions $Q_{22}$, $Q_{24}$ et $Q_{25}$.

***Analyse a priori de la partie 1***

$Q_{11}$. Donner la définition du nombre $\int_a^b f(t)\,dt$

Dans cette question, nous souhaitons connaître la définition de l'intégrale définie disponible chez les étudiants intérrogés et identifier des erreurs éventuelles installées au niveau de cette définition.La formulation de la question est volontairement ambiguë dans le but de prendre la mesure du rapport des étudiants à l'écriture $\int_a^b f(t)\,dt$ . En l'absence d'hypothèses spécifiques sur la fonction *f* (intégrabilité ou continuité), cette écriture n'a pas de sens.
En ce qui concerne les réponses des étudiants à cette question nous envisageons rencontrer des erreurs d'identification et de validité (interne) et ce à travers les trois réponses suivantes auxquelles nous nous attendons :

$R_1$ : L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ n'existe que si la fonction *f* est continue sur un intervalle *I* contenant *a* et *b*. Dans ce cas, $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ , où *F* est une primitive de *f* sur *I*.

$R_2$ : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ , où *F* est une primitive de *f* sur un intervalle contenant *a* et *b*.

$R_3$ : $\int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

La réponse $R_1$, bien que mathématiquement incorrecte car la continuité de *f* n'est pas une condition nécessaire pour l'existence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ , est conforme au programme officiel de la classe de terminale et peut être considérée comme institutionnellement recevable.

4 Elle concerne les conditions de validité d'un savoir mathématique institutionnalisé: définition, propriété, théorème, etc..
5 Elle concerne la validité du savoir-faire de l'étudiant: adaptation, interprétation, calcul, inférence, etc..

En référence au même programme, la réponse $R_2$ est fausse; la continuité de *f* étant nécessaire pour justifier l'existence d'une primitive *F* de *f*. Toutefois, elle pourrait être jugée comme recevable car, en référence à ce qui d'un usage courant dans le manuel scolaire, l'écriture $\int_a^b f(t)\,dt$ suppose implicitement la continuité de la fonction *f*. Il s'agit ici d'une réponse en équilibre instable entre pratique institutionnelle et rigueur mathématique. Cependant, nous considérons qu'il y a ici une erreur de validité interne.

La réponse $R_3$ est erronée aussi bien du point de vue strictement mathématique que du point de vue du contrat institutionnel. la fonction *f* n'étant pas supposée positive, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ ne peut s'interpréter en termes d'aire. La réponse $R_3$ est caractéristique de ce que nous appelons une erreur d'identification.

$Q_{12}$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $C$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé. On désigne par $S$ la partie du plan délimitée par la courbe $C$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Comparer l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ et l'aire de $S$.

Nous cherchons à vérifier si les étudiants sont conscients ou non des différences de nature entre aire et intégrale. En fait, cette question prend encore de l'importance à la lumière des résultats obtenus dans la question $Q_{11}$. Il nous semble qu'utilisées conjointement les questions $Q_{11}$ et $Q_{12}$ pourraient nous fixer sur le sens mathématique de l'intégrale chez les étudiants interrogés. Les réponses qui nous intéressent particulièrement sont celles des étudiants n'ayant pas répondu à la question $Q_{11}$ et celles des étudiants ayant cité la formule de Newton-Leibniz en guise de définition de l'intégrale définie. Nous pouvons en effet trouver parmi les premiers des étudiants pour qui l'intégrale s'identifie à l'aire, et vérifier chez les autres la cohérence de leurs connaissances.

Outre ce premier objectif, nous souhaitons également vérifier le niveau de disponibilité de connaissances critiques chez ces étudiants. Contrairement à la première question que nous situons au niveau des connaissances basiques, la question $Q_{12}$ renvoie au niveau des connaissances élaborées. Les connaissances requises par cette question sont le rapport de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle avec l'aire sous sa courbe, le rapport d'un nombre réel avec sa valeur absolue et l'inégalité $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ valable pour une fonction continue sur $[a, b]$. La question exige non seulement la disponibilité de ces connaissances mais aussi la capacité à les articuler d'une façon appropriée et cohérente. En effet, une réponse correctement justifiée attendue pourrait être la suivante:

*La fonction f étant continue sur l'intervalle [a, b],* $\int_a^b f(t)\,dt \le \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

*Or* $\int_a^b |f(x)|\,dx = aire(S)$ *, d'où* $\int_a^b f(x)\,dx \le aire(S)$ .

Il nous semble toutefois peu probable que les étudiants fournissent cette réponse et la justifient correctement. Mais il est possible que des étudiants ne disposant que de connaissances très sommaires sur les notions d'intégrale et d'aire pourraient, par un raisonnement approximatif et non justifié, en arriver à conclure que $\int_a^b f(x)\,dx \leq aire(S)$ .

En effet, pour qui sait que l'aire de *S* est un nombre réel positif alors que, pour une fonction *f* continue et de signe arbitraire sur [*a*, *b*], l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est un nombre réel de signe quelconque, il est possible qu'il choisisse la réponse que nous avons prévu. Mais il est également envisageable qu'il choisisse l'une des réponses suivantes $\int_a^b f(x)\,dx < aire(S)$ ou $\int_a^b f(x)\,dx \neq aire(S)$ .

D'autre part, des étudiants, dont le nombre sera certainement important, pour qui l'intégrale s'identifie à l'aire, la réponse sera sans doute $\int_a^b f(x)\,dx = aire(S)$ .

Enfin, comme le verbe *comparer* pourrait, pour certains étudiants, renvoyer à l'un des signes $: =, \neq, <, >, \leq, \geq,$ alors, pour ces derniers, toutes ces possibilités ainsi que l'absence de réponse sont envisageables.

$Q_{13}$. Soit f une fonction bornée et positive ou nulle sur l'intervalle [a, b]. Donner des conditions suffisantes pour que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ .

Sans doute qu'il nous faut commencer par préciser que la question se situe par rapport au théorème suivant énoncé dans la partie *Cours* du manuel :

> *Soit f une fonction continue sur un intervalle [a, b] où* $a < b$ *. Si f est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de [a, b] alors* $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ .

Il y a au choix de cette question deux raisons que nous allons essayer de développer et de justifier. La première est d'explorer le rapport des étudiants à la propriété de continuité de la fonction *f*. Il faut savoir qu'au regard du contrat institutionnel, cette propriété est implicitement admise dans la mesure où, dans l'enseignement secondaire tunisien, l'intégrale est toujours intégrale d'une fonction continue. La seconde raison, d'ailleurs liée à la première, est d'observer l'attitude des étudiants en face d'une donnée redondante: la fonction *f* est bornée sur [a, b]. Dans la mesure où la continuité de *f* sur [a, b] est une donnée implicite alors le fait que *f* soit bornée sur cet intervalle (fermé borné) en découle. Le résultat est connu en classe terminale.

À ces deux raisons s'ajoute une remarque. Le fait de demander des conditions suffisantes ouvre sur beaucoup de possibilités. Il est très probable cependant que des étudiants confondent entre condition suffisante et condition nécessaire. Aussi, nous nous attendons à beaucoup de réponses de types :

- Pour que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ il faut que *f* soit continue et qu'elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans l'intervalle [*a*, *b*].
- Pour que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ il faut que *f* soit continue et $f > 0$ sur [*a*, *b*].

D'autres réponses sont également envisageables telles que :

- Pour que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ il faut que $f$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans $[a, b]$.
- Pour que il suffit que $f$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans $[a, b]$.
- Pour que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ il suffit que $f$ soit continue et $f > 0$ sur $[a, b]$.
- Pour que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ il faut que $f > 0$ sur $[a, b]$.
- Pour que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ il suffit que $f > 0$ sur$[a, b]$.

Il est possible aussi d'appréhender la question par une sorte d'intuition géométrique. La fonction $f$ étant continue et positive ou nulle sur [a b], l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ s'interprète comme l'aire sous la courbe de $f$. Pour avoir $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ , il suffit[6] que la courbe de $f$ passe par un point situé strictement au-dessus de l'axe des abscisses, ce qui revient à dire qu'il suffit qu'il existe un réel $x_0$ tel que $f(x_0) > 0$. Enfin, il est très probable qu'un bon nombre d'étudiants ne produisent sur la question que des réponses ambiguës ou vides.

Q14. L'aire permet-elle de calculer certaines intégrales?

Q15. L'aire permet-elle d'expliciter certaines primitives?

Dans ces deux question nous demandons aux étudiants s'il est possible de calculer certaines intégrales ou d'expliciter certaines primitives par des considérations d'aire. Ces deux liens ne sont pas abordés dans la partie *Cours* du manuel scolaire mais ils sont établis dans certains exercices.

Notre analyse rend compte du fait que le cours développé dans le manuel scolaire repose sur une conception assez limitée à propos des liens entre aire, intégrale et primitive. Selon cette conception, la notion de primitive fournit via la formule de Newton-Leibniz une définition formelle de l'intégrale d'une fonction continue et permet le calcul effectif de certaines intégrales. La notion d'intégrale, quant à elle, sert à donner une définition formelle de la primitive $F$ sur un intervalle $I$ qui s'annule en un point $\alpha$ de $I$ d'une fonction $f$ continue sur cet intervalle ( $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$ ) et permet le calcul effectif de l'aire de certaines surfaces planes. Enfin, l'aire sous la courbe d'une fonction continue sert à interpréter géométriquement l'intégrale de la fonction. L'analyse de la partie *Exercices* du manuel et des sujets de baccalauréat rend compte de la présence de questions qui explorent ces liens : L'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ et la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ sont deux exemples probants. Cependant, l'analyse du manuel permet de constater que le sens de ces liens demeure implicite, il n'est pas souligné, il n'est pas évoqué. Dès lors, les élèves (et peut être aussi certains enseignants) pourraient ne pas saisir le sens de certains liens entre aire, intégrale et primitive.

6. Il s'agit en fait d'une condition nécessaire et suffisante.

Il est possible donc que beaucoup d'étudiants ne gardent des exercices qu'ils ont traités en classe Terminale qu'une expérience très restreinte et risquent de ne pas reconnaître le sens des liens que nous leur proposons.

Il nous faut insister ici que notre objectif n'est pas du tout de montrer la faiblesse des étudiants interrogés, mais plutôt de saisir les erreurs qui pourraient résulter de ce que nous appelons une *négligence didactique*, en l'occurrence l'absence de discours qui pourrait aider l'élève à comprendre «ce qu'on est en train de faire, et pourquoi on le fait». Dans le même temps, il est possible aussi que certains enseignants cherchent à aider leurs élèves à prendre du recul sur les exercices corrigés et de réfléchir au sens de leur contenu. C'est aussi un autre point que nous souhaitons vérifier. Nous nous attendons donc, suivant le cas, à relever des réponses de type « Vrai » ou « Faux » qui ne se réfèrent à aucune connaissance, qu'elle soit empirique ou fondée, mais aussi des réponses de même type issue d'une expérience vécue (méthode des rectangles, exercices travaillés en classe, etc.). Il est possible que des étudiants incertains préfèrent ne pas répondre, surtout à la question $Q_{15}$ tant il est vrai que le lien entre aire et primitive est moins évoqué dans les exercices que le lien entre aire et intégrale.

### *Analyse a priori de la partie II*

Cette partie est formée de cinq propositions sur lesquelles les étudiants sont invités à se prononcer en justifiant leurs réponses. Ces propositions constituent en fait un échantillon parmi un certain nombre de propositions recueillies auprès d'enseignants d'université. Les connaissances interrogées ici sont considérées par ces enseignants comme indispensables au regard des exigences du programme de la première année d'université. Elles doivent, selon ces enseignants, nous révéler des rapports impropres des étudiants interrogés à certaines propriétés algébriques de l'intégrale et surtout à l'implication logique.
Il s'agit maintenant d'examiner les propositions soumises aux étudiants. Notre objectif est d'identifier les formes d'erreurs susceptibles de faire surface chez ces derniers et vérifier par là le bien fondé de l'opinion des enseignants.

$Q_{21}$. Si $\int_a^b f(x)\,dx$ existe alors la fonction $f$ est continue sur $[a, b]$.

$Q_{22}$. La moyenne des carrés des réels compris entre 0 et 1 est égale à $\frac{1}{3}$ .

$Q_{23}$. Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$.

Si $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ alors, pour tout $x \in [a, b]\,;\, f(x) \leq g(x)$ .

$Q_{24}$. Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[c, d]$.

Si $[a, b] \subset [c, d]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_c^d f(t)\,dt$ .

$Q_{25}$. Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$. Nous avons : $\int_a^b f(t)\,dt = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$ .

Comme on peut le voir, il s'agit de placer l'étudiant face à des propositions mathématiques qui devraient évoquer pour lui un résultat, une propriété algébrique ou une règle en rapport avec la notion d'intégrale déjà étudiée en classe terminale. Nous leur demandons dans un premier temps de se prononcer sur chacune de ces propositions et de justifier leurs réponses. Pour ce faire chaque étudiant peut, suivant le cas, produire une preuve de la correction de la proposition ou construire un contre-exemple ou une figure pour l'infirmer. Bien sûr, il est possible que certains étudiants se contenteront de répondre par vrai ou faux et que d'autres ne répondront pas à une ou à plusieurs de ces propositions.

***Réponses attendues***

**Question $Q_{21}$**

Comme nous l'avons déjà souligné, dans l'enseignement secondaire tunisien, l'intégrale est toujours intégrale d'une fonction continue ce qui écarte d'emblée la question de l'intégrabilité. Cependant, alors que le problème d'existence d'une intégrale ne doit pas se poser, on trouve dans le manuel scolaire des questions où l'on demande de justifier l'existence d'une intégrale. Évidemment, les élèves apprennent par les exercices que pour justifier l'existence de l'intégrale d'une fonction, il suffit de vérifier que la fonction est continue entre les bornes de l'intégrale. Notre question s'inscrit justement dans ce flou institutionnel et cherche à rendre compte de ce qui se joue au bord du texte officiel. Nous prévoyons que les étudiants qui gardent en mémoire le contenu de leur cours diront que c'est la réciproque qui est vraie. Ceux pour qui l'existence de l'intégrale et la continuité de la fonction sont deux questions identiques et ceux qui ne distinguent pas entre condition nécessaire et condition suffisante diront probablement que la proposition est vraie. Mais il est aussi envisageable que des étudiants sachent qu'une fonction ayant un nombre fini de discontinuité entre les bornes *a* et *b* possède une intégrale et en arrivent à conclure que la proposition est fausse. Le cas d'une fonction en escalier serait probant. Il y a ensuite les étudiants qui, pour une raison ou une autre, ne répondront pas.
Convenons ici que la première réponse (c'est la réciproque qui est vraie) n'est pas recevable. Ce n'est pas parce que la réciproque d'une proposition est vraie que la proposition en question est nécessairement fausse. D'autre part, dans la mesure où l'analyse du manuel scolaire met en évidence que la contre-exemplification n'occupe pas une place notable dans l'activité mathématique des élèves, il nous paraît peu probable que des étudiants soient capables d'en produire.

**Question $Q_{22}$**

La question n'est pas sans évoquer la moyenne d'une fonction, en l'occurrence la fonction $f$ définie par $f(x)=x^2$ . Il s'agit donc de déterminer la constante $\mu$ telle que $\int_0^1 x^2\,dx=\int_0^1 \mu\,dx$ Le calcul est immédiat et donne $\mu=\frac{1}{3}$ .
La question vise à tester la capacité des étudiants interrogés à reconnaître qu'elle relève du calcul intégral et à écrire l'intégrale correspondante. À la différence des autres propositions cette question pourrait, en dépit de la simplicité de la solution, mettre véritablement les étudiants en difficulté. Comment expliquer cette difficulté alors que les étudiants sont supposés connaître les outils qui servent dans la résolution de cette question? Si notre hypothèse se vérifie, nous pourrons imputer cette lacune à une négligence didactique. Ici les raisons peuvent s'expliquer par le fait que, en dehors du contexte de calcul d'aire, les élèves en classe terminale ont l'habitude de calculer des intégrales mais pas d'exprimer des données à l'aide d'une intégrale. Comme nous l'avons déjà souligné, les élèves en classe terminale puisent leurs connaissances dans des modèles d'exercices stéréotypés qui reposent sur des techniques de résolutions bien routinisées en classe. Mais ils méconnaissent généralement la signification de la moyenne d'une fonction, d'autant plus que l'institution scolaire ne propose quasiment pas de tâches qui s'y rattache. L'analyse du manuel scolaire montre en effet que cette notion est ignorée dans les exercices ce qui pourrait constituer, pour l'élève, une raison pour ne pas s'y arrêter. Nous pouvons donc nous attendre à ce que des étudiants ne répondent pas à cette

question. Il est possible que d'autres élèves proposent $\frac{1}{2}$ comme valeur moyenne. Néanmoins, nous envisageons que certains étudiants sont capables de fournir, en la justifiant, la bonne réponse.

**Question $Q_{23}$**

Les étudiants ont l'habitude d'utiliser la croissance de l'intégrale. Mais l'utilisation de cette propriété intervient généralement dans un contexte sécurisé où les étudiants ont à établir des inégalités du type $f(x) \leq g(x)$ , où $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur un intervalle [a, b] et passer ensuite à l'intégrale. Nous pensons alors qu'il est intéressant de proposer aux étudiants ce type d'énoncé pour explorer la présence (ou l'absence) des connaissances requises pour distinguer entre condition nécessaire et condition suffisante et vérifier, ce faisant, leur rapport aux conditions qui fondent la validité de l'énoncé en question. Dans le même temps, nous cherchons quels sont les arguments que les étudiants qui arrivent à reconnaître la fausseté de la proposition sont susceptibles de produire pour justifier leurs réponses. En particulier, nous voulons explorer les connaissances, notamment géométrique et graphique, susceptibles d'être mobilisées par les étudiants, et leur capacité à les utiliser pour produire une preuve ou un contre-exemple.
Dans cette question, nous pensons que les étudiants répondront majoritairement que la proposition est vraie mais sans justifier leur réponse et que d'autres diront qu'elle est fausse parce que la réciproque est vraie pour les uns et sans justification pour les autres.

**Question $Q_{24}$**

Cette proposition est plus subtile que la proposition précédente. Le fait que l'implication soit vraie pour une fonction continue et positive peut induire en erreur un bon nombre d'étudiants et engendrer des tensions chez d'autres. La situation est que, dans les exercices proposés dans le manuel scolaire, la proposition en question est toujours utilisée avec des fonctions continues et positives ce qui lui confère, aux yeux des élèves de ce niveau, une validité et une efficacité en ce sens qu'elle conduit dans les situations rencontrées à la réponse attendue. Or souvent les élèves puisent leurs connaissances dans les exercices, les adaptent à d'autres exercices et les ajustent au travers encore d'autres exercices. Pour ces élèves, les connaissances sont toujours contextuelles, elles ne sont jamais interrogées hors de leur contexte, là où elles peuvent ne s'avérer ni valides ni efficaces. Sans doute les principaux traits de l'incompréhension et de la confusion des liens entre aire et intégrale apparaissent-ils à travers ces erreurs, en ce sens que dans la plupart des exercices proposés en classe de terminale il s'agit généralement de calculer, à l'aide d'intégrale, l'aire sous la courbe d'une fonction continue et positive. À ceci, il faut ajouter l'absence dans le manuel scolaire non seulement de mise en garde spécifique pour prévenir ces erreurs, mais aussi d'exercice qui vise à faire acquérir à l'élève la distinction entre aire et intégrale, entre condition nécessaire et condition suffisante.
Bien que nous pensons que la plupart des étudiants répondront que la proposition est vraie sans produire de justification, il est cependant envisageable que d'autres verront qu'elle est fausse et donneront peut être un contre-exemple dans le cadre algébrique ou graphique : l'exemple d'une fonction ou d'un dessin.

**Question $Q_{25}$**

Dans cette question nous nous intéressons à des erreurs avérées mais très peu observées chez les élèves en terminale et ce en raison de la rareté des situations qui les montrent. Certains enseignants de mathématiques soulignent en effet qu'il leur arrive de voir dans les copies de certains de leurs étudiants l'intégrale d'un produit de deux fonctions se transformer en un produit de deux intégrales.

Dans la question que nous proposons aux étudiants, nous avons choisi de proposer l'égalité $\int_a^b f(x)dx = \sqrt{\int_a^b [f^2(x)dx]}$ dans le but de vérifier à la fois un certain nombre de connaissances inadéquates pointées par des enseignants du supérieur et d'évaluer, dans le même temps, la capacité des étudiants en termes d'analyse et de contrôle, d'une part, et en termes de production de contre-exemples, d'autre part. Il suffit en effet de voir que dans l'égalité que nous proposons, le premier membre est un réel arbitraire alors que le second membre est un réel positif, ce qui disqualifie l'égalité en général pour n'autoriser que l'inégalité $\int_a^b f(x)dx \leq \sqrt{\int_a^b [f^2(x)dx]}$, ou peut-être (mais moins probable) $\int_a^b f(x)dx \neq \sqrt{\int_a^b [f^2(x)dx]}$.

Il est possible cependant d'aboutir à la même conclusion mais de façon erronée en utilisant l'égalité[7] pointée par les enseignants, c'est-à-dire :

Toujours d'après les mêmes enseignants, il serait possible de relever les réponses suivantes :

$$\sqrt{\int_a^b [f^2(x)dx]} = \sqrt{[\int_a^b f(x)dx]^2} = \left|(\int_a^b f(x)dx)\right| = \int_a^b f(x)dx \quad ,$$

ou encore $\sqrt{\int_a^b [f^2(x)dx]} = \sqrt{[\int_a^b f(x)dx]^2} = \sqrt{[F(b)-F(a)]^2} = F(b)-F(a)$ .

De plus, nous envisageons des réponses courtes et non justifiées de type Faux, Vrai ou aussi $\sqrt{\int_a^b [f^2(x)dx]} \neq \int_a^b f(x)dx$ .

Enfin, nous n'excluons pas d'enregistrer des réponses correctes et peut être aussi des contre-exemples.

Pour nous résumer sur cette analyse a priori, nous proposons le tableau récapitulatif suivant :

| Question | Niveau des connaissances | Connaissances et/ ou compétences requises | Erreurs visées |
|---|---|---|---|
| $Q_{11}$ | Basiques | Définition de l'intégrale définie | Identification |
| $Q_{12}$ | Basiques | Différences de nature entre intégrale et aire | Identification |
| $Q_{13}$ | Élaborées | Positivité de l'intégrale- distinction entre CN et CS | Confusion |
| $Q_{14}$ | Basiques | Lien aire → intégrale | Identification |
| $Q_{15}$ | Basiques | Lien aire → primitive | Identification |
| $Q_{21}$ | Élaborées | Distinction entre CN et CS | Confusion |
| $Q_{22}$ | Élaborées | Reconnaître une question de calcul intégral | Confusion |
| $Q_{23}$ | Élaborées | Distinction entre CN et CS- Contre-exemplification | Défaut de validité |
| $Q_{24}$ | Élaborées | Distinction entre CN et CS- Contre-exemplification | Défaut de validité |
| $Q_{25}$ | Élaborées | Propriétés algébriques de l'intégrale- Articulations | Défaut de validité |

## 2. Analyse a posteriori du questionnaire

Nous avons procédé à la lecture des réponses recueillies que nous avons regroupées en types. Nous avons ensuite répertorié ces réponses selon le niveau des connaissances requises par chaque question et les formes d'erreurs présentes dans chaque réponse. Nous avons enfin conduit une analyse plus fine centrée sur les liens entre aire, intégrale et primitive. Remarquons par ailleurs qu'en marge de cette analyse, nous avons enquêté sur l'utilisation par les étudiants de graphiques et de contre-exemples.

### 2.1 Analyse d'une copie

Pour faciliter la lecture de l'analyse a posteriori, il nous a semblé nécessaire de commencer par montrer sur un exemple l'examen des réponses des étudiants :

| Question | Réponse | Commentaire |
|---|---|---|
| $Q_{11}$ | $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, où $F$ est la primitive de $f$. | Identification intégrale-primitive. Validité interne : l'existence de $F$ n'a pas été justifiée. |
| $Q_{12}$ | $\int_a^b f(x)dx$ et l'aire de $(S)$ sont égales car la donnée de $(S)$ représente la définition de $\int_a^b f(x)dx$. | Identification $aire - intégrale$. |
| $Q_{13}$ | Pour que $\int_a^b f(x)dx > 0$ il faut que $a > b$ et $f$ soit une fonction strictement positive sur $[a, b]$. | Confusion $CN - CS$. |
| $Q_{14}$ | Oui. Elle permet de calculer certaines intégrales car l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par $(C_f)$ et les droites d'équations $x = a$, $x = b$ et $y = 0$. | Identification $aire - intégrale$. |
| $Q_{15}$ | | Pas de réponse. |
| $Q_{21}$ | Vrai, puisque l'intégrale existe alors nécessairement elle est continue. | Confusion $CN - CS$ |
| $Q_{22}$ | Vrai. $\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$. | |
| $Q_{23}$ | Vrai. On applique l'intégrale $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. | Confusion $CS$ – $Éq$. |
| $Q_{24}$ | Vrai, puisque $[a, b] \subset [c, d]$. | La réponse est fausse. |
| $Q_{25}$ | Faux. $\sqrt{\int_a^b[f(x)]^2dx} = \left\lvert\int_a^b f(x)dx\right\rvert = \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$ | Validité interne+ validité externe. Deux théorèmes en acte : $\int_a^b[f(x)]^2dx = (\int_a^b f(x)dx)^2$ $\left\lvert\int_a^b f(x)dx\right\rvert = \int_a^b \lvert f(x)dx\rvert$ |

### 2.2 Les réponses des étudiants

Partie I

**Question $Q_{11}$** Cette question porte sur la définition de l'intégrale définie. La lecture des réponses des étudiants montre que :

- 11 étudiants sur un total de 37 (soit 30%) dans le premier groupe et 14 étudiants sur un total de 39 (soit 36%) dans le deuxième groupe sont capables de donner une définition de l'intégrale définie qui soit institutionnellement recevable :

  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ , où $F$ est une primitive de $f$ sur un intervalle $I$

contenant $a$ et $b$. Dans cette question, aucun étudiant n'a évoqué la continuité de la fonction $f$ pourtant nécessaire (en terminale) pour justifier l'existence de $F$. De même, aucun étudiant n'a envisagé que $a$ et $b$ sont deux réels arbitraires de l'intervalle $I$. Ce premier constat signifie que 26 étudiants du premier groupe et 25 étudiants du deuxième groupe ne disposent pas d'une définition de l'intégrale qui soit institutionnellement recevable.

- Pour 13 étudiants (soit environ 32%) du premier groupe et 14 étudiants (soit environ 36%) du deuxième groupe, la définition de l'intégrale définie est la suivante :

  L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ *est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=a et x=b .*

Il y a donc lieu de conclure que ces résultats concordent avec ceux de l'analyse a priori et confirment le constat empirique des enseignants d'université.

**Question $Q_{12}$**

Dans cette question, nous avons relevé un grand nombre (34 dans le premier groupe et 28 dans le deuxième groupe) de réponses institutionnellement non recevables. Seulement 2 étudiants du premier groupe $G_1$ et 10 étudiants du deuxième groupe $G_2$ ont fourni des réponses recevables parmi lesquelles une seule réponse mathématiquement valide :

$$|f|(x) \geq f(x) \Rightarrow \int_a^b |f|(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx \Rightarrow aire(S) \geq \int_a^b f(x)dx$$

Dans cette réponse, les connaissances mathématiques de l'étudiant sont précises et correctement articulées puisque la fonction $f$ est par hypothèse continue sur l'intervalle $[a, b]$.

Comme nous l'avons déjà dit dans l'analyse a priori, cette question doit éclairer et compléter les résultats enregistrés dans la question $Q_{11}$. Pour ce faire, nous proposons de croiser les réponses recueillies dans les deux questions. Des raisons de commodité et de mise en page nous ont conduit à classer les réponses comme suit :

$R_1^1$ : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ , où $F$ est une primitive de $f$ sur un intervalle contenant $a$ et $b$

$R_1^2$ : $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$

$R_2^1$ : $\int_a^b f(x)dx = aire(S)$

$R_2^2$ : $\int_a^b |f|(x)dx = aire(S)$

$R_2^3$ : $\int_a^b f(x)dx \neq aire(S)$ .

RNS: Réponses non significatives[8].

8 Ce sont des réponses qui sont sans rapport avec la question, confuses, inintelligibles ou vides.

| | | $R_3^1$ | | $R_3^2$ | | $R_3^3$ | | $RNS$ | | Totaux |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | |
| $R_1^1$ | $G_1$ | 7 | | 2 | | | | 2 | | 11 |
| | $G_2$ | | 9 | | 1 | | 1 | | 3 | 14 |
| $R_1^2$ | $G_1$ | 11 | | | | | | 2 | | 13 |
| | $G_2$ | | 7 | | | | 1 | | 1 | 9 |
| $RNS$ | $G_1$ | 9 | | 1 | | 1 | | 2 | | 13 |
| | $G_2$ | | 7 | | 2 | | 2 | | 5 | 16 |
| Totaux | | 27 | 23 | 3 | 3 | 1 | 4 | 6 | 9 | 37 / 39 |

Ces résultats montrent que pour 27 étudiants (soit environ 73%) de $G_1$ et 23 étudiants (soit environ 60%) de $G_2$ la notion d'intégrale s'identifie à la notion d'aire et ce indépendamment des propriétés de la fonction. En poussant l'analyse, on constate que parmi les 11 étudiants de $G_1$ et 14 étudiants de $G_2$ ayant défini l'intégrale par la formule de Newton-Leibniz dans la question $Q_{11}$, 7 étudiants de $G_1$ et 9 étudiants de $G_2$ font l'identification entre aire et intégrale ce qui n'est pas loin d'identifier primitive, intégrale et aire. D'un autre côté, 11 étudiants (11/13) de $G_1$ et 7 étudiants (7/9) de $G_2$, ayant déjà identifié l'intégrale définie avec l'aire, confirment leur réponse à la question $Q_{11}$. Enfin, parmi les 13 étudiants de $G_1$ et les 16 étudiants de $G_2$ n'ayant pas donné de réponse significative dans la question $Q_{11}$, il y a respectivement 9 et 7 étudiants pour qui les notions d'aire et d'intégrale sont identiques.

**Question $Q_{13}$**

Cette question ne recueille que très peu de réponses recevables. Seulement 5 étudiants (soit environ 14%) de $G_1$ et 4 étudiants (soit environ 10%) de $G_2$ ont fourni des réponses recevables. À ce résultat s'ajoute un autre bien plus important: les étudiants ne semblent pas avoir conscience de la signification des notions mathématiques dont ils se servent: 27 étudiants de $G_1$ et 31 étudiants de $G_2$ ont fourni des réponses contenant toutes sortes d'erreurs. En voici quelques exemples :

- *Il faut* $f'(x)>0$ *, d'où f est croissante sur [a, b].*
- *0< a < b.*
- *Il faut a>0.*
- *Les conditions suffisantes pour que* $\int_a^b f(x)dx>0$ *sont : il faut que f(x)>0 et f est une fonction croissante sur [a, b].*
- *f(x)>0 et a<b.*
- *F est une primitive de f.* $\int_a^b f(x)dx>0$ *ssi* $F(b)-F(a)>0 \Rightarrow F(b)>f(a)$ .
- *f est une fonction bornée et positive, donc elle est continue et strictement croissante. D'où est bijective, d'où* $\int_a^b f(x)dx>0$ .

L'examen des réponses établit sans équivoque que beaucoup d'étudiants ne comprennent pas ce que l'on entend par condition suffisante. Exactement 16 étudiants de $G_1$ et 14 étudiants de $G_2$ écrivent « *Pour que* $\int_a^b f(x)dx>0$ *il faut que* …», ce qui vérifie, du moins dans une certaine mesure, ce que nous disions à ce propos dans l'analyse à priori.

**Questions $Q_{14}$ et $Q_{15}$**

L'analyse des réponses aux questions $Q_{11}$ et $Q_{12}$ donne à penser que les étudiants tendent majoritairement à identifier les notions d'aire et d'intégrale. Cette tendance se confirme encore dans les questions $Q_{14}$ et $Q_{15}$.
L'examen des réponses des étudiants à ces deux questions donne les résultats résumés dans le tableau suivant :

| L'aire permet-elle de calculer certaines intégrales ? | | | | | | L'aire permet-elle d'expliciter certaines primitives ? | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Oui | | Non | | Pas de réponses | | Oui | | Non | | Pas de réponse | |
| $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ |
| 30 | 28 | 7 | 7 | 0 | 4 | 12 | 21 | 15 | 10 | 10 | 8 |

Les 58 étudiants ayant répondu «Oui» à la question $Q_{14}$ se répartissent comme suit :

- 46 étudiants n'ont pas donné de justifications recevables à leur réponse.
- 8 étudiants justifient leur réponse par le fait que l'intégrale est l'aire sous la courbe de *f*.
- 3 étudiants justifient leur réponses en invoquant «*la méthode des rectangles*», «*les fonctions constantes par intervalles*» et «*Quelques intégrales dont on ne peut pas déterminer les primitives, mais on peut se ramener à calculer l'aire à partir d'un encadrement*».
- 1 étudiant justifie sa réponse en donnant l'exemple $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)}\,dx=\frac{\pi}{4}$ .

Les réponses des 33 étudiants ayant répondu «Oui» à la question $Q_{15}$ sont soit non justifiées soit dénuées de sens. Le même constat est encore établi à partir des réponses négatives.
L'importance du nombre d'étudiants ayant répondu affirmativement à la question $Q_{14}$ pourrait s'expliquer par le fait qu'ils identifient l'intégrale avec l'aire et peut être aussi par le fait qu'ils ne distinguent pas entre les deux sens des liens entre intégrale et aire. Quant à la disproportion de la réponse «Oui» dans les questions $Q_{14}$ et $Q_{15}$, elle peut s'expliquer par le fait que pour la plupart des étudiants, les liens entre aire et intégrale sont mieux identifiés que les liens entre aire et primitive. Les résultats observés dans ces deux questions concordent avec ce que nous avions prévu dans notre analyse a priori. Enfin il nous semble que, majoritairement, les étudiants interrogés n'ont ni la conscience ni la connaissance des liens entre aire et intégrale dans le sens *aire*→*intégrale* , d'une part, et entre aire et primitive dans le sens *aire*→ *primitive* , d'autre part.

Partie II

Nous analysons successivement $Q_{21}$ , $Q_{23}$ et $Q_{24}$, puis $Q_{22}$ et $Q_{25}$.

**Question $Q_{21}$**

Cette proposition est jugée «*Vraie*» par 30 étudiants du groupe $G_1$ et par 33 étudiants du groupe $G_2$ et «*Fausse*» par tous les autres étudiants.
L'examen des réponses fournies rend compte de l'importance du nombre (63/76) des

étudiants qui ont répondu «Vrai» ainsi que du nombre de réponses non justifiées (39/76). Environ 24% des étudiants (18/76) semblent ne pas tenir compte de la consigne et continuent à fonctionner selon les règles du contrat dans le secondaire. L'examen des réponses des 58 autres étudiants permet de constater qu'il y a 3 réponses institutionnellement recevables. L'analyse des arguments fournis dans les réponses rejetées met en lumière une forte présence d'erreurs de confusion et d'erreurs de validité. Voici, à titre d'exemple, quelques unes de ces erreurs :

- *Vrai, car si f est continue sur [a, b] alors* $\int_a^b f(x)\,dx$ *existe.*
- *Vrai, car il ne faut pas calculer l'intégrale d'une fonction discontinue.*
- *Vrai, car pour que* $\int_a^b f(x)\,dx$ *existe il faut que f soit continue sur [a, b].*
- *Vrai, car si* $F(x)=\int_a^b f(x)\,dx$ *est la primitive de f alors f est la dérivée de F. Donc f est dérivable sur [a, b] et par suite f est continue sur [a, b].*

Il semble que, pour les étudiants concernés par le premier exemple, l'existence de l'intégrale et la continuité de la fonction se recouvrent mutuellement: elles sont synonymes. Dans les deux exemples suivants, la continuité est donnée comme condition nécessaire à l'existence de l'intégrale. Ici encore, les étudiants ayant fourni cette réponse commettent une erreur de confusion. Le dernier exemple est plus riche en observables. Il y a d'abord une identification entre l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ et l'intégrale indéfinie $F: x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ . La deuxième erreur est contenue dans la phrase « *f est la dérivée de F». Donc f est dérivable sur* [a, b]». Ici, l'étudiant commet une erreur de *validité*.

**Question $Q_{23}$**

Dans cette question aussi le nombre d'étudiants ayant répondu «*Vrai*» est assez élevé (environ 60%) et le taux des réponses non justifiées (34%) est aussi important que dans la question précédente. Sur les 47 réponses argumentées, nous avons enregistré 10 réponses recevables. L'analyse des autres réponses fait apparaître plusieurs formes d'erreurs dont voici quelques exemples :

- *Vrai, car* $f(x)\le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ .
- *Vrai, car* $f(x)\le g(x) \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ .
- *Vrai, car l'intégrale ne change pas le signe.*
- *Vrai, car l'intégrale conserve les variations des fonctions.*
- *Vrai, car on a* $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ *. On applique la dérivée, on trouve* $f(x)\le g(x)$ .
- *Faux, car* $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \Leftrightarrow |f|(x) \le |g|(x)$

Il nous semble que ces erreurs sont suffisamment éloquentes. Leurs auteurs n'en ont sans doute pas conscience ce qui pourrait s'expliquer par des confusions entre implication et équivalence logiques, entre intégrale définie et intégrale indéfinie.

**Question $Q_{24}$**

La proposition est jugée «*Vraie*» par 20 étudiants du groupe $G_1$ et par 17 étudiants du groupe $G_2$, «*Fausse*» par 9 étudiants du premier groupe et par 15 étudiants du deuxième groupe, «non renseignée» par 8 étudiants de $G_1$ et par 7 étudiants de $G_2$.
Le constat à faire à propos de cette proposition par rapport aux questions $Q_{21}$ et $Q_{23}$ est l'importance à la fois du nombre d'étudiants n'ayant pas répondu (20%), le nombre des étudiants ayant jugé la proposition vraie (49%) et celui des étudiants n'ayant pas justifié leurs réponses (38%).

L'examen des justifications données par les étudiants a permis de dégager exactement 3 réponses recevables: un exemple graphique d'une courbe située en-dessous de l'axe des abscisses et deux exemples de fonctions négatives. Les autres réponses permettent de saisir surtout des connaissances inadéquates (conceptions d'élèves) dont voici quelques exemples :

- *Faux, car l'aire ne dépend pas de l'intervalle.*
- *Vrai, car* $a < c \text{ et } b < d \Rightarrow F(b) - F(a) < F(d) - F(c)$ .
- *Faux, car ça dépend de f si elle est croissante ou décroissante.*
- *Vrai, car l'intervalle [c, d] est plus grand que l'intervalle [a, b].*
- *Faux, car il faut que f soit strictement monotone sur [c, d].*
- *Vrai. Contre-exemple :* $f(x) = x^2$ *; [a, b]=[1, 2] et [c, d]=[0, 3].*

On voit que si la première et la cinquième réponses ne doivent a priori se fonder sur aucune explication qui ne soit elle-même absurde, la deuxième réponse, en revanche, pourrait être attachée à des erreurs qu'on observe souvent chez certains élèves en lycée qui consistent à soustraire membre à membre deux inégalités quoiqu'il reste à expliquer ce que représente la fonction $F$, sa croissance stricte et l'interprétation de l'inclusion $[a, b] \wp [c, d]$ à l'aide des inégalités $a < c$ et $b < d$.

La troisième réponse pourrait renvoyer à une confusion entre sens de variation et signe d'une fonction ce qui constitue une erreur courante chez certains élèves en lycée. Il est possible donc que dans ce dernier cas l'étudiant voulait dire que l'inégalité proposée dépend du signe de la fonction $f$ sur $[c, d]$.

En ce qui concerne la réponse suivante, il est clair qu'il s'agit d'une fausse conception du rapport de la valeur de l'intégrale à l'amplitude de l'intervalle d'intégration: plus grand est l'intervalle, plus grande est la valeur de l'intégrale. Cette conception pourrait s'expliquer par une autre conception selon laquelle l'intégrale est une aire géométrique. Cette erreur, nous l'avons vu dans la première partie de nos analyses, est assez bien installée chez les étudiants et pourrait être attachée aux raisons que nous avons déjà développées dans notre analyse a priori.

Enfin, la dernière réponse rend compte du rapport de certains élèves au rôle du contre-exemple ce qui pourrait s'expliquer, entre autres, par le fait que la contre-exemplification est négligée dans l'enseignement secondaire tunisien. Ce fait a été déjà constaté et souligné dans notre analyse du manuel scolaire, mais aussi dans (Gonzalez, 2005).

**Question $Q_{22}$**

La proposition est jugée «*Vraie*» par 4 étudiants du groupe $G_1$ et par 11 étudiants du groupe $G_2$, «*Fausse*» par 13 étudiants de $G_1$ et par 19 étudiants de $G_2$ . Pour les autres, 18 (10+8) étudiants n'ont rien écrit et 11 (10+1) étudiants disent :

- *Je ne comprends pas*.
- *C'est quoi la moyenne des carrés ?*
- *Je ne sais pas ce qu'est la moyenne des carrés.*
- *Je ne sais pas car je ne peux pas calculer tous les carrés des réels compris entre 0 et1.*

Le premier constat qui se donne à voir à l'issue de l'examen des réponses est l'importance, ici encore, du nombre d'étudiants qui n'ont pas répondu à cette question (environ 38%). Ce taux traduit sans doute l'incapacité de ces étudiants à comprendre l'énoncé de la proposition. Les étudiants ayant jugé la proposition fausse justifient leurs réponses par le fait que la moyenne des carrés des réels compris entre 0 et 1 est $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ ou $\frac{0^2+1^2}{2}=\frac{1}{2}$ ou $0^1+1^2=1$ .

Ainsi, en dépit du fait que le questionnaire porte clairement sur l'intégrale, seulement 10 étudiants (soit environ 13%) ont compris que la question relève du calcul intégral. Tous ces étudiants ont obtenu le bon résultat.

**Question $Q_{25}$**

La proposition est jugée «*Vraie*» par 8 étudiants de $G_1$ et par 6 étudiants de $G_2$, «*Fausse*» par 24 étudiants de $G_1$ et par 26 étudiants de $G_2$. Elle n'a pas été renseignée par 5 étudiants du premier groupe et par 7 étudiants du deuxième groupe.

L'examen des réponses des étudiants met en évidence un grand nombre d'erreurs. Au total, nous avons relevé exactement 5 réponses recevables :

- $\int_1^2 x\,dx \neq \sqrt{\int_1^2 x^2\,dx}$ *car* $\frac{3}{2}\neq\sqrt{\frac{5}{3}}$ [9].
- *Si* $f(x)=x^2$ *alors* $\int_a^b f(x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b$ *et* $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_a^b\neq\left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b$
- $\int_a^b f(x)\,dx$ *peut être positive ou négative mais* $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$ *est toujours positif.*

Les autres réponses contiennent plusieurs erreurs dont voici quelques exemples :

- *Vrai, car* $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ *et* $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}=\sqrt{[F(b)-F(a)]^2}=F(b)-F(a)$
- *Vrai, car* $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}=\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$ .
- *Faux, car* $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ *et* $\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}=\sqrt{\frac{1}{2}F(b)^3-\frac{1}{2}F(a)^3}$ .

9 En fait $\sqrt{\int_1^2 x^2\,dx}=\sqrt{\frac{7}{3}}$

Dans la première réponse, nous relevons une erreur déjà pointée par certains enseignants du supérieur $\int_a^b [f(x)]^2 dx = \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2$ à laquelle s'ajoute une autre, assez fréquente chez les élèves en lycée, en l'occurrence $\sqrt{X^2} = X$ .

La deuxième réponse met en lumière une autre erreur $\sqrt{\int_a^b u(x) dx} = \int_a^b \sqrt{u(x)} dx$ (u étant une fonction continue et positive sur [a, b]).
Dans la dernière réponse, l'erreur pourrait consister à voir qu'une primitive de la fonction $u^n (n \geq 2)$ est $\frac{1}{n+1} u^{n+1}$ , bien qu'il reste à justifier le coefficient $\frac{1}{2}$ . Une deuxième erreur, non moins importante, est l'absence de contrôle sur les calculs, en ce sens que rien n'assure que $F^3(b) - F^3(a) \geq 0$ , ce qui doit suffire pour disqualifier l'égalité donnée dans cette réponse.

### 2.3 Synthèse des erreurs enregistrées

Rappelons d'abord que les connaissances interrogées relèvent de deux niveaux différents: Les premier niveau est celui des *connaissances basiques* et renvoie aux questions $Q_{11}$, $Q_{12}$, $Q_{14}$ et $Q_{15}$. Le deuxième niveau est celui des *connaissances élaborées* et renvoie aux questions $Q_{13}$, $Q_{21}$, $Q_{22}$, $Q_{23}$, $Q_{24}$ et $Q_{25}$. Qui plus est, ces connaissances sont considérées comme le minimum requis en première année d'université.

Un compte rendu des erreurs enregistrées à partir de l'examen des copies des étudiants est résumé dans le tableau suivant. Nous avons placé dans la colonne «*autres*» toutes sortes de confusions qui ne sont pas de l'ordre de la logique formelle telles que, par exemple: «*l'aire est une valeur constante donc elle permet d'expliciter les fonctions définies comme polynômes de degré 1*»; «*oui l'aire permet d'expliciter certaines primitives pour connaître la dérivée* ».

| | Erreur → | Identification | | | | Validité | | | | Confusion | | | | Pas de réponse | | Totaux | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Question ↓ | Aire Intégrale | | Primitive Intégrale | | Interne | | Externe | | CN-CS Équivalence | | Autres | | | | | |
| | | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ |
| Connaissances basiques | $Q_{11}$ | 15 | 14 | 13 | 15 | 28 | 29 | 1 | 2 | | | 7 | 8 | 2 | | 64 | 68 |
| | $Q_{12}$ | 28 | 25 | | 1 | 29 | 27 | 1 | 4 | | | 2 | 1 | 1 | 1 | 60 | 58 |
| | $Q_{14}$ | 5 | 3 | | | | | | | | | | | | 4 | 5 | 3 |
| | $Q_{15}$ | | 1 | | | 1 | | | | | | | | 10 | 7 | 1 | 1 |
| Connaissances élaborées | $Q_{13}$ | | | | | 2 | 3 | | 6 | 16 | 16 | 2 | 1 | 5 | 4 | 20 | 26 |
| | $Q_{21}$ | | 1 | 2 | 3 | 5 | 9 | 13 | 11 | 19 | 19 | 4 | | | | 43 | 43 |
| | $Q_{22}$ | | | | | | | 8 | 15 | | 2 | 2 | 2 | 18 | 9 | 10 | 19 |
| | $Q_{23}$ | | | | | | 2 | 13 | 18 | 11 | 6 | 2 | 2 | | 2 | 26 | 28 |
| | $Q_{24}$ | | | | | 2 | 2 | 14 | 19 | | 1 | 2 | 2 | 7 | 6 | 18 | 24 |
| | $Q_{25}$ | | | | | 10 | 11 | 15 | 21 | | | 2 | 2 | 5 | 7 | 27 | 34 |
| Totaux | | 48 | 44 | 15 | 19 | 77 | 83 | 65 | 96 | 46 | 44 | 23 | 18 | 48 | 40 | 274 | 304 |

Les connaissances basiques

Comme on peut le constater sur le tableau ci-dessus, les résultats sont assez éloquents: sur les 279 (environ 92%) réponses reçues, nous relevons 260 erreurs (environ 93%) dont 120 erreurs d'identification, 124 erreurs de validité du savoir et/ou du savoir-faire utilisés et 18 erreurs entre confusion, imprécision et contre-sens. Les erreurs d'identification consistent à traiter les notions d'intégrale et d'aire, d'intégrale et de primitive ou les trois notions à la fois en synonymes. Ces erreurs d'identification sont souvent doublées d'erreurs de validité des savoirs utilisés. Il s'agit surtout d'erreurs sur les conditions d'utilisation de la formule de Newton-Leibniz et sur l'interprétation de l'intégrale en termes d'aire.

L'examen des copies des étudiants permet de constater que même les étudiants ayant défini l'intégrale par la formule de Newton-Leibniz dans la question $Q_{11}$ répondent par $\int_a^b f(x)dx = aire(S)$ dans la question $Q_{12}$ ce qui donne à penser que dès que la situation évoque la notion d'aire, la plupart des étudiants interprètent l'intégrale en termes d'aire sans jamais chercher à vérifier les conditions de validité d'une telle interprétation.

Les connaissances élaborées

d'après le tableau précédent, il nous semble que le constat global sur ces erreurs est assez proche de ce que nous avons observé dans la première série de questions. En effet, sur les 393 réponses recueillies nous avons enregistré 318 erreurs (environ 81%). Ces formes d'erreurs sont inhérentes non seulement aux conditions de la validité des savoirs et des savoir-faire mobilisés par les étudiants mais à toute la rigueur et à toute la logique mathématiques. La plupart des réponses fournies par les étudiants donnent pour vraies des implications qui ne le sont pas, ce qui donne à penser qu'ils ne distinguent pas entre condition nécessaire, condition suffisante et équivalence.

L'analyse révèle le caractère lacunaire et inadéquat des connaissances des étudiants ayant répondu au questionnaire. Ce constat se confirme encore à travers les résultats enregistrés dans les questions $Q_{22}$, $Q_{24}$ et $Q_{25}$. Sur les 393 réponses fournies par les étudiants aux questions se rapportant aux connaissances élaborées, nous avons relevé 289 (soit environ 74% ) erreurs réparties comme suit:

| Erreur | Validité interne | Validité externe | Confusion CN-CS-EQ |
|---|---|---|---|
| Nombre d'erreurs | 46 | 153 | 90 |

Dans la façon dont se présentent les réponses des étudiants, la différence entre condition nécessaire, condition suffisante et équivalence tend à disparaître. En examinant de plus près ces réponses, on constate que les idées et les connaissances mobilisées par les étudiants manquent de clarté et de précision, voire de cohérence. Dans leur grande majorité, ces étudiants n'expliquent pas leurs réponses, ils ne les justifient pas. Quand ils répondent, la réponse est une simple affirmation qui juge à l'aide d'arguments le plus souvent inadéquats et sans fondements.

Enfin, nous avons examiné le recours des étudiants aux contre-exemples et au graphique pour justifier leurs réponses. Cet examen a permis de recenser exactement un contre-exemple et trois dessins dans le premier groupe, sept contre-exemples et quatre dessins dans le deuxième groupe. Parmi tous les contre-exemples et tous les graphiques rencontrés, nous avons relevé un seul contre-exemple et un seul dessin qui remplissent leur fonction. Ce constat pourrait traduire le fait que la contre-exemplification, qu'elle soit d'ordre graphique, algébrique ou autre, n'est pas d'un usage courant chez ces étudiants.

À la lumière des résultats que nous venons d'exposer nous pouvons dire que, chez une majorité des étudiants interrogés, on n'atteint même pas le palier des connaissances basiques. Dès lors, hormis des connaissances calculatoires hypothétiques, les connaissances des étudiants concernés par notre questionnaire rencontrent leurs limites, et sévèrement, au premier niveau. Si nous avons maintenant une idée du niveau auquel se limitent les connaissances des étudiants, nous n'avons pas encore insisté sur ce que sont leurs conditions.

Comme nous l'avons précisé au début de ce chapitre, les formes d'erreurs telles qu'elles ont été définies constituent un moyen approprié pour éclairer et saisir les connaissances des étudiants. Pour mieux préciser les résultats de notre analyse, nous allons les examiner selon la spécificité de chacune des trois formes d'erreurs que nous avons distinguées auparavant.

Erreurs d'identification

Comme nous l'avons précisé dans l'analyse a priori les questions $Q_{11}$ et $Q_{12}$ nous semblent bien désignées pour saisir cette forme d'erreurs. Les résultats issus de l'examen de ces deux questions (voir tableau ci-dessous) laissent voir des disparités dans les erreurs d'identification entre aire et intégrale, d'une part, et entre primitive et intégrale, d'autre part.

| Erreur | Identification aire-intégrale | | Identification primitive-intégrale | | Pas de réponse | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ |
| Nombre d'erreurs | 43 | 39 | 13 | 15 | 3 | 1 |

Comme on peut le voir, l'identité entre aire et intégrale est une erreur avérée dans 82 réponses sur un total de 148 réponses reçues (environ 55%). Dans la mesure où les résultats sont obtenus à partir des réponses des étudiants à deux questions différentes dont l'une, en l'occurrence $Q_{12}$, est précise et explicite, nous considérons qu'il est assez fiable. En revanche, l'identité entre primitive et intégrale se donne à voir comme une erreur moins fréquente (28/148, soit environ 19%). Mais c'est peut être parce que nous ne l'avons pas interrogé directement comme nous l'avons fait avec la première, en ce sens qu'il n'a pas été explicitement demandé aux étudiants de comparer $\int_a^b f(x)dx$ et $F(x)$ où $f$ est une fonction continue sur un intervalle $I$ contenant $a$ et $b$ et $F$ est une primitive de $f$ sur $I$.

Ces erreurs d'identification semblent bien installées chez un bon nombre d'étudiants. Ce sont des connaissances inadaptées qui se recommandent pourtant aux yeux de beaucoup d'étudiants d'une validité et d'une efficacité, dans la mesure où elles leur ont permis une certaine réussite dans le contexte stéréotypé des exercices en classe terminale. Un élève à qui on a régulièrement demandé de manipuler des intégrales pour calculer des aires pourrait finir par acquérir la conviction que l'intégrale n'est pas autre chose qu'une aire.

Erreurs de confusion

Les formes d'erreurs dont il est question ici concernent la confusion entre condition nécessaire, condition suffisante et équivalence logique, d'une part, et toutes autres sortes de confusions, d'autre part. Comme nous l'avons précisé dans l'analyse a priori, ces formes d'erreurs sont traquées à travers les questions $Q_{13}$, $Q_{21}$ et $Q_{23}$. Les résultats issus de l'examen des réponses des étudiants à ces trois questions sont résumés dans le tableau suivant :

| Erreur | $CN - CS - EQ$ | | Autres | | Pas de réponse | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ |
| Nombre d'erreurs | 46 | 41 | 8 | 3 | 5 | 6 |

Comme on peut le constater dans ce tableau, le nombre d'erreurs de confusions, surtout entre condition nécessaire et condition suffisante, est considérable. Pour mieux comprendre ces résultats, il nous faut rappeler que, dans ces trois questions, très peu d'étudiants ont produit des réponses recevables (15 réponses au total, soit environ 7%). Les autres étudiants ayant répondu par «faux» sans aucune forme de justification. Dès lors, il y a lieu de penser que la majorité des étudiants ont à propos des propriétés de l'intégrale des connaissances confuses et inadéquates.

Erreurs de validité

Ces erreurs sont observables dans toutes les questions. L'examen des copies des étudiants a donné les résultats suivants :

| Erreur | Validité interne | | Validité externe | | Pas de réponse | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_1$ | $G_2$ |
| Nombre d'erreurs | 77 | 83 | 73 | 99 | 57 | 42 |

Ces résultats donnent à voir l'importance des difficultés et des faiblesses des étudiants interrogés. Des faiblesses au niveau des conditions de validité des énoncés mathématiques qu'ils utilisent. C'est le cas, par exemple dans la question $Q_{11}$ à propos de la définition de l'intégrale . Aucun des 28 étudiants ayant défini l'intégrale par la formule de Newton-Leibniz n'a évoqué la continuité de *f* pour justifier l'existence d'une primitive . Des difficultés à reconnaître qu'une tâche relève du calcul intégral, à manipuler et à contrôler des opérations algébriques. Nous voyons par exemple que 19 étudiants (soit 25%) n'ont pas répondu à la question $Q_{22}$ et que 47 autres (soit environ 62%) n'ont produit sur la question que des réponses confuses ou absurdes. Mais le cas de la question $Q_{25}$ est plus instructif. En effet, 34 étudiants (environ 45%) n'ont pas répondu à cette question et 37 autres ont produit toutes sortes d'erreurs. Cette question rend compte des difficultés qu'ont les étudiants interrogés à comprendre une tâche mathématique qui se distingue des tâches qui leur sont familières de type «*calculer l'intégrale*».

Cette question a permis de faire apparaître toutes sortes d'erreurs où se déploient côte à côte les conceptions les plus singulières, les plus absurdes et les plus aberrantes. En fait ces erreurs s'interprètent aussi bien en termes de confusion qu'en termes de validité des connaissances et montrent dans le même temps la présence de beaucoup de vrai dans les propos de certains enseignants d'université lorsqu'ils parlent de connaissances incomplètes, voire fausse et inutilisables.

## Conclusion

L'examen des copies des étudiants nous a permis de dégager au moins quatre résultats importants qui répondent assez bien aux questions posées dans l'introduction.

1. C'est l'identification entre aire et intégrale qui se distingue par son ampleur. Pour 53 étudiants (soit environ 70%) parmi les 76 étudiants ayant répondu au questionnaire, l'intégrale n'est pas autre chose qu'une aire. C'est ici, plus qu'ailleurs, que l'on peut saisir une première limite des connaissances des étudiants ayant cette conception de l'intégrale. L'analyse de cette limitation fait bien apparaître le problème: les élèves ayant manipulé en classe terminale le calcul d'intégrales pour évaluer des aires, finissent par traiter l'intégrale et l'aire en tant que synonymes. Le rapport que ces étudiants ont avec la notion d'intégrale est inadéquat en ceci que cette dernière est interprétée en termes d'aire en dehors de toute considération sur les propriétés que la fonction possède ou ne possède pas. Ce résultat est attendu en regard des conclusions de l'analyse du manuel scolaire.

2. Le deuxième résultat, non moins important, concerne la question de validité des connaissances des étudiants en rapport avec les savoirs et les savoir-faire scolaires qu'ils utilisent. L'analyse des copies rend compte que les étudiants ne cherchent pas, et peut-être ne comprennent pas, les conditions qui valident les résultats mathématiques qu'ils utilisent et qu'ils produisent; aussi observe-t-on certains étudiants invoquer des arguments de dérivabilité là où ils ont besoin de la continuité seulement, de monotonie de la fonction à la place de son signe, etc.. Ce constat donne à voir des imprécisions et des imperfections qui invalident une grande partie des connaissances des étudiants interrogés et confirme la croyance dominante chez beaucoup d'enseignants d'université.

3. Le troisième résultat qui est directement liée à la fois aux conditions et aux limites des connaissances des étudiants interrogés touche la logique mathématique. Les étudiants, dans leur grande majorité, confondent entre condition nécessaire, condition suffisante et équivalence. Leurs réponses recèlent beaucoup d'incohérences et de contresens, le plus souvent conséquences des erreurs d'identification. Dans la mesure où ces erreurs sont observées sur des réponses effectives de la majorité des étudiants, il nous semble qu'elles expriment plus que de simples confusions, elles pourraient constituer pour ces étudiants un ordre de faits qui est inadéquat. Comme souvent ces confusions se déploient dans l'action qui, à son tour, les perpétue et les renouvelle, l'ordre de faits qu'elles gouvernent risque de mettre en échec la construction par ces étudiants de connaissances adéquates sur la notion d'intégrale et, à partir de là, les empêcher d'accéder à un niveau supérieur de connaissances.

4. Le dernier résultat que notre analyse retient concerne la place de la contre-exemplification dans la démarche mathématique des étudiants. L'examen des copies (77 copies) des étudiants interrogés nous a permis de recenser 7 dessins et 8 contre-exemples dans le registre algébrique dont un seul dessin et une seule fonction définie par son expression algébrique conviennent. Ce résultat rend compte de la faiblesse des étudiants en termes de production de contre-exemples et en termes d'opérations sémiotiques. Il y a ici ce qui pourrait confirmer ce que nous disions à propos du fait que le recours à des contre-exemples, pourtant d'une grande pertinence dans l'activité mathématique, est un outil très sous-utilisé dans l'enseignement tunisien.

À la lumière de ces résultats, mais aussi de l'analyse du manuel scolaire et des épreuves du baccalauréat, nous estimons, avec toutes les précautions qui s'imposent, que l'orientation qui gouverne l'enseignement de l'intégrale en classe terminale n'atteint pas les objectifs fixés dans les textes du programme officiel et ne prépare pas au mieux les nouveaux bacheliers au premier cycle d'université.

## Bibliographie

BARRIER T. (2011) *Les pratiques langagières de validation des étudiants en analyse réelle*, RDM Vol. 31/3.

BLOCH I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation.* Thèse, Université Bordeaux 1.

GONZALEZ-MARTIN A. S. (2005), *La généralisation de l'intégrale définie depuis les perspectives numérique, graphique et symbolique en utilisant des environnements informatiques* : *problèmes d'enseignement et d'apprentissage*.Thèse, Université La Laguna, Tenerife.

HADDAD S. (2006) *Enseignement de l'intégrale entre la classe terminale et la première année de l'enseignement supérieur,* Mémoire de mastère, Université de Tunis.

HADDAD S. (2012) *L'enseignement de l'intégrale en classe terminale de l'enseignement tunisien*. Thèse, Université de Tunis (ISEFC), Université Paris Diderot (Paris 7).

ROBERT A. (2005) *Quelles différences y a-t-il... ?* Bulletin de l'APMEP. Num. 457.

VERGNAUD G. (1990) *La théorie des champs conceptuels*, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.10 n°2-3, pp.133-170.