POINT DE DÉPART

MISS TROISPOINTES[1]

Miss Troispointes est une passionnée de puzzles.

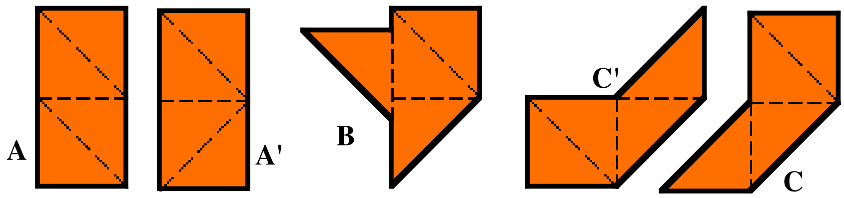
Avec quatre triangles égaux, rectangles et isocèles, elle arrive à former des polygones différents.

Dans les polygones qu'elle forme, les quatre triangles ne se recouvrent pas et ont chacun au moins un côté commun avec l'un des autres triangles.

Combien Miss Troispointes peut-elle former de polygones différents avec quatre de ses triangles ?

Classez-les selon le nombre de leurs côtés.

Exemples : A est une solution acceptable, c'est la même que A', car les deux rectangles sont égaux même si les triangles n'y sont pas disposés de la même manière. B n'est pas une solution acceptable pas car le triangle de gauche n'a pas de côté commun (sommets compris) avec celui d'un autre triangle. C et C' sont égaux, car on peut les superposer exactement, ils ne représentent donc qu'une seule et même solution.



Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

---

[1] Problème du 10ème *Rallye mathématique transalpin* (2002) repris dans la brochure *Ateliers de résolution de problèmes avec matériel* du Rallye mathématique Transalpin (RMT) www.armtint.org

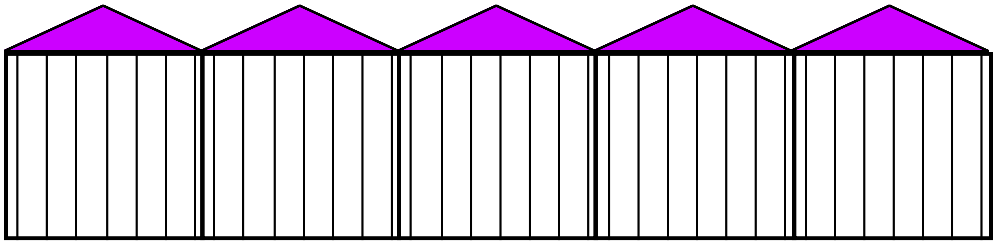
POINT DE DÉPART

À LA MÉNAGERIE[2]

À la ménagerie, vous êtes devant cinq cages, alignées les unes à côté des autres.

- La cage du zèbre n'est ni à côté de celle de l'ours, ni à côté de celle de la panthère ;
- Il y a deux cages entre celle du tigre et celle de l'ours ;
- La cage de la panthère est à droite de celle de l'ours, elles sont l'une à côté de l'autre ;
- La cage du lion est à côté de celle du zèbre.

Placez dans chacune des cinq cages l'animal qui l'occupe.



Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

[2] Problème du 3ème *Rallye mathématique romand* (1996) repris dans la brochure *Ateliers de résolution de problèmes avec matériel* du Rallye mathématique Transalpin (RMT) www.armtint.org

Miss Troispointes
À la ménagerie
premières réflexions

(par François Jaquet)

MISS TROISPOINTES

Ce point de départ se situe dans le domaine de la géométrie, où l'on fait appel à la reconnaissance de figures égales ou différentes - qui ne peuvent pas se superposer par translations, rotations ou symétries axiales. Il exige aussi un recours à la combinatoire pour organiser l'inventaire exhaustif des figures.

Quelles sont les tâches des élèves dans cette activité ?

- Comprendre les consignes de construction par la lecture du texte et la vérification des exemples : triangles qui ne se superposent pas et qui ont un côté commun entier, polygones différents (qui ne sont pas superposables).

À partir de là, la recherche peut commencer.

- Former (avec des triangles découpés ou par le dessin) de premiers polygones et les déposer l'un à côté de l'autre pour les comparer et vérifier s'ils sont différents ou non.

Lorsqu'une dizaine de polygones ont été construits ou dessinés, le besoin d'organiser la recherche devrait émerger. Il s'agit en effet de dresser un inventaire des figures, sans doublons et sans oublis.

Il y a de nombreuses manières d'organiser cet inventaire, selon le degré de rigueur auquel les élèves ont accès.

En voici une, selon une procédure « par construction progressive » :

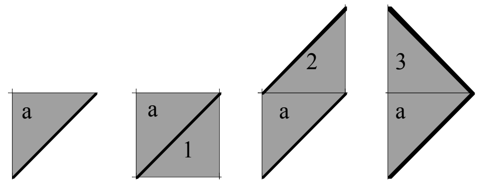


Figure 1

Un triangle (a) est choisi, on lui adjoint un deuxième triangle, de toutes les manières possibles et on obtient trois figures distinctes : un carré (a.1), un parallélogramme (a.2) et un triangle (a.3).

On reprend les trois polygones composés de deux triangles obtenus précédemment et on leur adjoint un troisième triangle pour obtenir (*Figure 2*) : un trapèze rectangle (a.1.1), un trapèze isocèle (a.2.3) et deux polygones à cinq côtés : (a.2.2) et (a.3.4).

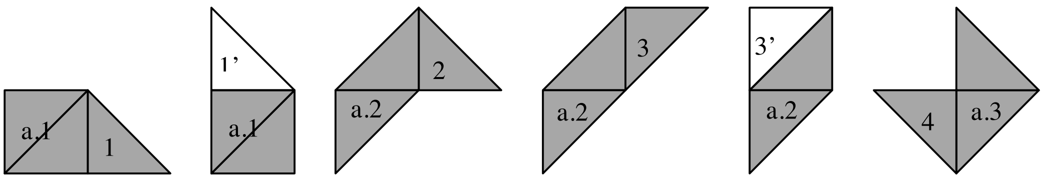


Figure 2

On remarque ici que les polygones (a.1.1), (a.1.1') et (a.2.3') sont égaux ou superposables et qu'un seul doit être pris en compte. Cette méthode de construction exige donc un contrôle rigoureux de chaque polygone qui apparaît lorsqu'on ajoute un triangle à une figure précédente.

Finalement, on reprend les quatre polygones composés de trois triangles et à chacun d'eux, on adjoint le quatrième triangle dans toutes les positions possibles le long de son pourtour. La *Figure 3* présente les huit polygones obtenus à partir de (a.1.1) par adjonction du quatrième triangle, dans le sens inverse des aiguilles de la montre : un rectangle (a.1.1.1), un triangle (a.1.1.2), un polygone à 5 côtés sans axe de symétrie (a.1.1.3), un trapèze isocèle (a.1.1.4), un parallélogramme (a.1.1.5), et trois polygone à 6 côtés dont le premier, (a.1.1.6), a un axe de symétrie et les deux autres (a.1.1.7) et (a.1.1.8), n'en ont pas.

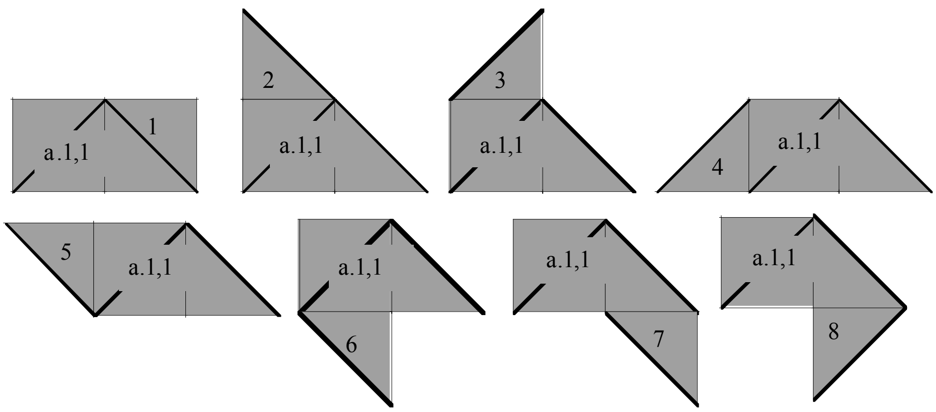


Figure 3

Les six autres polygones composés de quatre triangles, différents des précédents et obtenus à partir des polygones (a.2.2), (a.2.3) et (a.3.4) sont présentés sur la *Figure 4*. On remarquera qu'il y en a quatre issus de (a.2.2) : trois polygones à 6 côtés dont l'un (a.2.2.10) a un axe de symétrie et un autre (a.2.2.11) qui a un centre de symétrie, et un polygone à 5 côtés (a.2.2.12) sans axe de symétrie ; un seul issu de (a.2.3), le second parallélogramme (a.2.3.13) ; et un seul issu de (a.3.4) : le carré (a.3.4.14).

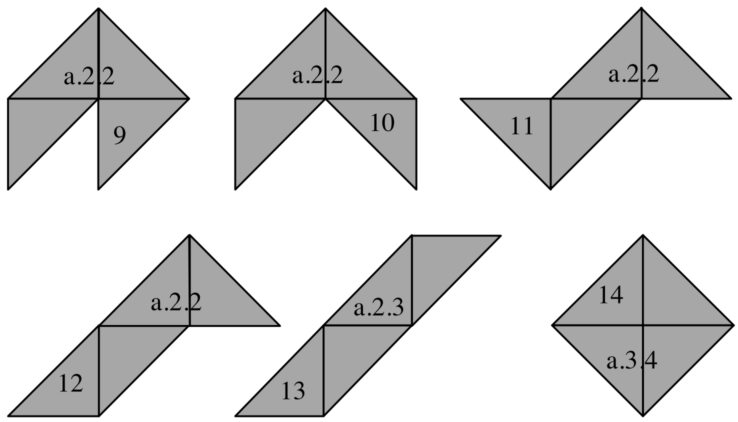


Figure 4

Il y a d'autres manières de dresser l'inventaire. À l'inverse de celle qui est décrite précédemment, on peut partir d'un des polygones complets et déplacer un de ses triangles constituants en le replaçant successivement sur tous les autres côtés du même polygone. Par exemple, en partant du dernier carré (a.3.4.14) ci-dessus et en déplaçant le triangle 14, on obtient successivement le polygone à 6 côtés (a.2.2.9) puis un polygone à 6 côtés (a.1.1.8) sans axe de symétrie et le polygone à 6 côtés (a.1.1.6) avec un axe de symétrie. On peut répéter la procédure en déplaçant un autre triangle de l'un de ces trois derniers polygones, etc.

On peut aussi, comme le feront sans doute les jeunes élèves, trouver les différents polygones par essais non organisés et comparaisons avec les figures déjà trouvées. Dans ce cas, l'exhaustivité n'est pas assurée et difficile à contrôler.

Chacune de ces procédures exige un examen attentif des polygones pour déterminer ceux qui sont isométriques. La construction effective à l'aide du matériel facilite la reconnaissance, car les objets ainsi créés peuvent être placés côte à côte ou « en miroir » pour les comparaisons.

Les savoirs mathématiques

Pour dresser l'inventaire des polygones de « Miss Troispointes », toutes les connaissances mathématiques sur les isométries dans le plan sont mises en oeuvre, sans être explicitées ni formalisées. En effet, les comparaisons des figures font intervenir les trois types de « mouvements » de base qui conservent les distances : translations, rotations (et symétrie centrale), symétries axiales.

En conservant les constructions effectives ou une trace écrite des polygones trouvés, lors de la vérification de l'inventaire, les élèves peuvent expliciter certaines de leurs connaissances sur les isométries. L'égalité ou l'inégalité de deux figures peut ainsi être expliquée par la description du mouvement qui permet de les superposer : *on la glisse* ; *on la tourne* ; *si on retournait celle-ci, elle recouvrirait celle-là* ; ou par certaines propriétés : *ces deux sont des parallélogrammes (a.1.1.5 et a.2.2.12), mais celui-ci a des côtés plus longs que celui-là* ; *ces deux n'ont pas le même nombre de côtés* ; …

L'autre intérêt mathématique de l'activité est la procédure d'inventaire assurant l'exhaustivité.

Commentaires sur la pratique de ce point de départ

La pratique de ce point de départ dépend naturellement du matériel à disposition. Dans les « Ateliers » du RMT[3], une soixantaine de triangles de bois (demi-carrés de 2 à 3 cm de côté) sont à disposition des élèves. Les très nombreuses expérimentations ont montré que de jeunes enfants peuvent alors former les figures, les placer proches les unes des autres, les glisser ou les tourner pour les comparer, sans toutefois pouvoir les « retourner » (symétrie axiale) sans les « démonter ».

La recherche des figures à l'aide de matériel peut donc être proposée dès le CE2 ou le CM1, mais il faut être conscient que, pour des élèves de cet âge, il faudra de nombreuses confrontations pour arriver aux 14 polygones cherchés : par des comparaisons directes au sein d'un groupe d'élèves, par des mises en commun, par un affichage progressif des différentes solutions dessinées ...

Une trace est nécessaire pour la validation de l'inventaire, au-delà de la simple exposition éphémère des assemblages de triangles. On peut imaginer des collages, un dessin sur un quadrillage où les triangles sont des demi-carrés, un dessin sur papier blanc qui exige soit l'usage des instruments de dessin géométrique pour des tracés précis, soit la réalisation de dessins à main levée qui peuvent rendre la comparaison des figures plus délicate. La trace peut être accompagnée d'une description faisant intervenir la terminologie de la géométrie : noms et caractéristiques des figures, des transformations géométriques. Cette tâche est donc différentiable, selon le degré scolaire des élèves.

Il existe de nombreuses variantes à cette activité. Il suffit de modifier le nombre et/ou la forme des figures à disposition pour entrer dans de nouvelles recherches.

À LA MÉNAGERIE

Cette activité peut être proposés dès le CE1 ou CE2, du moment où les élèves sont en mesure de reconnaître les positions relatives de deux objets, par rapport à la gauche et à la droite.

Quelles sont les tâches des élèves ?

Lire l'énoncé, comprendre que les cinq animaux sont le zèbre, l'ours, la panthère, le tigre et le lion. Prendre conscience qu'aucune des phrases, seule, ne permet de déterminer la cage d'un de ces cinq animaux et que toutes sont nécessaires.

Placer les animaux au hasard et puis modifier leur place selon la lecture des consignes. Par exemple, si on met le zèbre au milieu, il y a encore deux possibilités pour placer le tigre et l'ours selon la première et deuxième consignes : ours / __ / zèbre / tigre __ ou ainsi : __ / tigre / zèbre / __ / ours, mais, dans un cas comme dans l'autre, il y a une contradiction au moment de placer la panthère selon la troisième consigne.

[3] Voir note 1.

Renoncer aux essais au hasard et organiser la recherche de manière plus systématique. Par exemple, à la suite de l'essai décrit précédemment, décider de placer le zèbre successivement sur toutes les autres cases en commençant par celle de gauche. Cette méthode aboutit lorsque le zèbre est en deuxième position depuis la gauche à la solution : tigre / zèbre / lion / ours / panthère qui vérifie les quatre consignes ; mais elle ne permet pas de savoir si la solution est unique.

Choisir parmi les quatre consignes, celle qui paraît limiter au maximum les choix à opérer. Par exemple, en commençant pas la deuxième, il n'y a que quatre dispositions du tigre et de l'ours :

(a) ours / __ / __ / tigre __ (b) tigre / __ / __ / ours __

(c) __ /ours / __ / __ / tigre (d) __ / tigre / __ / __ / ours

La quatrième consigne disant que le lion est à côté du zèbre montre que ces deux animaux se situent entre l'ours et le tigre (valable dans les quatre dispositions ci-dessus). La troisième consigne précisant que la panthère doit être à droite de l'ours élimine la dernière disposition ci-dessus ((d), qui n'a pas de place à droite de l'ours), mais aussi la première et la troisième ((a) et (c) ou les places à droite sont déjà occupées par le lion ou le zèbre).

Il ne reste plus alors que la deuxième disposition (b) pour placer la panthère (troisième consigne) et les deux derniers animaux, le lion et le zèbre : tigre / **zèbre / lion** / ours / panthère, de manière que le zèbre ne soit pas à côté de l'ours, selon la première consigne.

Cette méthode permet de se convaincre que la solution trouvée est unique.

Développement mathématique

L'analyse précédente de la tâche de résolution montre que, au-delà de la lecture et de la connaissance de la droite et de la gauche, ce sont des opérations logiques qui sont mises en œuvre dans la résolution de ce problème.

L'adoption d'une méthode systématique est le premier enjeu. On peut choisir un animal et envisager toutes les cages où il pourrait se trouver, puis vérifier si cette position est compatible avec chaque consigne. Cette méthode est celle d'un « inventaire exhaustif », qui ne se conclut pas lors de la découverte d'une première solution mais qui doit se poursuivre jusqu'à l'épuisement des possibilités.

Un autre enjeu est le procédé par « éliminations successives ». On choisit une des contraintes du problème (consigne) et l'on dresse l'inventaire des dispositions qui la satisfont. On prend ensuite une deuxième contrainte et, pour chaque disposition retenue précédemment, on procède au rejet de celles qui ne la satisfont pas. Ainsi de suite, chaque contrainte conduit à l'élimination ou à la conservation des dispositions précédentes.

Les inventaires et éliminations s'entremêlent et les décisions sont prises en termes de « oui ou non » selon les principes logiques de la négation ou du « tiers exclu » (ou l'un, ou l'autre, mais pas les deux).

Commentaires sur la pratique de ce point de départ

La seule réponse correcte, c'est-à-dire la position des animaux dans leur cage ou un dessin ou une liste ordonnée, ne permet évidemment pas de savoir comment l'élève a procédé, ni s’il a trouvé la solution au hasard. Il est donc nécessaire d’aller plus loin et de demander une explication.

Pour de jeunes élèves, il est très difficile d’expliquer par écrit ce qu’ils ont fait pour trouver. Ils se contentent en général de recopier les consignes, ce qui leur fournit une vérification. C’est lors d’un débat que peuvent apparaître les différentes phases des raisonnements suivis. Et ce débat doit être la plupart du temps stimulé par des questions de l’enseignant, du genre : « Quel est l’animal que vous avez pu placer en premier ? » « Pourquoi celui-ci ne pourrait-il pas être là ? », « Êtes-vous certains qu’il n’y a qu’une seule solution ? » etc.

Comme développements, il existe de nombreux problèmes analogues, de dispositions, de sériations dans l’espace et dans le temps qui permettent aux élèves de se familiariser avec les inventaires exhaustifs et éliminations successives.

Ces problèmes ne sont toutefois pas toujours faciles à créer et nécessitent un patient travail d’analyse préalable pour le choix des contraintes, afin qu’elles autorisent au moins une solution et qu’elles ne soient pas redondantes (qu’elles soient toutes nécessaires).

Il y a aussi des difficultés, dans les problèmes où la gauche et la droite interviennent, liées aux positions relatives de l’enfant qui résout le problème et des objets ou êtres vivants à disposer. Dans l’exemple de « À la ménagerie » la phrase « Vous êtes devant cinq cages, alignées les unes à côté des autres » est essentielle pour définir la droite et la gauche, du point de vue de l’observateur et non de celui des animaux qui le regardent.