# RAPPORT INSTITUTIONNEL AU CALCUL LITTÉRAL AU COLLÈGE. ÉTAT DES LIEUX ET PERSPECTIVES

Geneviève FERRATON
Collège de la Montagne Ardéchoise - Saint-Cirgues en Montagne
Université Joseph Fourier- MeTAH – LIG Grenoble
Hamid CHAACHOUA
Université Joseph Fourier- MeTAH – LIG Grenoble

**Résumé.** Le calcul littéral, introduit au collège, pose actuellement de réelles difficultés d'apprentissage aux élèves. En fait, transposition dans l'enseignement de l'algèbre dite élémentaire, le calcul littéral est un pur produit de l'institution. Afin de caractériser au mieux ce rapport institutionnel au calcul littéral, et plus particulièrement aux types de tâches particuliers que sont réduire, développer et factoriser une expression littérale, cet article utilise la notion didactique de praxéologie. L'objectif principal est de procéder à une analyse assez fine de l'approche proposée actuellement par le système d'enseignement et plus particulièrement par les manuels scolaires.

**Mots-clés.** Calcul littéral, algèbre, praxéologie, modèle de référence, réduction, développement, factorisation.

**Abstract.** The introduction of the literal calculation at the level of secondary school is a source of difficulties for students. Actually, the "literal calculation" is a transposition of elementary algebra to school teaching. In order to characterize the institutional relation to literal calculation – and especially to the tasks consisting in reducing, developing, factorizing a literal expression, this text considers the concept of praxeology. The main purpose is to be able to perform a rather accurate analyse of the approach currently proposed by the teaching system, and especially by text books.

**Key-words.** Literal calculation, algebra, praxeology, reference model, reduction, development, factorisation.

## Introduction

Si le calcul littéral n'existe pas en tant que tel dans le savoir savant, il peut néanmoins être considéré comme une transposition didactique dans l'enseignement de l'algèbre dite élémentaire (Croset, 2009). Remarquons à ce propos que le terme « algèbre» est quasiment absent des nouveaux programmes et, comme le soulignent Chevallard et Bosch (2012), que cette question de terminologie n'est pas anodine et pose diverses questions: y a-t-il effectivement un réel changement dans l'enseignement de l'algèbre et, si oui, quelles peuvent être les raisons de cette évolution? À ce propos, nous renvoyons le lecteur à deux publications récentes Chevallard & Bosch (2012) et Assude, Coppé & Pressiat (2012). Soulignons enfin que les travaux sur l'enseignement de l'algèbre ont été engagés dès les années 80 et que certains ont d'ailleurs fait l'objet de publications dans cette même revue comme ceux de Booth (1984) à propos des erreurs et difficultés des élèves, ceux de Chevallard (1984, 1989), Coulange (2001) et Comin (2009) relatifs au passage de l'arithmétique à l'algèbre, ceux de Sackur et Morel (2000), de Abou Raad et Mercier (2006) mais aussi de Chaachoua et al. (2010) qui portent sur l'étude spécifique d'objets de l'algèbre comme les équations, les expressions factorisables...
Confrontant pour la première fois l'apprenant à l'algèbre, l'introduction du calcul littéral dans le premier cycle du secondaire français ne se fait généralement pas sans mal. Mais, comme le souligne Grugeon dans sa thèse (Grugeon, 1995), il est vrai que :

> la pensée algébrique se construit sur le support de la pensée arithmétique mais aussi en rupture avec cette dernière. Ceci intervient aussi bien dans l'analyse en termes d'outil : opposition caractéristique de la résolution arithmétique à la résolution algébrique (détour algébrique), que dans l'analyse en termes d'objet : opposition des modes d'appréhension des écritures algébriques et numériques (statut du signe d'égalité, statut des lettres), des modes de contrôle dans la transformation des écritures.

En fait, si le calcul littéral s'avère un puissant outil de résolution, il constitue aussi un véritable objet d'étude doté d'un langage propre, qui bien que partageant avec l'arithmétique des symboles et des signes, est régi par ses propres règles.
Notre article porte sur une étude curriculaire des programmes et des manuels pour caractériser l'état actuel de l'enseignement de trois types de tâches qui sont spécifiques à l'algèbre: réduire, développer et factoriser une expression littérale. Il s'agit de comprendre comment ces types de tâches sont définis et de caractériser les praxéologies institutionnelles associées.
Nous nous plaçons donc dans la cadre la théorie anthropologique du didactique et dans la continuité des travaux de Assude (2002) sur l'évolution curriculaire de l'objet «inéquation» ou de ceux de Mercier et Abou Raad (2006) sur la factorisation. Notre objectif est d'expliciter les constituants des techniques de résolution ainsi que les savoirs mathématiques justifiant ces techniques.
Pour cela, nous nous proposons dans un premier temps de revenir rapidement sur la notion de praxéologie et la construction d'un modèle praxéologique de référence (paragraphe 1) dont l'utilisation permet de caractériser le rapport institutionnel actuel aux trois types de tâches considérés mais aussi de l'analyser (paragraphe 2).

# 1. Vers un modèle praxéologique de référence

## 1.1 Notion de praxéologie

C'est au sein de la théorie anthropologique du didactique (ou TAD), introduite par Chevallard (Chevallard, 1992), qu'apparaît la notion de praxéologie. La TAD situe en effet l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales. Elle considère ainsi que toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T, au moyen d'une technique $\tau$ , justifiée par une technologie $\theta$ qui permet en même temps de la penser voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie $\Theta$. Ces notions vont donc permettre de modéliser les pratiques sociales en général et l'activité mathématique en particulier. Ainsi, toute activité humaine met en œuvre une organisation que Chevallard note $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et nomme praxéologie ou organisation praxéologique. On parle de praxéologie mathématique ou d'organisation mathématique (notée par la suite OM) lorsque les types de tâches T relèvent des mathématiques.

Nous avons choisi ce cadre théorique afin d'étudier, par l'analyse praxéologique des programmes et des manuels, le rapport institutionnel à l'objet « calcul littéral » en nous restreignant aux trois types de tâches que sont réduire, développer et factoriser une expression littérale. Cette analyse praxéologique repose sur l'identification des OM à enseigner et débute par la caractérisation des types de tâches institutionnels; c'est donc une véritable «reconstruction» du chercheur à partir de l'analyse des programmes et des manuels. Notons aussi que le chercheur peut procéder à un autre découpage que celui de l'institution, voire le compléter, pour des raisons liées à sa problématique (Chaachoua, 2010). Il s'agit donc de construire une OM de référence (Bosch & Gascon, 2004) qui doit prendre en compte les OM à enseigner, enseignées mais également enseignables. Le modèle permet ainsi d'analyser ce qui a cours dans différentes instances d'un système d'enseignement (comme les manuels ou le cours d'un enseignant), de rendre compte de la variété des OM à enseigner, de repérer et donc de pallier les manques éventuels. Cette construction repose bien entendu sur une analyse épistémologique, cognitive et didactique.

### 1.2 Modalités de construction du modèle

Nous nous sommes tout d'abord attachés à définir précisément les trois types de tâches: réduire, développer et factoriser une expression littérale. Cette dernière pouvant être, à juste titre, considérée comme la transposition de la notion de polynôme de **R**[X], nous avons fait les choix suivants :

- $T_{Red}$ : écrire l'expression littérale considérée comme une somme de monômes non semblables.
- $T_{Dev}$ : écrire l'expression littérale considérée comme une somme de monômes.
- $T_{Fact}$: écrire l'expression littérale considérée comme un produit de polynômes.

Un de nos objectifs est de comparer ces définitions, dites de référence, avec celles proposées par différents manuels.
Reprenant ensuite la démarche proposée dans Chaachoua (2010), il nous a fallu déterminer les sous-types de tâches associés à $T_{Red}$, $T_{Dev}$ et $T_{fact}$. En effet, un type de tâches T étant donné, une OM ponctuelle (notée OMP) regroupe les tâches pouvant être accomplies par une seule technique, justifiée par une technologie, elle-même légitimée par une certaine théorie. Mais, pour un même type de tâches, plusieurs techniques peuvent parfois être envisagées. C'est ainsi qu'à certains types de tâches peuvent être associées plusieurs OMP, l'agrégat de ces dernières formant ce que l'on appelle une OM complexe (Castella, 2008). Mais alors, en vue d'accomplir T, comment choisir la technique la plus efficace? Il apparaît en fait que, d'une façon générale, l'institution scolaire organise progressivement l'étude des $(OMP_k(T))_k$, c'est-à-dire des $(T/\tau_k/\theta_k/\Theta_k)_k$, tout au long de la scolarité et préfère donc particulariser les énoncés des tâches relatives à chacune de ces $OMP_k$. C'est pourquoi ont été introduits des sous-types de tâches de T, notés $T_k$, correspondant à chacune des techniques $\tau_k$. À terme, l'élève sera pourtant confronté à T dans sa globalité et devra donc de lui-même choisir la technique adéquate. Mais cet aspect n'est généralement pas pris en charge par l'institution scolaire.
Si dans notre modèle nous décrivons un type de tâches par une formulation proche de celle utilisée dans les programmes pour définir les capacités, la caractérisation des techniques a fait l'objet d'un choix différent. Adoptant le point de vue défendu par Chaachoua (2010), nous considérons qu'une technique est décrite par un ensemble de types de tâches, chacun pouvant être doté de sa propre organisation praxéologique.
Les technologies sont quant à elles exprimées en termes de connaissances, théorèmes, propriétés...

### 1.3 Exemple de mise en œuvre

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de restreindre l'exposé effectif de la construction de notre modèle de référence et de ne présenter que quelques éléments de la partie inhérente à la réduction. Le lecteur intéressé en trouvera cependant tous les détails dans Ferraton (2011).
Par notre étude, nous avons pu déterminer huit sous-types de tâches associés à $T_{Red}$ :

- réduire un produit de monômes;
- réduire une somme de monômes de même degré « sans parenthèses » (c'est-à-dire ne comportant pas de somme algébrique entre parenthèses) avec des coefficients entiers naturels;
- réduire une somme de monômes de même degré « sans parenthèses » avec des coefficients quelconques;
- réduire une somme de monômes de degrés différents « sans parenthèses »;
- réduire une expression algébrique présentant à la fois des produits et des sommes de monômes « sans parenthèses »;
- supprimer des parenthèses précédées d'un signe « plus » et non suivies d'un signe «

multiplier » ou « diviser »;
- supprimer des parenthèses précédées d'un signe « moins » et non suivies d'un signe « multiplier » ou « diviser »;
- réduire une expression algébrique complexe pouvant comporter des produits, des sommes mais également des parenthèses d'un des deux types précédents.

C'est ainsi que $T_{Red}$ admet pour nous une OM complexe composée de huit organisations mathématiques ponctuelles. Nous avons alors décrit précisément les organisations mathématiques de chaque sous-type de tâches à l'aide de tableaux. En voici quelques exemples.

| Type de tâches | **Réduire une somme de monômes de même degré « sans parenthèses » avec des coefficients entiers naturels** |
|---|---|
| Exemples | $5x+3x$ ; $4y^2-y^2$ ; etc. |
| Technique | Compter les termes de la catégorie en présence. |
| Technologie | Dénombrement de collections. |
| Théorie | Arithmétique. |

***Tableau 1.*** *OMP relative à la réduction d'une somme de monômes de même degré « sans parenthèses » avec des coefficients entiers naturels*

Notons qu'associé à cette technique, ce sous-type de tâches relève donc principalement du dénombrement de collections étudié dans l'enseignement primaire.
Mais, si la technique de réduction consistant à « compter » les termes de même catégorie s'avère relativement prégnante dans la pratique enseignante et très prisée des élèves, elle n'est que peu présente dans les manuels actuels de collège. Remarquons également que la première rencontre avec ce type de tâches a lieu parfois lors du calcul de grandeurs géométriques comme l'aire d'une figure composée de deux carrés. Le discours technologique des enseignants s'appuie alors souvent sur des exemples génériques comme « j'ai 5 stylos plus 3 stylos... ». Pourtant cette technique n'est réellement pertinente que lorsque les expressions algébriques présentent des coefficients entiers naturels et a donc de ce fait une portée limitée. Ainsi, elle ne permet pas d'accomplir certaines tâches, comme réduire $\frac{4}{3}x+\sqrt{2}x$ , qui nécessitent, elles, une nouvelle praxéologie :

| Type de tâches | **Réduire une somme de monômes de même degré « sans parenthèses » avec des coefficients quelconques** |
|---|---|
| Exemples | ; $\frac{2}{3}y^2+\frac{1}{2}y^2$ ; etc. |
| Technique | - Factoriser.<br>- Calculer une expression numérique. |
| Technologie | - Distributivité de la multiplication sur l'addition.<br>- Elément neutre pour la multiplication. |
| Théorie | Algèbre élémentaire. |

***Tableau 2.*** *OMP relative à la réduction d'une somme de monômes de même degré « sans parenthèses » avec des coefficients quelconques*

La technique est donc composée de deux types de tâches : « Factoriser une expression littérale » et « Calculer une expression numérique ». Leurs organisations mathématiques ne seront pas détaillées ici.

L'exemple suivant illustre l'organisation praxéologique en jeu lors de la réduction d'expressions plus complexes :

| Type de tâches | **Réduire une somme de termes pouvant comporter des produits de monômes mais aussi des sommes entre des parenthèses** |
|---|---|
| Exemples | $3x+(x+7)-(4x-3)+7$ ; $x+2x+(x-y)+2x\times 3y-(2x+3y)$ ; etc. |
| Technique | - Repérer les termes.<br>- Réduire chaque terme sous forme de produit de monômes.<br>- Supprimer « les parenthèses ».<br>- Regrouper, éventuellement, les monômes de même degré.<br>-Réduire les sommes des monômes de même degré «sans parenthèses». |
| Technologie | - Commutativité et associativité de la multiplication et de l'addition.<br>- Elément neutre pour la multiplication.<br>- Conventions d'écriture.<br>- Distributivité de la multiplication sur l'addition. |
| Théorie | Algèbre élémentaire. |

***Tableau 3***. *OMP relative à la réduction d'une somme de termes pouvant comporter des produits de monômes mais aussi des sommes entre parenthèses*

On peut alors noter que certains types de tâches développés en amont interviennent comme élément de la technique d'un autre type de tâches plus complexe. Le mode de description adopté permet donc de rendre compte de l'intervention et de l'imbrication des différentes connaissances mobilisées dans les techniques des types de tâches en jeu.

## 1.4 Le modèle

Poursuivant notre étude, nous avons de même caractérisé les OM complexes relatives au développement et à la factorisation (Ferraton, 2011, pp. 26 – 35). Bien que complet, ce travail ne s'avère guère utilisable sous cette forme. Rappelons en effet que ce modèle de référence doit nous aider à caractériser le rapport institutionnel actuel par l'analyse des programmes et des manuels. Afin de répondre à cet impératif, nous avons essayé dans un premier temps de faire quelques observations puis de nous pencher plus attentivement sur les liens existant entre les différents sous-types de tâches composant respectivement $T_{Red}$, $T_{Dev}$ et $T_{Fact}$.

### *1.4.1 Premières remarques*

Si nous avons fait plusieurs fois référence à l'arithmétique, qui motive pourtant l'introduction du calcul littéral, il apparaît en fait que cette théorie n'intervient que dans le cadre très restreint de sous-types de tâches élémentaires ou dans celui de techniques à la portée fort limitée. Nous avons donc fait le choix de ne plus considérer cette dépendance explicite à l'arithmétique.
Si l'on s'intéresse maintenant aux technologies présentes dans notre modèle, on constate la prégnance de certaines d'entre elles comme la commutativité et l'associativité de la multiplication ou encore la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Ces constatations étant faites, nous avons alors pour chacun de trois types de tâches $T_{Red}$, $T_{Dev}$ et $T_{Fact}$, considéré le sous-type de tâches le plus « général » puis illustré à l'aide d'un arbre ses liens avec les autres sous-types de tâches plus « particuliers ».

### *1.4.2 Arbre relatif à la réduction*

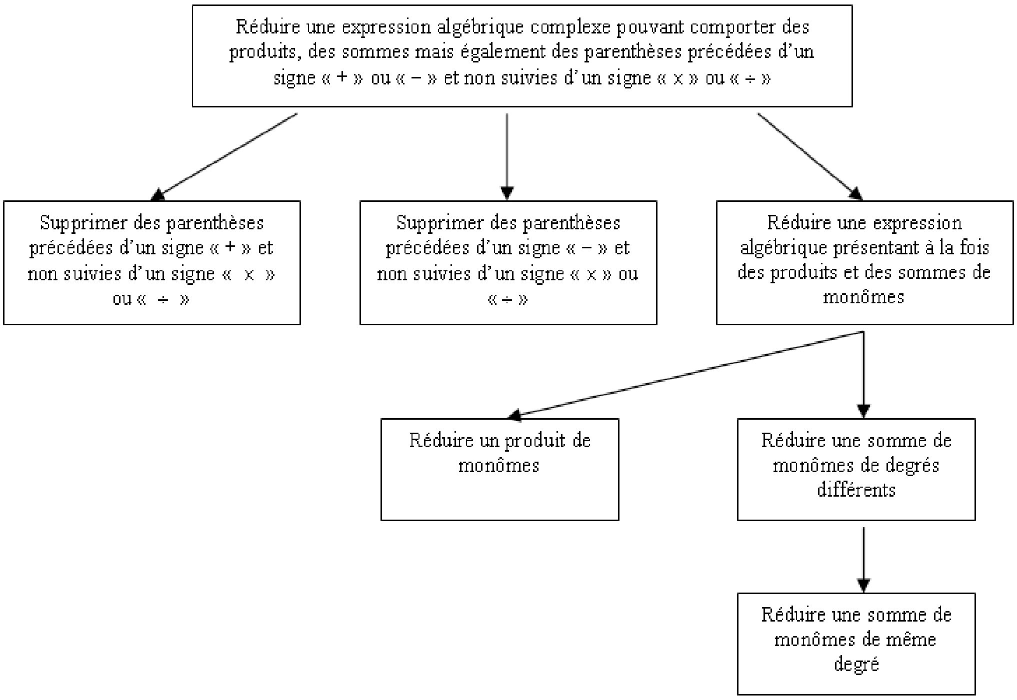



***Figure 1.*** *Arbre relatif à la réduction*

### *1.4.3 Arbre relatif au développement*

L'analyse praxéologique que nous avons menée établit que $T_{Dev}$ admet une OM composée de sept OMP, chacune s'appuyant sur les sous-types de tâches particuliers que sont:

- développer un produit en utilisant la simple distributivité;
- développer un produit en utilisant la double distributivité;
- développer $(a+b)^2$ où a et b sont des monômes;
- développer $(a-b)^2$ où a et b sont des monômes;
- développer $(a+b)(a-b)$ où a et b sont des monômes;
- développer un produit en combinant un ou plusieurs des cinq sous-types de tâches précédents;
- développer une somme algébrique dont certains termes sont des produits que nous qualifierons de « développables », c'est-à-dire qui relèvent du type de tâche précédent.

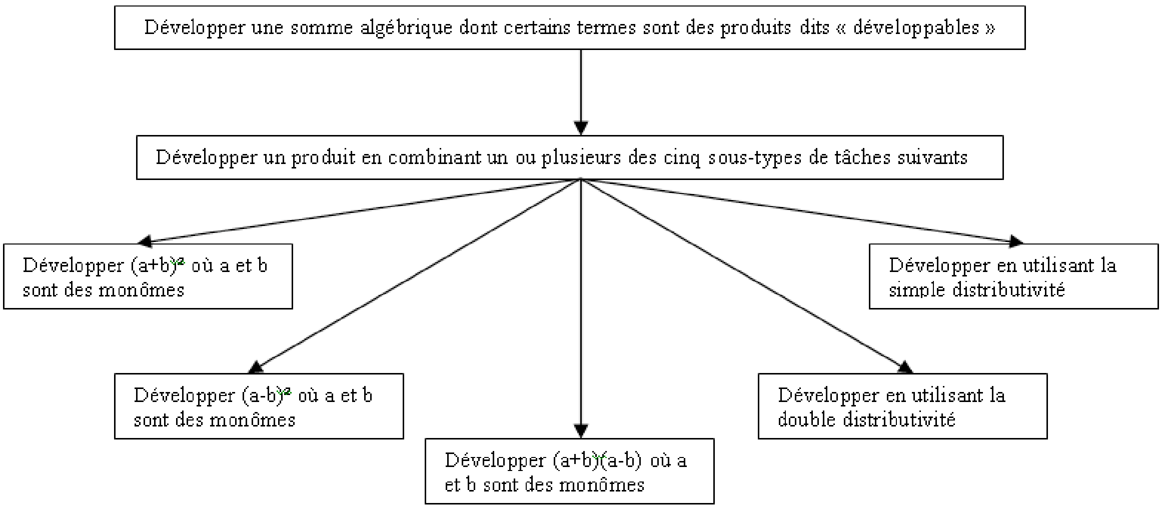



***Figure 2.*** *Arbre relatif au développement*

### *1.4.4 Arbre relatif à la factorisation*

L'analyse praxéologique que nous avons menée établit que $T_{Fact}$ admet une OM elle aussi composée de sept OMP, chacune s'appuyant sur les sous-types de tâches particuliers que sont:

- factoriser ka+kb (ou ka-kb) où k, a et b sont des polynômes;
- factoriser $a^2 + 2ab + b^2$ où a et b sont des monômes;
- factoriser $a^2 - 2ab + b^2$ où a et b sont des monômes;
- factoriser $a^2 - b^2$ où a et b sont des polynômes;
- factoriser $ax^2 + bx + c$ (a, b et c réels, avec $a \neq 0$);
- factoriser $ax^4 + bx^2 + c$ (a, b et c réels, avec $a \neq 0$);
- factoriser en combinant un ou plusieurs des six sous-types de tâches précédents.

Notons que les cinquième et sixième sous-types de tâches mentionnés précédemment ne sont pas actuellement enseignés au collège, mais leur présence s'explique par le fait que nous travaillons ici sur un modèle de référence qui devra absolument résister à d'éventuels changements de programme.

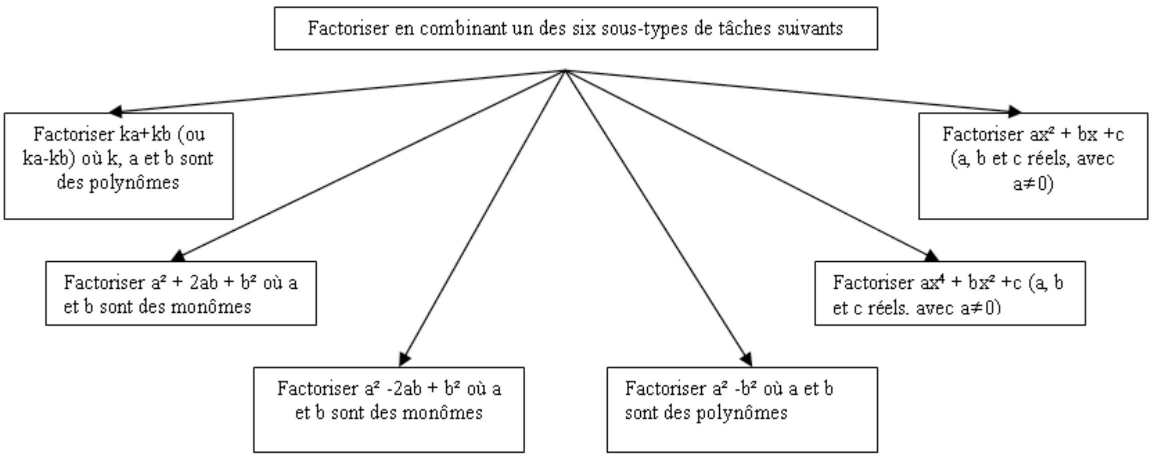



***Figure 3.*** *Arbre relatif à la factorisation*

## 2. Analyse du rapport institutionnel

Dans ce paragraphe, nous mettons à l'épreuve notre modèle comme référence pour l'analyse des programmes et des manuels scolaires actuels. Cette analyse nous permettra de caractériser le rapport institutionnel au calcul littéral.

Sur chacun des quatre niveaux de collège, nous avons ainsi considéré quatre manuels de collections différentes dont les références sont consignées dans le tableau suivant.

| Phare (Hachette) | Prisme (Belin) | Transmath (Nathan) | Triangle (Hatier) |
|---|---|---|---|
| $6^{ème}$, année 2009<br>$5^{ème}$, anné 2010<br>$4^{ème}$, année 2007<br>$3^{ème}$, année 2008 | $6^{ème}$, année 2009<br>$5^{ème}$, anné 2010<br>$4^{ème}$, année 2007<br>$3^{ème}$, année 2008 | $6^{ème}$, année 2009<br>$5^{ème}$, anné 2010<br>$4^{ème}$, année 2007<br>$3^{ème}$, année 2008 | $6^{ème}$, année 2009<br>$5^{ème}$, anné 2010<br>$4^{ème}$, année 2007<br>$3^{ème}$, année 2008 |

***Tableau 4.*** *Références des manuels étudiés*

Pour chacun des trois types de tâches $T_{Red}$, $T_{Dev}$ et $T_{fact}$, nous nous sommes intéressés aux définitions proposées par l'institution, à la progression envisagée pour l'étude des sous-types de tâches associés mais également aux praxéologies de chacun de ces derniers.
Dans un premier temps, nous exposerons de manière relativement détaillée le travail relatif à la réduction. Nous nous contenterons ensuite de dresser un bilan plus succinct des conclusions tirées lors des études analogues menées sur les deux types de tâches développer et factoriser une expression littérale.

## 2.1 Concernant la réduction

### *2.1.1 Progression des apprentissages et premières définitions*

L'étude des programmes scolaires de la $6^{ème}$ à la $1^{ère}$ S confirme le fait que c'est au collège que l'objet calcul littéral est principalement étudié et que les élèves sont amenés à construire les différents concepts qui y sont associés. En fait, l'institution propose pour les trois types de tâches $T_{Red}$, $T_{Dev}$ et $T_{Fact}$ une véritable chronologie des apprentissages. Nous rendons compte de cette évolution en faisant figurer sur les arbres de notre modèle les niveaux de classe où apparaissent, a priori, les différents sous-types de tâches en question. C'est ainsi que nous obtenons pour la réduction :

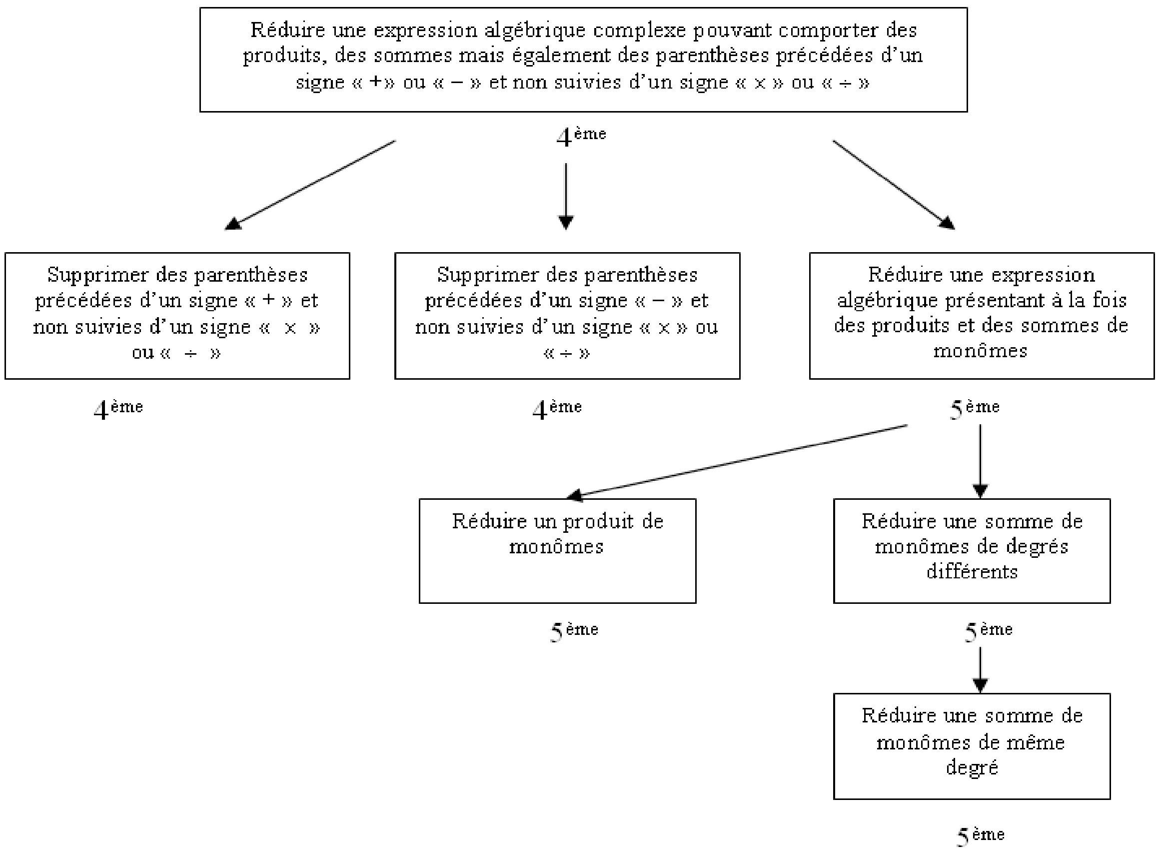



***Figure 4.*** *Chronologie des apprentissages relatifs à la réduction*

Mais un fait s'avère marquant : les programmes ne proposent aucune définition de ce que l'institution appelle « expression littérale » ni même de ce qu'elle entend par calcul littéral. Quant au verbe réduire, il n'est jamais précisément caractérisé et n'apparaît « officiellement » qu'en $4^{ème}$.

Du côté des manuels, la moitié des ouvrages de $5^{\text{ème}}$ à notre disposition utilise explicitement le verbe réduire dans diverses consignes (l'autre préférant le terme simplifier). Toutefois, ce n'est qu'en $4^{\text{ème}}$ que des définitions sont formalisées. Elles sont de deux types.

Celles qui portent sur le nombre de termes comme dans les manuels Phare ($4^{\text{ème}}$) et Prisme ($4^{\text{ème}}$) :

«Réduire une expression revient à l'écrire avec le moins de termes possibles.»

Celles qui portent sur la forme de l'expression à obtenir comme dans le manuel Transmath ($4^{\text{ème}}$) :

«Réduire une expression littérale signifie écrire cette expression sous une forme plus simple.»

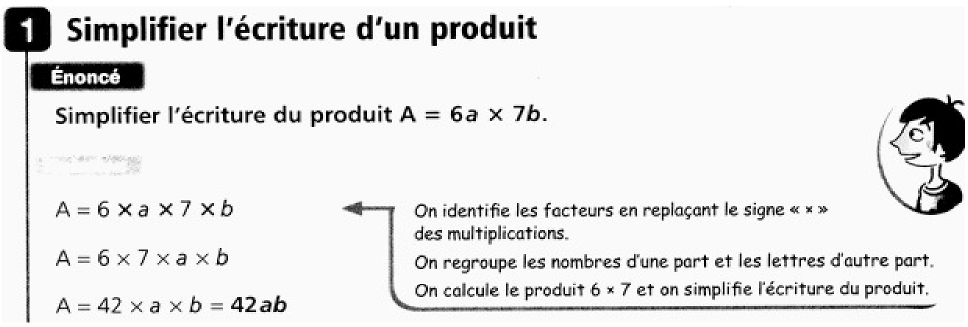
Par comparaison avec « notre » définition de référence (écrire l'expression littérale considérée comme une somme de monômes non semblables), celles proposées par les manuels nous semblent bien imprécises. C'est ainsi que la réduction d'un produit ne peut entrer dans le cadre de la première et que la seconde s'avère par bien des côtés trop généraliste… En fait, les manuels ne peuvent qu'être gênés par le manque de vocabulaire adéquat à leur disposition. Ceci explique probablement que seuls certains se soient risqués à formuler, parfois tardivement, de telles « définitions ».

### *2.1.2 Analyse praxéologique*

Nous avons alors cherché à déterminer, pour chaque sous-type de tâches de $T_{Red}$, les similitudes et les différences entre les techniques et les technologies de notre modèle et celles exposées dans les programmes et les manuels à notre disposition. De par leur formulation imprécise, les premiers n'ont pas pu répondre à nos interrogations. De ce fait, nous nous sommes penchés attentivement sur les parties «cours» (ou «connaissances») et «méthodes» (ou «savoir-faire») des différents ouvrages choisis.

*a) Réduire un produit de monômes*

Comme nous l'avons déjà remarqué, ce sous-type de tâches apparaît dès la classe de $5^{\text{ème}}$. Pourtant, à ce niveau scolaire, seul le Prisme consacre un exemple de sa partie « méthodes » (p 68) à la description de la technique associée.



**1 Simplifier l'écriture d'un produit**

Énoncé

Simplifier l'écriture du produit $A = 6a \times 7b$.

$A = 6 \times a \times 7 \times b$

$A = 6 \times 7 \times a \times b$

$A = 42 \times a \times b = 42ab$

On identifie les facteurs en replaçant le signe « × » des multiplications.

On regroupe les nombres d'une part et les lettres d'autre part.

On calcule le produit 6 × 7 et on simplifie l'écriture du produit.

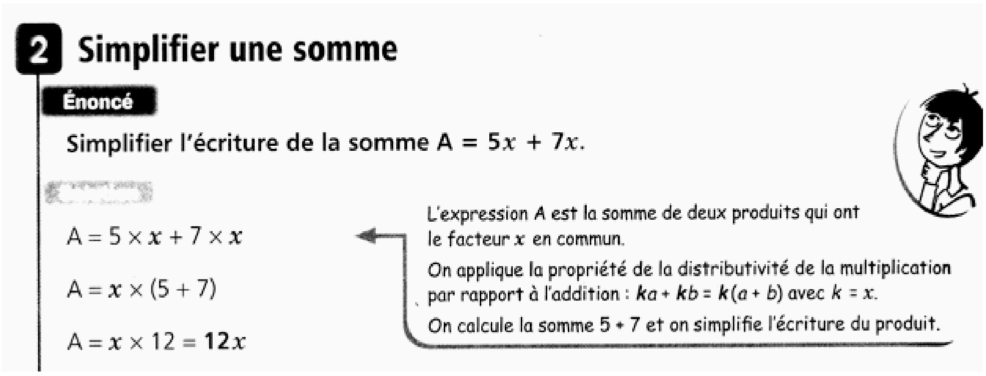
***Illustration 1.*** *Réduction d'un produit dans le manuel Prisme* $5^{\text{ème}}$

Cette technique se trouve principalement justifiée par les conventions d'écriture énoncées dans la partie « cours », même si l'argumentaire proposé dans cet exercice résolu sous-entend l'utilisation des règles de commutativité et d'associativité de la multiplication.

Tous les autres manuels de $5^{\text{ème}}$ se contentent de présenter quelques exemples dans leurs parties « cours » respectives, sans autre description de la technique mise en place. La technologie justificative repose exclusivement sur les conventions d'écriture, sauf pour le manuel Triangle ($5^{\text{ème}}$) qui évoque certaines propriétés de la multiplication (commutativité, 1

élément neutre et 0 élément absorbant) sans toutefois utiliser le vocabulaire « savant » correspondant.
En $4^{\text{ème}}$, les manuels semblent considérer ce sous-type de tâches comme élémentaire. C'est ainsi que deux sur quatre n'exposent aucune technique spécifique dans leurs parties « cours » et « méthodes », que ce soit dans le chapitre consacré au calcul littéral ou dans celui traitant des puissances. Quant aux autres, ils effectuent simplement quelques mises au point dans leurs parties « cours » respectives.
Les manuels de $3^{\text{ème}}$ ne nous apportent aucun nouvel élément d'ordre technique ou technologique.
De cette analyse, on peut donc conclure que les manuels de collège se contentent dans leur majorité d'un « petit » environnement technologique donné dès la classe de $5^{\text{ème}}$. De plus, seul le manuel Prisme ($5^{\text{ème}}$) expose une technique de réduction. Le problème est que, dans sa formulation, cette dernière ne fait aucunement mention des puissances respectives des différentes lettres et des propriétés concernant leur produit; elle se distingue ainsi nettement de celle de notre modèle et peut, par son imprécision, soulever quelques difficultés auprès des élèves lors du traitement de tâche comme «réduire $6a^2 \times 5a$ (Prisme, $5^{\text{ème}}$, p 76).

*b) Réduire une somme de monômes de même degré « sans parenthèses »*
C'est au niveau $5^{\text{ème}}$ qu'apparaît ce sous-type de tâches. Comme précédemment, seul le manuel Prisme ($5^{\text{ème}}$) accorde un paragraphe spécifique de sa partie «savoir-faire» (p 68) à la description détaillée d'une technique.


**2 Simplifier une somme**
Énoncé
Simplifier l'écriture de la somme A = $5x + 7x$.

$A = 5 \times x + 7 \times x$ — L'expression A est la somme de deux produits qui ont le facteur $x$ en commun.
$A = x \times (5 + 7)$ — On applique la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $ka + kb = k(a + b)$ avec $k = x$.
$A = x \times 12 = 12x$ — On calcule la somme 5 + 7 et on simplifie l'écriture du produit.

***Illustration 2.*** *Réduction d'une somme de monômes de même degré «sans parenthèses» manuel Prisme $5^{\text{ème}}$*

La justification présentée repose exclusivement sur l'application de la formule de simple distributivité énoncée dans le « bon sens »; la commutativité de la multiplication n'est que sous-entendue.
Les manuels Phare ($5^{\text{ème}}$) et Transmath ($5^{\text{ème}}$) abordent eux aussi cette technique mais au travers d'exemples figurant au sein de leur partie « cours », dans un paragraphe spécifiquement dédié à la factorisation. Si chacun d'eux remarque que l'on peut parfois factoriser pour réduire une expression littérale, rappelons qu'aucun n'a défini à ce niveau le verbe réduire. Quoi qu'il en soit, la formule de simple distributivité peut là encore être considérée comme la technologie justifiant une technique avant tout basée sur la factorisation.
Notons enfin que Triangle ($5^{\text{ème}}$) adopte un point de vue tout à fait similaire mais sans jamais mentionner le mot factorisation.
En $4^{\text{ème}}$, les manuels semblent considérer ce sous-type de tâches comme élémentaire. En effet, Transmath ($4^{\text{ème}}$) n'y fait jamais référence et les trois autres se contentent d'un «tout petit» exemple de leur partie cours (deux au sein d'un paragraphe consacré à la réduction, le troisième comme illustration de la factorisation). Bien que deux d'entre eux agrémentent leur

propos de couleurs, il n'en reste pas moins vrai qu'aucune technique n'est vraiment exposée, alors que la technologie est elle bien présentée.

En 3ème, seul le manuel Phare (3ème) traite, dans sa partie « cours », ce sous-type de tâches.

L'ensemble des manuels s'accorde donc pour considérer la réduction d'une somme comme une application de la formule de simple distributivité (écrite dans le sens de la factorisation), formule qui se voit donc de ce fait attribuer le double statut de technique et de technologie. Par conséquent, la position de l'institution *collège* s'avère en accord avec notre modèle.

Notons enfin qu'aucune référence n'est faite au dénombrement de collection, ce qui nous conforte dans notre choix de ne plus considérer la « dépendance » du calcul littéral à l'arithmétique.

*c) Réduire une somme de monômes de degrés différents « sans parenthèses »*

Ce sous-type de tâches est introduit en 5ème. Seuls trois manuels l'utilisent dans leur partie « méthodes » pour traiter d'autres sous-types de tâches; mais aucun ne détaille la technique employée, ni ne décrit son environnement technologique.

En 4ème, deux manuels exposent au sein de leurs parties « cours » et/ou « méthodes » une technique commune. Elle consiste à :

▪ repérer les différents termes ;

▪ regrouper :

- pour Phare (4ème), les termes ayant la même partie littérale;
- pour Prisme (4ème), les termes en $x^2$, les termes en $x$, les termes constants;

  A noter que les deux manuels utilisent l'ostensif couleur pour repérer ces termes parfois aussi qualifiés « de même catégorie ».

▪ utiliser la formule de distributivité dans le sens factorisation.

  A noter que cette dernière étape n'est traduite en termes de phrases que par Prisme (4ème) («on met en facteur $x^2$ dans la somme algébrique des termes en $x^2$ et $x$ dans la somme des termes en $x$») alors que Phare (4ème) se contente d'écrire un calcul détaillé correspondant à cette factorisation.

Mais alors, qu'en est-il des deux autres manuels ? Transmath (4ème) ne présente aucun exercice résolu relatif à ce seul sous-type de tâches. Cependant, la technique qu'il expose, page 86, pour la réduction d'une expression mixte, est très proche de celle précédemment décrite. On remarquera cependant l'utilisation de l'appellation « termes semblables » et le fait qu'il souligne la forme générale que doit revêtir le résultat final (du moins à ce niveau).

**Exemple :** réduction de l'expression $3x + 3 - (5x - 4) + 2$.

$3x + 3 - (5x - 4) + 2 = 3x + 3 - 5x + 4 + 2$ — On utilise les règles de suppression des parenthèses.

$= 3x - 5x + 3 + 4 + 2$

$= (3 - 5)x + 3 + 4 + 2$ — On regroupe les termes semblables, puis on réduit chaque terme.

$3x + 3 - (5x - 4) + 2 = -2x + 9$ — $-2x + 9$ est la forme réduite de cette expression.

On obtient ici une forme réduite du type $ax + b$ avec $a = -2$ et $b = 9$.
D'autres fois on obtiendra une forme réduite du type $ax^2 + bx + c$ (voir paragraphe 3).

***Illustration 3.*** *Réduction d'une expression mixte dans le manuel Transmath 4ème*

Si le manuel Triangle (4ème) présente un exemple relevant de ce sous-type de tâches, il ne pousse pas plus avant son exposé et se contente de faire remarquer, exemples à l'appui, que certaines sommes ne peuvent être réduites. En 3ème, seul le manuel Phare revient sur le sujet

au travers d'un « tout petit » exemple agrémenté de couleurs.
Ainsi, on peut considérer que la technique proposée par la majorité des manuels est conforme à celle choisie comme référence. Cependant, l'environnement technologique reste relativement pauvre.

*d) Réduire une expression algébrique présentant à la fois des produits et des sommes de monômes « sans parenthèses »*
Si la maîtrise de ce type de tâches nous semble indispensable pour le traitement des développements « futurs », aucune technique n'est exposée dans les parties « cours » et « méthodes » des quatre manuels que ce soit en 5$^{\text{ème}}$, en 4$^{\text{ème}}$ ou en 3$^{\text{ème}}$. En fait, tout se passe comme si le passage de tâches simples à des tâches plus complexes relevait de l'évidence et semblait être laissé à la seule charge des élèves. Loin de remettre en cause l'existence même de cette étape au sein de notre modèle de référence, ce vide institutionnel ne peut cependant que nous questionner.

*e) Supprimer des parenthèses précédées d'un signe « plus » (ou « moins ») et non suivies d'un signe « multiplier » ou « diviser »*
Nous avons fait ici le choix d'étudier conjointement ces deux sous-types de tâches. En effet, tous deux apparaissent en 4$^{\text{ème}}$ et leurs traitements respectifs présentent de nombreuses similitudes. On constate d'emblée qu'aucun des manuels en présence ne consacre un exercice résolu de sa partie « méthodes » relevant uniquement de ces sous-types de tâches. C'est pourquoi nous avons analysé leurs parties « cours » et « activités ». Cependant, compte tenu de la diversité des approches proposées par les quatre ouvrages, nous nous voyons contraints d'étudier chacun d'eux séparément. On trouve ainsi à la page 72 du manuel Phare (4$^{\text{ème}}$):

**Règles de suppression de parenthèses**

*a*, *b*, *c* et *d* désignent des nombres relatifs.

**Ajouter une somme** algébrique revient à ajouter chacun de ses termes.

$$a + (-b + c - d) = a - b + c - d$$
$$a + (b + c - d) = a + b + c - d$$

■ **Remarque :** On peut supprimer un couple de parenthèses précédé d'un signe + sans changer les signes des termes à l'intérieur des parenthèses.

**Soustraire une somme** algébrique revient à ajouter l'opposé de chacun de ses termes.

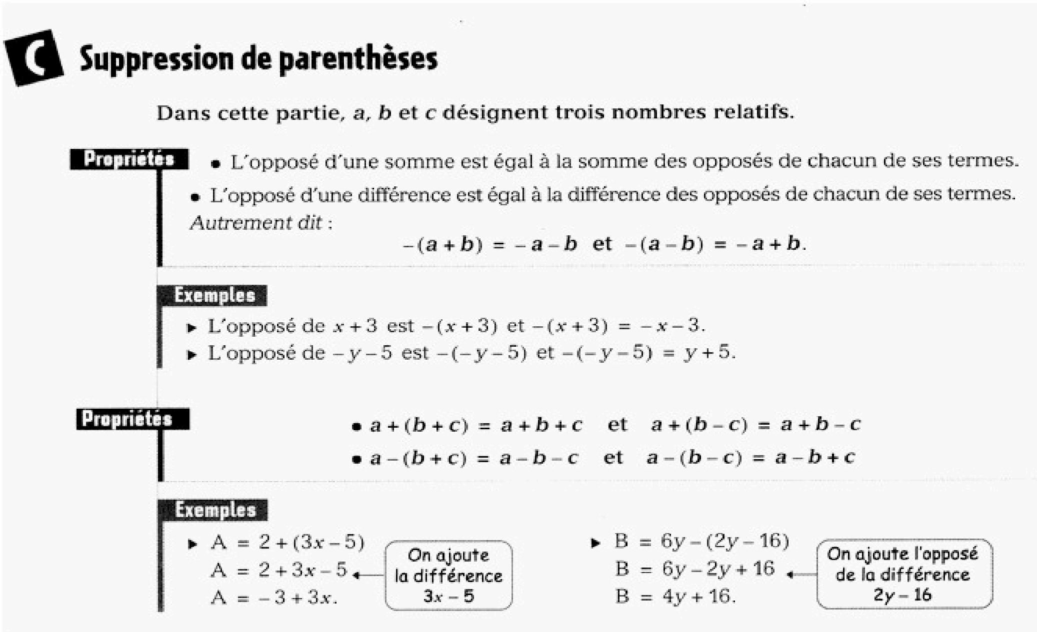
$$a - (-b + c - d) = a + b - c + d$$
$$a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

■ **Remarque :** On peut supprimer un couple de parenthèses et le signe − qui le précède, à condition de changer tous les signes des termes à l'intérieur des parenthèses.

***Illustration 4.*** *Suppression de parenthèses dans le manuel Phare 4$^{\text{ème}}$*

Cet exposé, bien qu'assez complet, peut néanmoins paraître à certains relativement confus; en effet, les formules ne sont en fait que des exemples illustrant les différentes affirmations et n'ont donc pas le même statut que celles de distributivité précédemment mises en place. En fait, seules les remarques peuvent à notre sens relever de l'exposé d'une véritable technique c'est-à-dire de la marche à suivre lors de la résolution d'un exercice. Mais alors, qu'en est-il de la technologie justificative ? Pour le savoir, il nous faut considérer l'activité intitulée « J'établis les règles de suppression de parenthèses », page 70, où est clairement utilisée la propriété de simple distributivité et le fait que soustraire un nombre revient en fait à ajouter son opposé.

L'étude de la partie « cours » du Prisme ($4^{ème}$) manque, quant à elle, singulièrement de clarté.



## C Suppression de parenthèses

**Dans cette partie, *a*, *b* et *c* désignent trois nombres relatifs.**

**Propriétés**

- L'opposé d'une somme est égal à la somme des opposés de chacun de ses termes.
- L'opposé d'une différence est égal à la différence des opposés de chacun de ses termes.

*Autrement dit :*

$$-(a+b) = -a-b \quad \text{et} \quad -(a-b) = -a+b.$$

**Exemples**

- L'opposé de $x+3$ est $-(x+3)$ et $-(x+3) = -x-3$.
- L'opposé de $-y-5$ est $-(-y-5)$ et $-(-y-5) = y+5$.

**Propriétés**

- $a+(b+c) = a+b+c$ et $a+(b-c) = a+b-c$
- $a-(b+c) = a-b-c$ et $a-(b-c) = a-b+c$

**Exemples**

- $A = 2+(3x-5)$
  $A = 2+3x-5$ ← On ajoute la différence $3x-5$
  $A = -3+3x$.
- $B = 6y-(2y-16)$
  $B = 6y-2y+16$ ← On ajoute l'opposé de la différence $2y-16$
  $B = 4y+16$.

***Illustration 5.*** *Suppression de parenthèses dans le manuel Prisme $4^{ème}$*

Si l'argument « l'opposé d'une somme est égal à la somme des opposés de chacun de ses termes » se comprend assez facilement, que penser de l'affirmation suivante : « l'opposé d'une différence est égal à la différence des opposés de chacun de ses termes » ? D'autant plus que les élèves de $4^{ème}$ sont sensés savoir que soustraire un nombre revient en fait à ajouter son opposé. Cependant, l'étude de la partie « activités » nous éclaire sur le cheminement proposé; en effet, avant d'établir cette « règle » de suppression des parenthèses, tout un travail est mené sur l'opposé d'une somme et l'opposé d'une différence (justifié une nouvelle fois par l'utilisation de la simple distributivité).

Le manuel Transmath ($4^{ème}$) a mis en place les règles de suppression de parenthèses dès son premier chapitre intitulé « Opérations sur les nombres relatifs ». Il nous faut donc nous y reporter… Son approche est relativement voisine de celle du Prisme, puisque aucune technique n'est vraiment exposée mais, qu'a contrario, l'argument technologique « l'opposé d'une somme est la somme des opposés » occupe une place importante tant dans sa partie « cours » que dans sa partie « savoir-faire ».

Dans sa partie « cours », Triangle ($4^{ème}$) met en exergue deux propriétés :

- « Quand les parenthèses sont précédées d'un signe « plus » et qu'elles ne sont pas suivies d'un signe « multiplier » ou « diviser », on peut supprimer les parenthèses ».
- « Quels que soient les nombres relatifs a et b, on a: « $-(a+b)=-1\times(a+b)=-a-b$ ».

La première peut être qualifiée de technique et est relativement voisine de la première remarque du manuel Phare ($4^{ème}$) concernant les parenthèses précédées d'un signe +. La seconde n'est pas sans rappeler les arguments technologiques développés dans Prisme ($4^{ème}$) et Transmath ($4^{ème}$).

En classe de $3^{ème}$, ce n'est que par le biais de quelques rares remarques pour le moins sibyllines que les quatre manuels à notre disposition font référence aux techniques associées à ces deux sous-types de tâches.

C'est ainsi que les différents ouvrages choisis se distinguent nettement de notre modèle de référence; en effet, une grande place est faite à quelques arguments d'ordre technologique et ce au détriment de l'exposé de techniques.

*f) Réduire une expression algébrique complexe pouvant comporter des produits, des sommes mais également des parenthèses (au sens précédemment défini)*

Seul le manuel Prisme ($4^{ème}$) propose dans sa partie « méthodes » un exemple relevant de ce seul sous-type de tâches. Une fois encore, on ne peut que constater l'absence du traitement d'expressions comme $x \times 4 + 2x \times 3y - (2x + 3y)$ qui, rappelons-le, nous semble essentiel à maîtriser avant d'aborder le développement et la réduction d'expressions comme $-3t - (-3t + 8)(6t - 5)$ (exercice pourtant résolu à la page 53 de ce même manuel).

### *2.1.3 Travail des différents sous-types de tâches relatifs à la réduction et bilan*

Il nous reste maintenant à préciser quels sous-types de tâches sont les mieux travaillés au sein de l'institution et ce en étudiant cette fois-ci les parties « exercices » des différents manuels. Pour ce faire, nous avons analysé tous les énoncés, niveau par niveau et manuel par manuel.

Il apparaît ainsi clairement des choix différents entre les manuels. C'est ainsi qu'au niveau $5^{ème}$, le manuel Phare ($5^{ème}$) travaille davantage la réduction d' « expression algébrique présentant à la fois des produits et des sommes de monômes sans parenthèses » que la réduction de « produit de monômes »; le manuel Prisme ($5^{ème}$) fait lui exactement l'inverse. D'ailleurs, cette constatation demeure de mise si l'on se réfère au paragraphe 2.1.2 analysant les techniques et les technologies.
Quoi qu'il en soit, si l'on souhaite tirer des conclusions plus générales, il convient de considérer avant tout les résultats globaux. Ce faisant, nous constatons que c'est en $4^{ème}$ que la réduction est principalement travaillée. Au niveau précédent, les quatre sous-types de tâches introduits le sont également mais dans une moindre mesure. En $3^{ème}$, les manuels semblent considérer la réduction acquise et ne lui consacrent donc que très peu d'exercices. Mais il est vrai qu'elle intervient obligatoirement dans le traitement d'autres types de tâches comme le développement ou la factorisation.

A ce stade, il nous est alors apparu indispensable de croiser les précédentes études, qualitative et quantitative, afin de dresser un bilan sur le traitement effectif de $T_{Red}$ au sein de l'institution « collège ». Le tableau synthétique qui suit récapitule ainsi les divers résultats obtenus, en s'attachant, pour tous les sous-types de tâches associés, à rendre compte pour chaque niveau :

- de la présence (ou non) d'une technique « conforme » à celle de notre modèle de référence (c'est-à-dire qui en respecte toutes les étapes);
- du travail effectif réalisé par le biais d'exercices ciblés.

Pour ce faire, nous avons adopté les notations suivantes:

- Technique : cette colonne indique la présence ou le degré de conformité de la technique au regard du modèle de référence;
- Travail : cette colonne quantifie le travail effectif mené au sein des manuels et ce au vu du nombre d'exercices comptabilisés;
- HP: hors programme;
- Abs: absence de technique ou de travail effectif;
- «--»: technique très peu conforme ou très peu de travail;
- «-»: technique peu conforme ou peu de travail;
- «+»: technique relativement conforme ou travail significatif;
- «++»: technique conforme ou travail soutenu.

A noter que nous avons bien entendu abrégé la dénomination des sous-types de tâches composant $T_{Red}$...

| | $5^{ème}$ | | $4^{ème}$ | | $3^{ème}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Technique** | **Travail** | **Technique** | **Travail** | **Technique** | **Travail** |
| **Prod** | - | + | - | ++ | Abs | + |
| **SomMême** | - | + | Abs | ++ | Abs | - |
| **SomDiff** | - | + | + | ++ | Abs | - |
| **ProdSom** | Abs | + | Abs | - | Abs | Abs |
| **Supp +/-** | HP | HP | - | + | Abs | Abs |
| **RedMixte** | HP | HP | -- | ++ | Abs | Abs |

***Tableau 5.*** *Traitement effectif de la réduction dans l'institution « collège »*

Quelles conclusions peut-on alors tirer d'un tel travail ?

Rappelons tout d'abord que nous avions établi au paragraphe 2.1.1 que les définitions que l'institution propose pour $T_{Red}$ s'avèrent bien imprécises au regard de celle de notre modèle de référence. Au vu du tableau précédent, force est de constater qu'il en va généralement de même pour les techniques afférentes aux sous-types de tâches associés. On peut également remarquer que :

- « SomMême » fait l'objet en $4^{ème}$ d'un très grand nombre d'exercices alors qu'aucune technique n'est institutionnalisée à ce niveau;
- toute technique relative à « ProdSom » est absente alors que nous pensons que la maîtrise de ce sous-type de tâches est essentielle pour envisager les développements;
- « Supp +/- » et « RedMixte » ne sont travaillés seuls qu'en $4^{ème}$ mais les techniques proposées sont insuffisamment développées. Pourtant ces deux sous-types de tâches interviendront de façon non négligeable dans le cadre des développements.

Enfin, un autre fait marquant se doit d'être souligné : en $3^{ème}$, $T_{Red}$ semble être, institutionnellement parlant, considéré comme totalement maîtrisé.

## 2.2 Concernant le développement

Le type de tâches $T_{Dev}$ peut alors être analysé de la même façon. Les détails de cette étude figurant là encore dans Ferraton (2011), nous nous contenterons ici de dresser le bilan des principaux résultats obtenus.

### *2.2.1 Progression des apprentissages et premières définitions*

Associer à chaque sous-type de tâches, et donc à chaque technique, un seul niveau scolaire s'est avéré ici plus difficile. En effet, bien qu'a priori introduit dans une classe particulière, tel ou tel sous-type de tâches peut apparaître au moins partiellement au(x) niveau(x) précédent(s) au travers certains exercices à l'énoncé très simple.

Après réflexion, il nous a semblé opportun de ne pas négliger cet aspect. C'est pourquoi, sur l'arbre suivant, figurent entre parenthèses les niveaux où, sur quelques exemples, une partie de la technique considérée est mise en jeu. Ainsi « Développer en combinant...» est mobilisée partiellement dès la $5^{ème}$ (respectivement la $4^{ème}$) avec le développement d'expressions telles que(respectivement 2x(-2x+9)(x+3))

du manuel Transmath ($5^{ème}$) (respectivement du Prisme ($4^{ème}$)). Et il en va de même pour le sous-type de tâches « développer une somme algébrique dont certains termes sont des produits développables ».

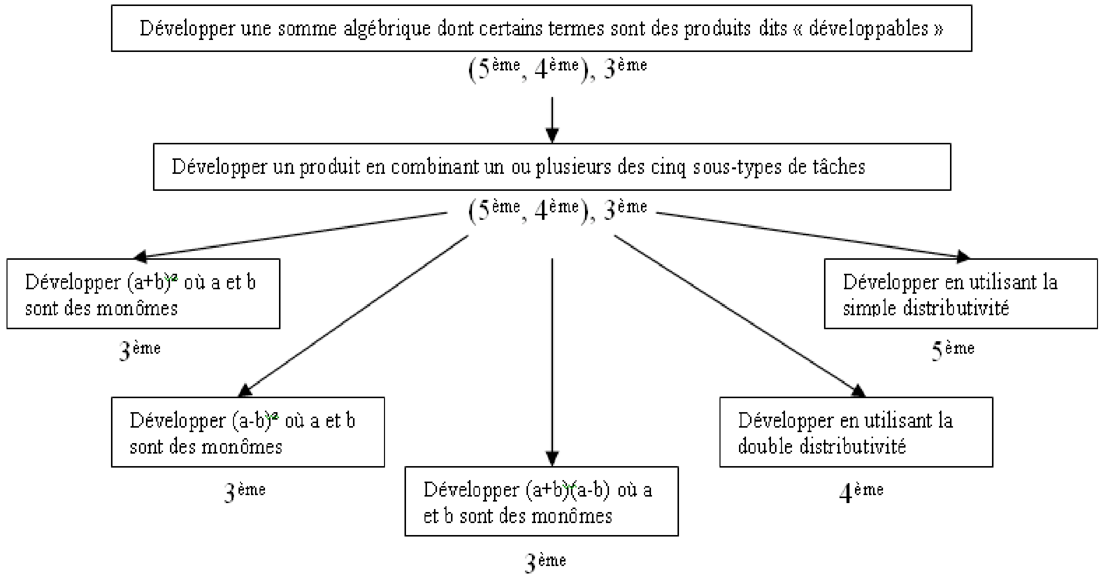



***Figure 5.** Chronologie des apprentissages relatifs au développement*

La majorité des manuels étudiés définit $T_{Dev}$ pour chacun des niveaux de 5ème, 4ème et 3ème.

- En 5ème, trois manuels s'accordent sur le fait que « développer un produit consiste à le transformer en une somme ou une différence ».
- En 4ème et en 3ème, si tous les ouvrages suppriment purement et simplement le terme différence, deux manuels sur quatre juxtaposent l'adjectif algébrique au mot somme.

Dans notre modèle, la définition retenue pour le développement est la suivante :
« $T_{Dev}$: écrire l'expression littérale considérée comme une somme de monômes ».
Ainsi, le vocabulaire mis à part, notre position diffère une nouvelle fois nettement de celle adoptée par les manuels. En effet, les manuels sous-entendent que l'expression à développer est nécessairement un produit (comme le confirme d'ailleurs les exemples illustrant chaque définition). Mais le développement de $(x+8)(x+6)-x(x+2)$ , pourtant demandé dans Prisme (4ème ) n'entre absolument pas dans ce cadre.

### *2.2.2 Analyse praxéologique et travail effectif des différents sous-types de tâches : le bilan sur la tâche «développement»*

En croisant les résultats de nos analyses (qualitative et quantitative) relatives au développement, nous pouvons maintenant nous positionner sur la « conformité » (ou non) de ce qui l'institution propose. Il apparaît ainsi que cette dernière adopte une attitude pour le moins ambiguë face à $T_{Dev}$. En effet, la définition qu'elle propose semble sous-entendre que les expressions à développer sont nécessairement des produits. De plus:
- Si, d'un point de vue technique, les sous-types de tâches « développer un produit en utilisant la simple distributivité » et « développer un produit en utilisant la double distributivité » sont relativement bien exposés dans les différents manuels, ils nécessitent cependant le recours à $T_{Red}$; la seule utilisation des formules de simple et de double distributivité est ostensiblement négligée.
- En ce qui concerne « développer un produit en combinant un ou plusieurs sous-types de tâches », le vide institutionnel est ici incontestable; en effet, aucune technique n'est jamais explicitée et le nombre d'exercices s'y référant s'avère très faible. Pourtant, à terme, ce sous-type de tâches devra être maîtrisé.
- Dès la classe de 4ème, « développer une somme algébrique dont certains termes sont des

produits développables » fait l'objet de nombreux énoncés alors même que la technique exposée manque singulièrement de clarté. Nous avons en effet remarqué que cette dernière ne mentionne pas la première étape consistant à repérer les différents termes en présence. De plus, elle ne précise pas que chaque développement partiel doit être mis entre parenthèses.
Force est néanmoins de constater que contrairement à $T_{Red}$, $T_{Dev}$ fait encore en fin de collège l'objet d'un réel travail.

## 2.3 Concernant la factorisation

### *2.3.1 Progression des apprentissages et premières définitions*

Adoptant les mêmes conventions que précédemment, on trouve entre parenthèses les niveaux où telle ou telle technique est susceptible d'être mobilisée, au moins partiellement, par le biais de quelques exercices. C'est ainsi que « factoriser en combinant un ou plusieurs sous-types de tâches » est abordé dès la 4ème avec la factorisation d'expressions telles que $8x^2-6x+2$ (Transmath, 4ème ).

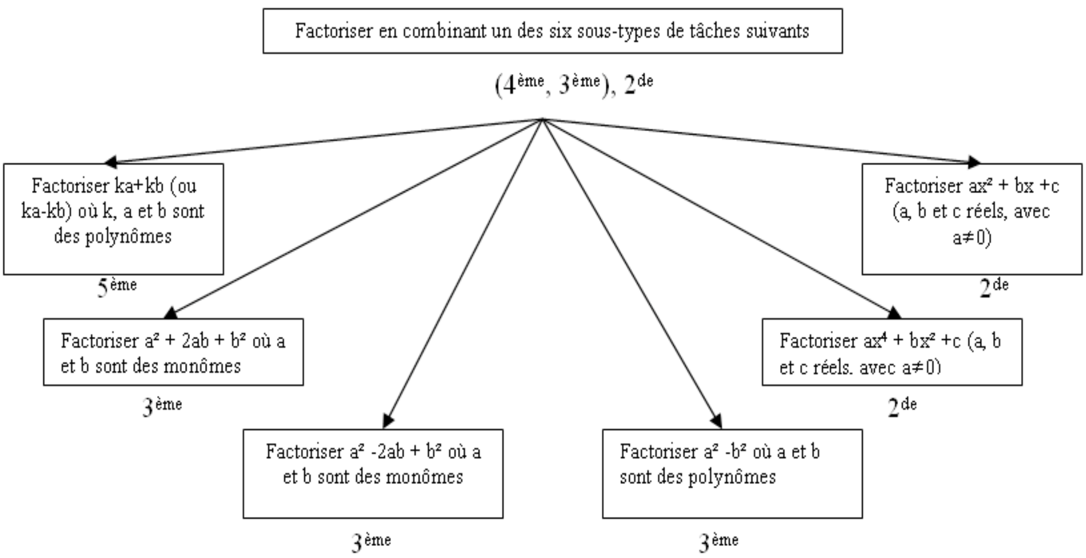



***Figure 6.*** *Chronologie des apprentissages relatifs à la factorisation*

### *2.3.2 Analyse praxéologique et travail effectif des différents sous-types de tâches : le bilan sur la tâche « factorisation »*

Si la définition que donne l'institution est, vocabulaire mis à part, des plus conformes à celle adoptée comme référence, nous constatons qu'il en va de même pour les techniques relatives à «factoriser en utilisant la simple distributivité» en 4ème et «factoriser en utilisant une identité remarquable» en 3ème. Cependant, on peut remarquer que :
- la technique relative au sous-type de tâches « factoriser en utilisant la simple distributivité » n'est pas suffisamment décrite en 5ème alors qu'elle fait l'objet d'un réel travail;
- la technique relative à « factoriser en combinant un ou plusieurs sous-types de tâches » n'est jamais explicitée alors même qu'elle sera utilisée dans de nombreux exercices de 3ème.

# Conclusion

Le travail présenté dans cet article a permis de donner des caractéristiques de l'enseignement du calcul littéral actuel concernant trois types de tâches: réduire, développer et factoriser une expression littérale. Nous avons ainsi exposé, sous forme d'arbres, la dynamique de la mise en place tout au long du collège des différents sous-types de tâches qui y sont associés. Nous avons également repéré certains manques institutionnels au niveau des définitions et des éléments praxéologiques présentés.

Tout d'abord, il nous semble que les définitions proposées au collège peuvent parfois être source de confusion de par leur imprécision ou leur décalage avec les praxéologies effectivement mises en place. Par exemple, la définition de $T_{dev}$ donnée en 5$^{ème}$, est souvent ramenée à « transformer un produit en une somme ou une différence »; cette définition est certes adaptée aux sous-types de tâches étudiés à ce niveau, mais pas en classe de 4$^{ème}$ où est introduit le sous-type de tâches que nous avons appelé «développer une somme algébrique dont certains termes sont des produits dits développables».

Pour ce qui est des techniques, la plupart d'entre elles ne sont que suggérées et ne font pas, selon nous, l'objet d'un exposé suffisamment clair et précis. Nous avons même parfois remarqué que quelques-unes se résument à une suite d'arguments technologiques (comme pour «Supp +/-» étudié au paragraphe 2.1.2). Enfin, si les technologies sont généralement présentes dans tous les manuels, leur rôle majeur dans les justifications ne nous apparaît pas suffisamment mis en valeur lors de la mise en place de certaines praxéologies.

Ces différents manques semblent en fait des conséquences d'un environnement technologico-théorique insuffisant. Nous rejoignons ici la conclusion de Abou Raad et Mercier (2006) pour qui:

> « l'interdiction absolue de toute référence théorique qui est la conséquence des contre-réformes des années quatre-vingts a produit, par un phénomène de disparition en cascade, une catastrophe écologique ».

Certes, il ne s'agit pas de revenir à un enseignement axiomatique identique à celui de la réforme des mathématiques modernes, mais de mettre en place un environnement technologico-théorique cohérent et complet permettant de donner du sens aux techniques, sans se priver d'introduire un vocabulaire adéquat pour désigner les objets sur lesquels on travaille.

## Bibliographie


ABOU RAAD N. & MERCIER A. (2006) Sur le manque d'une théorie algébrique de la factorisation : le cas du PGCD. *Petit x* 72, 40-51.

ASSUDE T. (2002) Un phénomène d'évolution curriculaire : le cas de l'objet «inéquation» au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22(2/3) 209-236.

ASSUDE T., COPPE S. & PRESSIAT A. (2012) Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. Dans J.L. Dorier et A. Robert (Eds). *Enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives.* Hors série de Recherches en Didactique des Mathématiques, 41-62. La pensée Sauvage : Grenoble.

BOOTH L. (1984) Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x* 5, 5-17

BOSCH M. & GASCON J. (2004) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. *Balises pour la didactique des mathématiques,* 1-15. Grenoble: La Pensée Sauvage.

CASTELA C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 28(2), 135-182.

CHAACHOUA H. (2010) *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas: la modélisation des connaissances des élèves.* Note de synthèse pour une HDR, Université Joseph Fourier, Grenoble.

CHAACHOUA H., TRGALOVA J., VUIDEZ C. & NICAUD J.F (2010) Une nouvelle représentation en arbre des expressions algébriques dans le micromonde d'algèbre Aplusix. *Petit x* 84, 27-45

CHEVALLARD Y. (1984) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : l'évolution de la transposition didactique. *Petit x* 5, 51-94.

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives currriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* 19, 43-72.

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12/1, 73-112.

CHEVALLARD Y. & BOSCH M. (2012) L'algèbre entre effacement et réaffirmation aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. Dans J.L. Dorier et A. Robert (Eds). *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Hors série de Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19-40. La Pensée Sauvage : Grenoble.

COMIN E. (2009) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions en seconde. *Petit x* 79, 23-47.

COULANGE L. (2001) Evolution du passage arithmétique – algèbre dans les manuels et les programmes de 20° siècle. Contraintes et espaces de libertés pour le professeur. *Petit x* 57, 61-78.

CROSET M. (2009) *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

FERRATON G. (2011) *Rapport institutionnel à l'objet calcul littéral au collège: construction et utilisation d'un modèle de référence pour les trois types de tâche réduire, développer et factoriser une expression littérale.* Mémoire de M2, Université Joseph Fourier, Grenoble.

GRUGEON B. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement: BEP et Première G.* Thèse de Doctorat, Université Paris VII, Paris.

SACKUR C. & MAUREL M. (2000) Les inéquations en classe de seconde. Une tentative pour enseigner la nécessite des énoncés mathématiques. *Petit x* 53, 5-26.