FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES ET PHÉNOMÈNES PÉRIODIQUES : UN ACCÈS A LA MODÉLISATION DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE ?

NGUYEN THI Nga
Université de Pédagogie de Ho Chi Minh ville

Résumé. Cet article expose en premier lieu une comparaison des modalités de présentation du concept de périodicité dans l'enseignement secondaire en mathématiques et en physique, au Viêt Nam et en France. Ensuite, l'analyse des résultats d'une enquête menée en classe terminale, au Viêt Nam, sur la modélisation des phénomènes périodiques, nous permet d'éclairer les acquis et les difficultés des élèves relativement à la prise en compte adéquate de ces phénomènes à l'aide de fonctions. Nous concluons sur les obstacles à - et les possibilités de - l'entrée dans un processus de modélisation des phénomène périodiques dans l'enseignement.

Mots clés. Périodicité, fonctions périodiques, modélisation

Abstract. This paper presents on one hand a comparison of presentation modalities of the concept of periodicity in mathematics and physics secondary curricula, in Viêt Nam and in France. Next, results from an enquiry in 12th grade in Viêt Nam on phenomena modelling allow us to enlighten achievements and difficulties of pupils. These concern the ability to take into account these phenomena thanks to mathematical functions. We conclude on obstacles and opportunities to enter into a modelling process of periodical phenomena in teaching.

Keywords. Periodicity, periodic functions, modelization

Introduction

La périodicité est un concept employé en physique et par beaucoup d'autres disciplines scientifiques car il est central dans l'étude des phénomènes cycliques et des phénomènes oscillatoires. On retrouve ce concept en mathématiques *via* la notion de fonction périodique. Les fonctions périodiques – notamment les fonctions trigonométriques – se sont constituées progressivement dans les sciences comme outils de modélisation de grandeurs variables qui retournent régulièrement et indéfiniment au même état.
Les phénomènes cycliques ou oscillatoires sont présents très tôt dans les enseignements scolaires de la physique, de la chimie et de la biologie. Quand, dans l'enseignement secondaire, il est fait appel à une formalisation mathématique pour soutenir l'étude d'un phénomène périodique, cette formalisation est conduite, *via* des modèles mathématiques, donnant lieu à des phénomènes didactiques dont notre présent travail tente de rendre compte tant au Viêt Nam qu'en France.
Dans cet article, nous chercherons des éléments de réponse aux questions suivantes :
Comment l'étude des phénomènes périodiques vit-elle dans l'enseignement secondaire de la physique et des mathématiques au Viêt Nam et en France ? Comment s'articulent les différentes significations données au concept de périodicité par ces deux disciplines ?
Est-il possible d'introduire les élèves à des activités de modélisation dans les conditions et les contraintes institutionnelles de l'enseignement au Viêt Nam ?

1. Le concept de périodicité : son enseignement au Viêt Nam et en France

Les liens épistémologiques forts qu'entretiennent les sciences physiques et les sciences mathématiques nous ont incitée à restreindre à la physique notre enquête sur la modélisation des phénomènes périodiques même si d'autres sciences, telles les sciences de la vie ou celles de l'économie par exemple, étudient elles aussi des phénomènes qu'elles qualifient de

périodiques.
De plus la réforme de 1902 a introduit la notion de fonction dans l'enseignement des mathématiques en France en arguant de sa nécessité pour l'enseignement de la physique et donc en se référant à des problèmes extra-mathématiques. Ainsi que le note Belhoste :

> [...] le nouvel enseignement de la physique doit abandonner les méthodes descriptives et dogmatiques qui réduisaient l'expérimentation à la démonstration d'appareils. La physique expérimentale s'efforce de dégager des lois à partir des faits et ces lois doivent pouvoir s'exprimer sous forme mathématique. La représentation graphique fait apparaître, à partir des mesures expérimentales, des relations fonctionnelles entre variables et constantes physiques. Le professeur, précisent les instructions, « utilisera fréquemment les représentations graphiques, non seulement pour mieux montrer aux élèves l'allure des phénomènes, mais pour faire pénétrer dans leur esprit les idées si importantes de fonction et de continuité ». La notion de fonction s'introduit ainsi naturellement dans l'enseignement de la physique. Pour cette raison, la commission décide de l'introduire également dans l'enseignement des mathématiques. C'est l'innovation majeure des programmes du second cycle. L'étude des fonctions, en mathématiques, reste marquée par ses origines physiciennes. Elle est pratique, quasi-expérimentale : pas de définitions générales et abstraites, mais un crayon et du papier millimétré pour construire les graphes des quelques fonctions simples que le programme prévoit d'étudier. (Belhoste 1995, p. 58)

La raison d'être de la notion de fonction est ainsi identifiée comme réponse à un problème de modélisation de phénomènes issus de la physique. Dans un premier temps nous chercherons des éléments de réponse à la question : quels sont les phénomènes que la physique étudie dans l'enseignement et qu'elle considère comme périodiques ? avec quels modèles ?

1.1. Enseignement de la physique : deux modèles

Le tableau 1 présente le curriculum d'étude des phénomènes périodiques dans l'enseignement secondaire de la physique :

Classe	Au Viêt Nam	En France
9 (3^{ième})	aucun phénomène périodique enseigné en collège	Tension périodique, Tension sinusoïdale : période, fréquence
10 (2nde)	rotation des planètes dans le système solaire, mouvement circulaire uniforme : vitesse angulaire, accélération, période, fréquence	alternance des jours et des nuits, des phases de la Lune, mouvement de rotation, vitesse angulaire
12 (Tle)	oscillation harmonique (pendule (fil, ressort), pendule simple, pendule physique) : période, fréquence, amplitude, fréquence angulaire. - son, onde sinusoïdale - courant alternatif	- ondes progressives périodiques, onde sinusoïdale, son - circuit électrique oscillant - pendule simple

Tableau 1. *Phénomènes périodiques étudiés en physique*

Les deux institutions affichent l'objectif d'étudier des grandeurs variables avec le temps : tension électrique, distance, angle, etc. En arrière-plan, même non nommée ou non formalisée, se trouve toujours une fonction périodique dont la variable indépendante est le temps.

Plus prégnante au Viêt Nam qu'en France, la mathématisation des concepts est cependant présente dans les deux institutions et elle s'enrichit au cours du curriculum en s'appuyant sur ce que nous pouvons qualifier de deux modèles de la périodicité[3] : le mouvement circulaire uniforme (C) et l'oscillation harmonique (O).

3 La mise en évidence de ces deux modèles est l'un des résultats de notre travail de thèse (Nguyen Thi N. 2011)

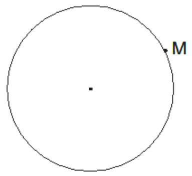
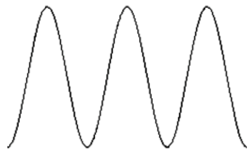
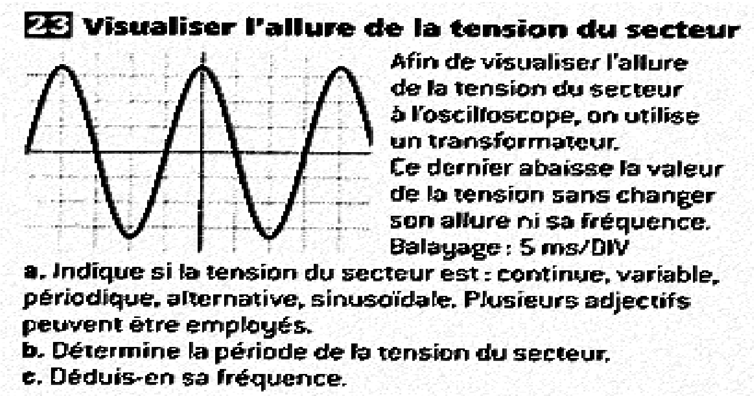
Modèle C	Modèle O
 Trajectoire circulaire et ω constant	 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

Figure 1. *Deux modèles mathématiques de la périodicité*

Introduite dès le collège en France, l'oscillation harmonique ne l'est que par des graphiques présentés comme résultant de prises de mesure (par exemple un oscillogramme). Le rôle du registre graphique est nettement en retrait au Viêt Nam où c'est le registre algébrique qui domine. Or le registre algébrique ne trouve toute sa place qu'après l'étude des fonctions trigonométriques en classe 11 de mathématiques. C'est pourquoi l'oscillation harmonique n'est présentée au Viêt Nam qu'en fin du lycée.

A titre illustratif, voici deux exercices tirés de manuels de physique, le premier d'une classe de troisième française (classe 9 du Viêt Nam) et le second d'une classe 12 vietnamienne (classe terminale française) :



23 Visualiser l'allure de la tension du secteur

Afin de visualiser l'allure de la tension du secteur à l'oscilloscope, on utilise un transformateur. Ce dernier abaisse la valeur de la tension sans changer son allure ni sa fréquence. Balayage : 5 ms/DIV

a. Indique si la tension du secteur est : continue, variable, périodique, alternative, sinusoïdale. Plusieurs adjectifs peuvent être employés.
b. Détermine la période de la tension du secteur.
c. Déduis-en sa fréquence.

Figure 2. *Exercice de la classe de troisième française*

L'équation d'oscillation harmonique d'un objet est

$x = 6\cos(4\pi t + \frac{\pi}{6})$ (cm)

a) Détermine l'amplitude, la fréquence angulaire, la période et la fréquence de l'oscillation.
b) Détermine la phase de l'oscillation au temps $t = \frac{1}{4}$ s. Déduis-en l'élongation à cet instant.
c) Construis un vecteur rotatif représentant l'oscillation au temps t = 0.

Figure 3. *Exercice de la classe terminale vietnamienne*

Notons, avec la présence de la notion de vecteur rotatif, la volonté institutionnelle vietnamienne de créer un lien entre mouvement circulaire et mouvement oscillatoire. Un tel lien n'existe pas dans l'institution française qui d'ailleurs ne cherche pas à faire vivre la cinématique dans l'enseignement de la physique[4].

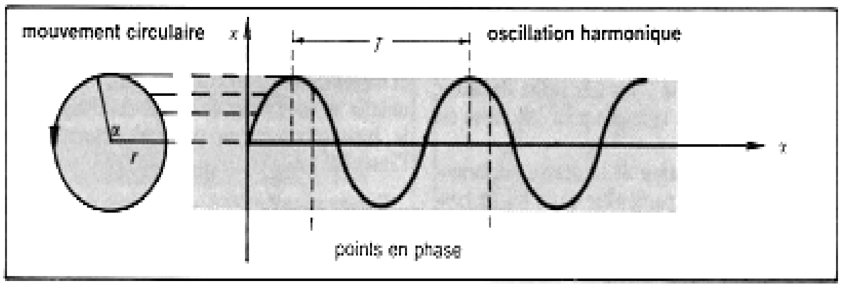
Notre analyse épistémologique montre que pour les physiciens, deux modèles principaux[5], celui du mouvement circulaire uniforme (C) et celui de l'oscillation harmonique (O), sont les modèles élémentaires de l'étude des phénomènes périodiques temporels.

- Le modèle C, caractérisé par une trajectoire circulaire et une vitesse angulaire constante, peut apparaître sous deux registres : algébrique ($x = R \cos \theta,\ y = R \sin \theta,\ \theta = \omega t$) et graphique (cercle)
- Le modèle O, présent sous trois registres – algébrique ($x = A \cos (\omega t + \varphi)$ où $x'' + \omega^2 x = 0$), vectoriel et graphique (sinusoïde) – est un modèle *fonctionnel* au sens où l'objet mathématique central du modèle est une fonction trigonométrique.

Le modèle C est cantonné à la Mécanique comme modèle de base pour l'étude des phénomènes cycliques réductibles aux mouvements d'un mobile sur une trajectoire. Il permet de travailler en particulier les concepts de vitesse et d'accélération.
Le modèle O est dominant en Physique des vibrations, des oscillations et des ondes. Ce modèle est à l'origine de nombreux et importants développements mathématiques, dont l'Analyse de Fourier, qui donnent une place centrale aux fonctions trigonométriques.

L'articulation de ces deux modèles est présentée dans « Atlas de la Physique », comme suit :

> L'oscillation harmonique peut être représentée comme la projection sur un plan d'un mouvement circulaire uniforme. (Breuer 1987, p. 38-39)



Projection sur un plan d'un mouvement circulaire uniforme

Pour Feynman (1979), ces deux modèles étant très proches mathématiquement, le passage de l'un à l'autre peut simplifier la résolution de certains problèmes :

> Nous pouvons remarquer que le mouvement circulaire uniforme et le mouvement oscillatoire vertical sont très proches mathématiquement parlant, et que nous pouvons donc étudier le mouvement oscillatoire d'une manière plus simple en l'imaginant comme la projection de quelque chose qui se déplace sur un cercle. […] Ce faisant nous serons en mesure d'étudier notre oscillateur à une dimension par l'intermédiaire du mouvement circulaire, ce qui est bien plus facile que de résoudre une équation différentielle. (Feynman 1979, p. 283)

Quels sont les objets que l'enseignement des mathématiques attachent à la périodicité ? Ce sera notre deuxième question.

4La cinématique, avant d'être attachée à l'enseignement de la physique, formait un thème substantiel des programmes de mathématiques d'avant la réforme des années 1970.
5Rappelons que c'est nous qui les repérons ainsi.

1.2. Enseignement des mathématiques : les fonctions trigonométriques

Le tableau 2 présente le curriculum d'objets mathématiques attachés au concept de périodicité dans l'enseignement secondaire des mathématiques :

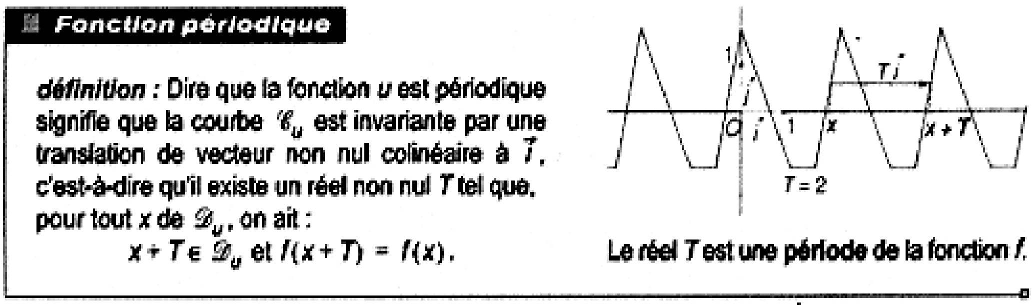
	En France (programme 2005)	**Au Viêt Nam (programme 2006)**
Collège	développement décimal périodique	développement décimal périodique
Lycée (2nd /classe 10)	- fonctions trigonométriques - fonctions périodiques (par graphique) - période, fréquence	
Lycée (1ère /classe 11)	fonctions périodiques	fonctions trigonométriques

Tableau 2. *Les objets de la périodicité en mathématiques*

Au-delà du canevas commun aux deux institutions, il importe de mettre en exergue deux différences essentielles :

- la première est qu'en France la périodicité d'une fonction, présente dans l'enseignement dès la classe de seconde, est regardée comme propriété d'une fonction au même titre que la parité - sur la base d'une définition générale - et donne lieu à la restriction de l'intervalle d'étude de la fonction dans les types de tâche « étudier une fonction numérique ». Au Viêt Nam, par contre, la périodicité est installée comme propriété des fonctions trigonométriques et ne vit donc qu'avec ces fonctions.
- la seconde est l'association, dans les types de tâche que l'on trouve en France, des deux registres de la fonction périodique – comme de toute autre fonction : le registre graphique *via* la courbe représentative dans un repère cartésien et le registre algébrique *via* la formule explicitant la relation entre la variable dépendante et la variable indépendante. Au Viêt Nam, par contre, le registre algébrique domine en laissant un rôle de supplétif au registre graphique.

Toujours à titre illustratif, voici deux morceaux « de cours » extraits de deux manuels du même niveau scolaire (la classe de première), l'un français et l'autre vietnamien :


Fonction périodique

définition : Dire que la fonction u est périodique signifie que la courbe $\mathscr{C}_u$ est invariante par une translation de vecteur non nul colinéaire à $\vec{i}$, c'est-à-dire qu'il existe un réel non nul T tel que, pour tout x de $\mathscr{D}_u$, on ait :

$x + T \in \mathscr{D}_u$ et $f(x + T) = f(x)$.

Figure 4. *Exercice de la classe de première française*

Une fonction y = f(x) définie sur l'ensemble D est appelée périodique s'il existe un nombre $T \neq 0$ tel que pour tout x appartenant à D, on a :

$x + T \in D$, $x - T \in D$ et $f(x + T) = f(x)$.

S'il existe un nombre positif minimal T satisfaisant ces conditions, cette fonction est appelée fonction périodique de période T.

Figure 5. *Exercice de la classe de première vietnamienne*

Outre l'absence de référence au graphique dans la définition proposée par le manuel vietnamien, notons l'explicitation du caractère de « minimalité » pour le nombre T désigné comme la « période de la fonction » alors que ce caractère est laissé dans l'ombre de la définition du manuel français.

2. Est-il possible d'introduire les élèves à des activités de modélisation ?

La commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (dite commission Kahane) (2000) recommande la mise en place dans l'enseignement d'un processus de modélisation et insiste pour que la modélisation fasse partie des préoccupations des enseignants de mathématiques.

> Nous souhaitons dire ici avec une certaine solennité que nous considérons que cette ouverture aux autres disciplines, notamment via la modélisation, fait partie de la mission du professeur de mathématiques. (Commission de réflexion sur l'enseignement des Mathématiques, p. 38)

De ce point de vue, les fonctions trigonométriques apparaissent comme un sujet particulièrement intéressant : elles peuvent être conçues à la fois comme outil de modélisation de phénomènes variables ou évolutifs et comme objets d'étude des disciplines scientifiques. Mais que recouvre le terme de modélisation dans l'enseignement secondaire actuel ?

2.1 Formes, rôle et statut de la modélisation

Sous le vocable de modélisation, Legrand distingue quatre activés fort différentes :

- une modélisation « prétexte » qui consiste à plaquer un « réel » qui servirait de support concret au modèle mathématique qu'on veut enseigner ou faire fonctionner ;

- une modélisation « modèle à suivre » qui sert de règle d'action par exemple pour un ingénieur, le modèle n'expliquant peut-être pas mais si on l'applique, ça marche ;

- une modélisation « modèle scientifique achevé » qui explique et rationalise un « réel », modèle qui est présenté tout fait ;

- une modélisation « acte de modélisation scientifique » où, partant d'un réel plus ou moins bien délimité et d'une question à la fois très précise mais aussi souvent trop vaste car trop ambitieuse, […] on construit un modèle à la fois pertinent vis-à-vis du questionnement initial et simultanément assez mathématisé […]. (Legrand, 2003)

Legrand fait alors remarquer que la troisième activité est la plus répandue à l'école et à l'université, ce qui s'explique, dit-il :

> elle plaît au professeur de mathématiques car elle ne l'oblige pas à entrer dans un débat philosophico-scientifique sur ce qu'on garde ou néglige » et elle plaît au professeur de physique car elle anoblit ses théories par les maths (cela semble plus rigoureux, moins contestable, plus facile à enseigner […]) (Ibidem, 2003)

Selon Krysinska et Schneider (2010), dans le « cours de mathématiques », le processus de modélisation fonctionnelle consiste principalement :

> [à] construire et/ou [à] identifier un modèle fonctionnel par une formule paramétrée, à partir d'ostensifs associés tels que des tableaux numériques, graphiques cartésiens ou équations fonctionnelles et adapter ce modèle aux spécificités du phénomène étudié. (p. 33)

Selon Bessot (2010) à propos de l'enseignement des mathématiques en France et au Viêt Nam :

> Il y a une propension à enseigner des modèles existants – éléments de savoir bien définis et dont l'enseignement peut faire l'objet d'une négociation sociale explicite. L'organisation de réelles activités de modélisation dans les cours de mathématiques se heurte au cloisonnement disciplinaire des savoirs caractéristique des institutions scolaires.

Nous rejoignons ces analyses et constats : les deux modèles C et O dont les praxéologies attestent la présence de la modélisation dans les enseignements secondaires français et vietnamien ne font vivre que des activités de modélisation « prétexte » ou « modèle scientifique achevé ». L'enseignement de la modélisation mathématique en particulier celle de phénomènes périodiques se réduit à l'enseignement de l'utilisation de modèles. Dans les exercices, les modèles mathématiques (C ou/et O) sont fournis avec l'énoncé et la réalité déjà modélisée sert de prétexte à un travail mathématique dans le modèle désigné.

En France, il existe des situations de « modélisation » où les fonctions associées sont données par les registres graphique ou algébrique. L'institution française demande d'exploiter des informations du phénomène à partir de son modèle mathématique (formule algébrique ou graphique). La conversion entre les deux registres algébrique et graphique d'une fonction est attendue institutionnellement.

Par contre, seul le registre algébrique est présent dans les situations de modélisation de l'institution vietnamienne. Le tableau numérique est absent aussi bien au Viêt Nam qu'en France en tant que registre premier. Par exemple, au Viêt Nam, le tableau numérique n'apparaît qu'après le tableau de variation pour tracer le graphique d'une fonction.

Dans aucune des deux institutions d'enseignement secondaire, il n'existe de praxéologie dédiée au passage de l'un des modèles C et O à l'autre, ni dans l'enseignement des mathématiques ni dans celui de la physique ; or l'enjeu d'un tel passage dans l'enseignement serait de travailler explicitement les interrelations entre la géométrie du cercle trigonométrique et les fonctions trigonométriques, *via* un processus de modélisation[6].

Dans l'institution vietnamienne, bien qu'il existe des exercices conjoints aux deux modèles C et O, les questions portent seulement sur le modèle O et son registre algébrique, la figure géométrique circulaire n'ayant qu'un rôle illustratif. Le recours au modèle C dans ces exercices n'est ni travaillé ni attendu. Nous n'en voulons pour preuve que l'exercice suivant, très représentatif de ce que l'on rencontre dans les manuels de mathématiques vietnamiens :

Exercice 17 page 29, mauel élevé, classe 11

Le nombre d'heure de lumière d'une ville A à la latitude 40^0 nord du t ième jour d'un an est donné par la fonction suivante :

$$d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12,\ t \in \mathbb{Z},\ \ 0 < t \leq 360^0$$

a) En quel jour la ville A a-t-elle juste 12 heures de lumière ?

b) En quel jour a-t-elle le moins d'heure de lumière ?

c) En quel jour a-t-elle le plus d'heure de lumière ?

Figure 6. *Exercice de « modélisation » en classe de première vietnamienne*

La référence au modèle O permet ici au mieux de montrer comment fonctionnent les résultats de la science astronomique mais ne permet pas d'entrer dans une démarche de modélisation ; à quoi sert par exemple la donnée de la latitude et la latitude fait-elle partie du modèle à construire ?

Dans ces conditions et contraintes, on peut se demander s'il est possible pour les élèves de se saisir de situations de modélisation et de les traiter avec les outils fonctionnels ou autres qui leur ont été enseignés.

6On trouve un exemple d'un tel passage dans l'ingénierie didactique de ma thèse (Nguyen Thi N. 2011).

2.2 Le questionnaire

Trois questions découlent des analyses précédentes. Elles sont à l'origine de la décision de construire un questionnaire à destination des élèves, le questionnaire servant à « travailler » les questions et à enrichir les analyses qui ont débouché sur ces mêmes questions :

Q1. Comment, dans les conditions actuelles de l'enseignement des mathématiques, l'élève utilise-t-il des savoirs non-mathématiques pour travailler à l'intérieur de l'un des modèles mathématiques C et O ?
Q2. Comment, dans les conditions actuelles de l'enseignement des mathématiques, l'élève se réfère-t-il à l'un des modèles mathématiques C et O pour résoudre un problème extra-mathématique ?
Q3. Dans quelles conditions l'élève peut-il entrer dans un processus de modélisation d'un problème extra-mathématique relatif à un phénomène périodique ?

Pour chercher des éléments de réponse à ces questions, nous avons conçu un questionnaire composé de trois exercices (voir en annexe le texte du questionnaire[7]). Tous les exercices sont bâtis sur un jeu de ruptures de contrat didactique à la périodicité et à la modélisation aussi bien au Viêt Nam qu'en France : par exemple aucun énoncé ne comporte les mots « périodicité » ou « périodique », et le modèle mathématique habituellement donné peut être absent.
L'énoncé de ces exercices renvoie, de manière plus ou moins explicite, à une fonction numérique dont la variable indépendante est le temps, fonction que l'élève devra reconnaître et utiliser pour répondre aux questions posées.

Pour les exercices 2 et 3

- la première question est ouverte : *« qu'est-ce que tu peux dire sur ce phénomène ? »*
- les questions suivantes suggèrent l'exploitation de la périodicité *via* le registre fonctionnel présent - graphique, formule algébrique ou table numérique – pour interpoler ;
- la dernière question *« Construire une figure [au-delà de ce qui est donné] »* favorise le recours à la périodicité *via* l'un des deux modèles C ou O.

L'exercice 4, quant à lui, ne privilégie aucun des deux modèles C et O. Il a pour objectif de motiver la modélisation d'un phénomène. L'élève doit participer au processus de modélisation pour construire le modèle mathématique correspondant, puis l'étudier et répondre aux questions sur le phénomène.

Le tableau 3 présente les variables du questionnaire :

Exercices	**Classe du phénomène périodique**	**Registre de la fonction**	**Rupture de contrat**
2	mouvement circulaire	algébrique	France
3	oscillations	numérique	France et Viêt Nam
4	mouvement circulaire	langue naturelle	France et Viêt Nam

Tableau 3. *Variables du questionnaire*

Les éléments des contrats et leurs ruptures mentionnés dans la dernière colonne du tableau 3 seront présentés au fur et à mesure de l'analyse qui suit.

7 L'exercice 1 a été retiré car non adéquat au propos de cet article.

3. Analyse des résultats obtenus au Viêt Nam

L'expérimentation s'est déroulée au Viêt Nam durant deux séances de 45 minutes. Le questionnaire a été proposé à des élèves de la classe terminale du lycée (classe 12 au Viêt Nam) après l'enseignement de l'oscillation harmonique en physique. Deux cents élèves de deux lycées de Ho Chi Minh ville l'ont passé individuellement. Il n'a pas été proposé en France mais nous pensons que l'analyse des réponses des élèves vietnamiens peut intéresser le lecteur français en éclairant la notion de périodicité dans ses relations avec les conditions et les contraintes de son enseignement.

3.1. Les différents sens de la périodicité

La première question de chacun des deux premiers exercices (que nous qualifions de question ouverte) fournissait l'occasion aux élèves d'exprimer la signification qu'ils donnent à la périodicité, au cas où ils reconnaîtraient la présence d'un phénomène périodique.
Dès lors que le phénomène n'est pas qualifié de périodique dans l'énoncé, certains élèves, très nombreux, rechignent à « voir » de la périodicité, se cantonnant à une vision locale du phénomène où les irrégularités prennent le dessus sur la régularité qu'apporterait une vision globale.

Voici un tableau qui synthétise les différentes réponses.

<table>
<tr><th>Reconnaissances de la périodicité</th><th>Caractérisation de la périodicité</th><th colspan="2">Exercice 2</th><th colspan="2">Exercice 3</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Oui</td><td>Répétition régulière</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">20</td></tr>
<tr><td>C'est périodique</td><td colspan="2">16</td><td colspan="2">39</td></tr>
<tr><td>Oscillation harmonique (O)</td><td>44</td><td rowspan="2">113</td><td>18</td><td rowspan="2">18</td></tr>
<tr><td>Mouvement circulaire uniforme (C)</td><td>88</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Total</td><td colspan="2">149</td><td colspan="2">77</td></tr>
<tr><td>Non</td><td></td><td colspan="2">42</td><td colspan="2">92</td></tr>
<tr><td>Pas de réponse</td><td></td><td colspan="2">9</td><td colspan="2">31</td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td><td colspan="2">200</td><td colspan="2">200</td></tr>
</table>

Tableau 4. *Les réponses à la question ouverte pour les trois premiers exercices*

H120[8] (en 3a) : Le niveau d'eau monte et descend irrégulièrement.

Nous constatons cependant que la référence aux modèles C et O est très forte dans l'exercice 2 mais très minoritaire dans l'exercice 3 (voir les cases grisées dans le tableau 4), ce qui peut s'expliquer par l'absence simultanée dans ce dernier exercice de graphique et de formule fonctionnelle, ceci combiné aux effets de la non primauté du tableau numérique pour l'analyse de la covariation dans l'institution vietnamienne.

3.2. Quelle articulation entre les phénomènes et les modèles mathématiques ?

Les réponses au questionnaire montrent que l'exploitation des informations sur le phénomène réel à partir du modèle mathématique associé pose problème à de nombreux élèves.
En effet, 51 élèves (soit 25,5%) en 2a et 95 (soit 42,5%) en 3a ne donnent pas de réponse ou décrivent simplement le phénomène. Les réponses montrent que ces élèves ont bien identifié la variation du phénomène selon le temps : à partir des informations données (dans le registre

8 H est l'initial de *Học sinh* qui veut dire élève en vietnamien.

algébrique ou numérique), ils savent indiquer les variables et la dépendance entre elles. La première variable, le temps, est toujours présente. La deuxième n'est pas indiquée en tant que telle mais amalgamée au phénomène lui-même. Par exemple, dans l'exercice 3, le temps est mis en relation avec la marée et non avec le niveau d'eau.
Cependant, ces élèves ne considèrent pas le phénomène globalement : les propriétés caractéristiques des phénomènes comme la répétition régulière, l'uniformité et l'alternance n'apparaissent pas dans leurs réponses. Le lien entre les phénomènes et les modèles n'est pas fait.

Etudions plus précisément comment les élèves exploitent les différents registres (algébrique et numérique) qui interviennent dans les deux exercices.

L'exploitation du registre algébrique : exercice 2 « La noria »

Dans la question 2a *« Qu'est-ce que tu peux dire sur le mouvement de la noria ? »*, la formule donnée $h = 2 + 2{,}5\sin[2\pi(t - \frac{1}{4})]$ suppose implicitement que le mouvement de la noria est considéré comme uniforme. Cependant, on ne peut pas conclure que, quand les élèves parlent de mouvement circulaire uniforme ou d'oscillation harmonique du phénomène dans leurs réponses, ils ont utilisé ce modèle mathématique. En effet, les explications de plusieurs élèves (32%) montrent que ce n'est pas la formule mais la réalité modélisée par cette formule qui est prise en compte.

Par exemple, voici la réponse de H28 :

> H28 Le mouvement de la noria est circulaire. Il est uniforme ou non ça dépend de la vitesse du courant d'eau à chaque instant.

72 élèves (soit 36%) ne peuvent pas répondre à la question 2b *« Trouve le rayon de la roue et la distance du centre de la roue à la surface de l'eau. »* et 29 (soit 14,5%) n'aboutissent pas. Par exemple, voici la réponse de H73.

> H73 h_{max} quand $\sin[2\pi(t - \frac{1}{4})] = 1$
>
> Donc le rayon de la grande roue = $\frac{h_{max} + A}{2} = \frac{2 + 2{,}5}{2} + A = 2{,}25 + A$
>
> La distance du centre de la grande roue à la surface de l'eau = 2,25.

Les explications de ces élèves montrent qu'ils sont incapables d'utiliser les données de l'énoncé, en particulier *via* la formule, pour répondre aux questions 2b et 2c. La signification des données dans la formule n'est pas exploitée.

De manière similaire, dans la question 2c *« On veut déverser dans le champ une quantité d'eau égale au déversement de 1000 seaux dans la gouttière. Pendant combien de temps la noria doit-elle tourner? »*, 120 élèves ne répondent pas, bien que plusieurs aient trouvé que la noria devait tourner de 125 tours. La formule, modèle O du phénomène, ne leur permet pas de calculer le temps mis par la noria pour tourner d'un tour. La raison de cet échec ne serait-elle pas que les notions de période en physique et en mathématiques ne sont pas articulées ?

En effet, dans l'enseignement des mathématiques au Viêt Nam, toutes les fonctions de la forme y = $A\sin(\omega x + \varphi) + B$ ont pour période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. La même formule est abordée dans l'enseignement de l'oscillation harmonique en physique, mais comme une relation entre la pulsation et la période : la période est alors le temps pour que l'objet fasse un tour complet. L'articulation entre les deux notions de période, en mathématique et en physique, est absente dans l'institution d'enseignement secondaire au Viêt Nam et donc indisponible chez les élèves.

L'exploitation du registre numérique : exercice 3 « Les marées »

Seulement 18 élèves se sont référés au modèle O dans la question 3a *« Que peux-tu dire sur ce phénomène ? »*. En ce qui concerne la question 3b *« Combien y a-t-il de marées hautes durant ces deux jours ? Combien y a-t-il de marées basses ? »*, 106 élèves (soit 53%) donnent la réponse correcte (4 fois). Les autres élèves fournissent des résultats erronés (comme 2 fois, 6 fois, 8 fois, …) ou ne peuvent pas répondre. La difficile lecture des informations sur le phénomène à partir de la table numérique est aggravée par une certaine incompréhension de l'énoncé, notamment des termes « marée haute » et « marée basse », pourtant définies dans l'énoncé.

Dans la question 3c *« Quelle est l'amplitude moyenne des marées à Saint-Malo sur les deux jours ? »*, les résultats des calculs sont très variés, les élèves utilisant des formules différentes pour calculer l'amplitude moyenne. Par exemple :

- H108 calcule la moyenne des différences entre les niveaux d'eau les plus hauts et les plus bas :

H108 $$\overline{A}=\frac{(11{,}54-2{,}12)+(11{,}64-2{,}10)+(11{,}45-2{,}05)+(11{,}72-2{,}33)}{4}=9{,}4375$$

- H163 calcule la moyenne des niveaux d'eau :

H163 L'amplitude moyenne du 9 mai = $\frac{\Sigma h}{n}=7{,}03$

L'amplitude moyenne du 10 mai = $\frac{\Sigma h}{n}=6{,}73$

Seuls 17 élèves (soit 8,5 %) calculent l'amplitude moyenne selon la définition donnée dans l'énoncé. Ainsi H90 conclut :

H90 L'amplitude moyenne : $\overline{A}=\frac{(11{,}54-2{,}1)+(11{,}45-2{,}33)}{2}=9{,}28$

(Le symbole $\overline{A}$ découle de la notion d'amplitude, utilisée dans l'enseignement de la physique).

Outre la non-compréhension par certains élèves des notions de marée (haute et basse), un grand nombre d'élèves n'identifie pas dans la table de données le phénomène comme oscillatoire (modèle mathématique O). Ils ne peuvent donc pas l'utiliser pour répondre aux questions.

3.3. La périodicité comme outil ?

Nous n'analysons ici que l'exercice 3. En effet, les questions 3d et 3e de cet exercice demandent une modélisation par la périodicité des phénomènes abordés pour interpoler, ce qui n'est pas le cas de l'exercice 2.

Le tableau 5 résume la prise en compte de la périodicité dans les réponses des élèves :

		Présence de la périodicité	**Absence de la périodicité**	**Pas de réponse**
Exercice **3** Marées	**3d**	124 (62%)	12 (6%)	64 (32%)
	3e	50 (25%)	6 (3%)	144 (72%)

Tableau 5. *Exploitation ou non de la périodicité pour interpoler*

Le nombre d'élèves qui ne répondent pas à la question 3e *« Construire une figure [au-delà de ce qui est donné] »* est grand (72%). Pour eux, la périodicité n'est donc pas disponible pour prolonger le graphique. On peut y voir un effet de l'absence explicite dans l'étude des fonctions trigonométriques de l'enseignement secondaire vietnamien du type de tâche « *Prolonger un graphique de fonction* ».

Exercice 3 « Les marées »

A la question 3d « Le capitaine d'un bateau veut prendre la mer à Saint-Malo le 11 mai. Le tirant d'eau de son bateau est de 7 mètres. A quelles heures peut-il partir le 11 mai ? », 86 élèves (43 %) donnent la bonne réponse : le bateau peut partir de 7h à 11h et de 19h à 23h. Ce résultat est déduit du niveau d'eau du 10 mai ou de celui des deux jours 9 et 10 mai. La réponse - de 6h à 11h et de 18h à 23h - qui s'appuie sur le seul jour du 9 mai est donnée par 18 élèves. Les 104 élèves ont donc modélisé la quasi périodicité du phénomène par une périodicité pour pouvoir interpoler des données hors du tableau. Mais cela reste impossible pour 64 élèves (32 %) qui ne donnent pas de réponses à cette question.

En question 3e « *Construis une figure permettant d'apprécier les hauteurs d'eau dans ce port durant la totalité des trois jours 9, 10 et 11 mai 2009* », malgré la présence de la table de données, registre courant pour construire le graphique d'une fonction, seuls 56 élèves (soit 28 %) produisent un dessin.

• 50 élèves (25 %) construisent un graphique périodique : 23 le font sur une seule période de 24 heures ou même sur une demi-période de 12 heures, 5 élèves construisent trois graphiques distincts correspondant aux trois jours des 9, 10 et 11 mai 2009 et 2 élèves utilisent les lignes brisées comme dans la figure 7 de H7 :

Figure 7. *Graphique de H7*

• 6 élèves (3%) construisent un graphique non-périodique tel celui-ci (figure 8) :

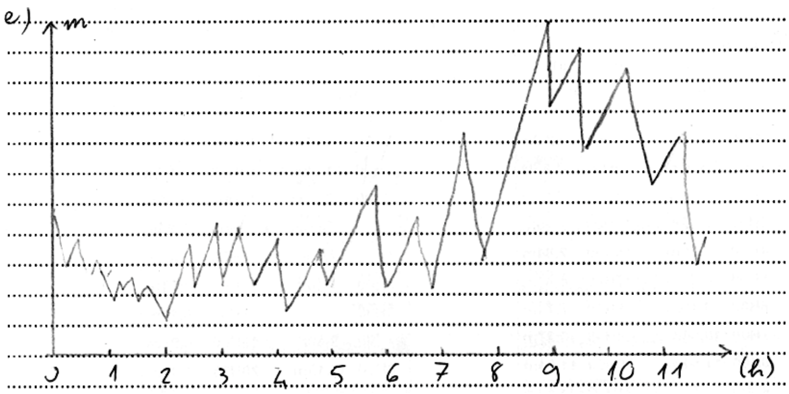


Figure 8. *Figure de H71*

3.4. L'entrée dans le processus de modélisation : exercice 4 « La grande roue d'Ho Chi Minh »

Notre analyse institutionnelle le montre : que ce soit en France ou au Viêt Nam, les manuels proposent peu de problèmes issus de contextes extra-mathématiques pour étudier des phénomènes périodiques et quand ils le font, c'est en imposant immédiatement le modèle mathématique à suivre. Le travail demandé à l'élève se situe alors dans ce modèle mathématique. On attend aussi de lui, qu'après ce travail, il reformule les résultats mathématiques dans le contexte pour apporter les réponses aux questions posées sur la réalité. L'analyse des manuels nous conduit à penser que l'élève ne passe pas par les étapes intermédiaires qui constituent le cœur et le moteur du processus de modélisation.

De ce point de vue, l'exercice 4 constitue une rupture de contrat aussi bien pour la France que pour le Viêt Nam car aucun modèle de la fonction n'est donné au travers de ses registres, même si la photo de la grande roue peut induire le modèle C. De plus, cet exercice est à l'origine d'une ingénierie didactique expérimentée dans les deux pays. C'est pour ces raisons que nous en présentons une analyse spécifique.
La majorité des élèves sont bien entrés dans un processus de modélisation. Ils ont produit trois sortes de modèles : une formule algébrique liée au modèle O ou au modèle linéaire (proportionnalité), une figure géométrique basée sur un cercle liée au modèle C. Le tableau 6 présente la répartition des élèves selon ces trois modèles et selon les trois questions 4a, 4b et 4d que nous présentons ci-dessous :

4a) A quel instant Minh est-il à la position la plus haute ? (notée h_{max} ?)

4b) Calcule la hauteur de la cabine de Minh au sol après 2,5 minutes du voyage, après 7 minutes, après 12 minutes et après 22 minutes (notée h pour t ?)

4d) A partir de 35 m de hauteur on voit la rivière Saigon. Combien de temps Minh peut-il la voir pendant tout un voyage ? (notée t pour h ?).

	Cercle (C)	Formule algébrique (O)	Proportionalité (modèle linéaire L)	Pas de réponse
4a (h_{max}?)	159	12		29
4b (h pour t?)	45	42	72	41
4d (t pour h?)	23	9	30	138

Tableau 6. *Présence de trois modèles dans l'exercice 4*

Nous allons maintenant analyser de façon plus qualitative la présence de ces trois modèles.

3.4.1. Présence du modèle C via la représentation géométrique de la grande roue

Le modèle C est largement dominant dans les réponses à cette question puisqu'il est utilisé par 159 élèves (79,5%). Il apparaît sous son registre géométrique : la grande roue est représentée par un cercle et dans la plupart des dessins le sol apparaît sous la forme d'un segment. La cabine de Minh est un point sur ce cercle. Ci-après le dessin de H45.

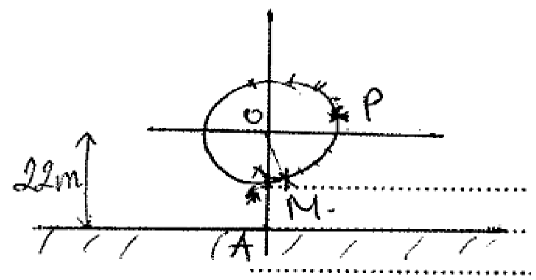


Figure 9. *Figure de H45*

La majorité des élèves, soient 121 élèves (60,5%), donnent la réponse attendue : 5 minutes, 15 minutes et 25 minutes. Ces réponses s'appuient sur un raisonnement basé explicitement ou non sur la périodicité, la période étant le temps pour que la cabine fasse un tour. Le lien entre les deux variables, période et position, est établi selon le modèle C. Par exemple, voici la réponse de H34 :

H34 Un tour prend 10 minutes. Un demi-tour prend 5 minutes.
En conséquence, la cabine de Minh est à la position la plus haute après 5 minutes, 15 minutes et 25 minutes du voyage.

Les 38 autres élèves ne donnent que le premier instant t = 5 minutes sans tenir compte de la périodicité.

Dans la question 4b, le modèle C est abandonné par 114 élèves au profit des modèles algébriques O ou L. Seuls 45 élèves tentent de calculer les hauteurs grâce à la représentation géométrique du modèle C. Parmi eux, 33 trouvent un résultat erroné ou ne terminent pas.

Par exemple, la résolution (erronée) de H28 est la suivante :

H28 Après 2,5 minutes, la cabine tourne $\frac{1}{4}$ tour $\Rightarrow$ hauteur de la cabine au sol est égale à celle du centre de la grande roue $\Rightarrow$ h = 22 m
7 minutes = 2 + 5 minutes $\Rightarrow$ la cabine passe le point le plus haut et tourne $\frac{1}{5}$ tour plus $\Rightarrow$ hauteur de la cabine $22+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=22+\sin\frac{\pi}{10}$
t = 12 minutes, la cabine passe le point le plus bas et tourne $\sin 18^0 = \sin\frac{\pi}{10}$
$\Rightarrow$ hauteur de la cabine : $(22-20)+\sin\frac{\pi}{10}=2+\sin\frac{\pi}{10}$
t = 22 minutes, position de la cabine est la même que celle à l'instant 12 minutes $\Rightarrow$ hauteur de la cabine = $2+\sin\frac{\pi}{10}$

L'affaiblissement de la présence du modèle C se renforce en question 4d puisque seuls 19 élèves utilisent une stratégie liée à ce modèle. Parmi eux, 10 donnent un résultat erroné.

3.4.2. Présence du modèle O via l'écriture d'une formule

L'écriture d'une formule est très coûteuse car elle est en rupture avec le contrat didactique à ce type de tâche pour lequel la formule est toujours donnée au Viêt Nam. Cependant, la force du contrat algébrique (résolution d'équations) dans l'enseignement secondaire au Viêt Nam pousse 12 élèves à modéliser algébriquement la relation entre la hauteur et le temps par une formule, puis à résoudre des équations pour trouver les temps correspondant à la hauteur maximale h_{max}. Dans leur formule, les fonctions trigonométriques prennent en charge la périodicité. Par exemple :

H8 d = 40 m, donc R = 20 m. Trois tours prennent 30 minutes, donc T = $\frac{30}{3}$ = 10 minutes = 600 secondes $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{300}$ (rad / s)
Choisissons la direction positive qui oriente au dessus. À l'instant t = 0, P est à la position correspondant à -20 m, donc $x = A\cos\varphi = -Ax = A \Rightarrow \cos\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \pi$

L'équation du mouvement de P : $h=20\cos\left(\frac{\pi}{300}t+\pi\right)$

À la position la plus haute : $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{300}t+\pi\right)=1\\ t\leqslant 1800\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{\pi}{300}t+\pi=k2\pi\\ t\leqslant 1800\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} t=300\,\mathrm{s}=5\,\mathrm{min}\\ t=900\,\mathrm{s}=15\,\mathrm{min}\\ t=1500\,\mathrm{s}=25\,\mathrm{min}\end{cases}$

Parmi les 12 élèves qui s'engagent dans cette modélisation algébrique, 7 écrivent une formule erronée, attestant de son caractère inhabituel et de son coût en risque d'erreurs.

H187 Le mouvement de la grande roue est circulaire uniforme.

T = 10 minutes, donc ω = $\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{5}$ (rad / minute)

$A = \frac{40}{2}=20(\mathrm{m})$

À l'instant $t = 0$, $x = 0$ et $v_{max} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow A\ \omega = -A\ \omega\ \sin\varphi$

$\Rightarrow \sin\varphi = -1$

$\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

L'équation du mouvement de la grande roue : $x=20\cos(\frac{\pi}{5}t-\frac{\pi}{2})$

Quand la cabine de Minh est à la position la plus haute, la hauteur de Minh au sol est 42 m.

On a : $\cos(\frac{\pi}{5}t-\frac{\pi}{2})=2{,}1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{5}t-\frac{\pi}{2}=\arccos 2{,}1+k\,2\pi \\ \frac{\pi}{5}t-\frac{\pi}{2}=-\arccos 2{,}1+k\,2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{5}{2}\arccos 2{,}1+k\,2\pi \\ t=-\frac{5}{2}\arccos 2{,}1+k\,2\pi \end{cases}$$

Nous analysons les erreurs de H187 comme provenant d'une difficulté à extraire des informations de la pseudo-réalité (comme les conditions initiales et la position la plus haute de la cabine) sans modèle intermédiaire entre la pseudo-réalité et le modèle algébrique. Par contre, la résolution de l'équation trigonométrique $\cos(\frac{\pi}{5}t-\frac{\pi}{2})=2{,}1$ ne pose aucun problème à l'élève car il retrouve une tâche routinière de la classe 11.

La formule trouvée dans la question 4a est réutilisée pour la question 4b et c'est ce que font les 12 élèves précédents. À ces 12 élèves s'ajoutent 30 élèves. Cependant, une fois la formule écrite et les calculs permis par cette formule effectuée, la réalité modélisée ne sert pas au contrôle des résultats. Illustrons notre propos par la production de H104. Après avoir construit la formule : $h=20\cos(\frac{\pi}{300}t+\pi)$ pour trouver les instants durant lesquels la cabine se trouve au plus haut dans la question 4a, cet élève réutilise cette formule pour répondre à la question 4b comme suit :

H104 t = 2,5 minutes = 150 secondes $\Rightarrow A=20\cos(\frac{\pi}{300}t+\pi)=0$

t = 7 minutes = 420 secondes $\Rightarrow A=20\cos(\frac{\pi}{300}t+\pi)=6{,}18$

t = 12 minutes = 720 secondes $\Rightarrow A=20\cos(\frac{\pi}{300}t+\pi)=-6{,}18$

t = 22 minutes = 1320 secondes $\Rightarrow A=20\cos(\frac{\pi}{300}t+\pi)=-6{,}18$

Les deux derniers résultats attestent que H104 ne retourne pas à la réalité pour contrôler ses résultats. De même, bien qu'il ait répondu à la question 4a – « *Aux instants t = 5 minutes, t = 15 minutes et t = 25 minutes, la hauteur de la cabine est la plus haute, h = 42m* » il écrit qu'à l'instant t = 2,5 minutes, la hauteur h est nulle !

Dans la question 4d, on constate une forte diminution du nombre d'élèves qui utilisent leur formule algébrique représentant la hauteur en fonction du temps : 9 élèves contre 42 en question 4b. Ces élèves donnent un résultat erroné. Ils se heurtent au problème de la résolution d'une inéquation, inhabituel en classe 11.

3.4.3. Modèle linéaire (L)

Plus d'un tiers des élèves (72 sur 200) utilisent la linéarité pour calculer les hauteurs ; ni le modèle C ni le modèle O ne sont présents dans leur réponse. Cette linéarité lie le temps au diamètre du cercle ou le temps à la hauteur de la cabine. Par exemple, regardons les réponses suivantes de H17, qui combine périodicité et linéarité dans sa solution :

H17 A l'instant t = 5 minutes, la hauteur de la cabine de Minh au sol est 42 m.
2,5 minutes : h = 22 m
7 minutes : $h = 42 - (\frac{7{,}42}{5} - 42) = 25{,}2\,\mathrm{m}$

12 minutes : $h = \frac{2{,}42}{5} = 16{,}8\,\mathrm{m}$

22 minutes : $h = \frac{2{,}42}{5} = 16{,}8\,\mathrm{m}$

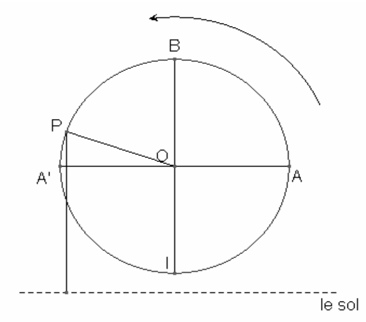
On voit que même dans le modèle linéaire, la périodicité intervient: par exemple dans le réponse de H17, la hauteur au temps t = 12 minutes et t = 22 minutes est la même que la hauteur au temps t = 2 minutes. Il donne la réponse sans calcul.

Les réponses de ces élèves ne s'appuient pas sur le modèle C. Et notons qu'une solution linéaire correcte s'appuyant sur le modèle C existe : elle relie le temps et l'angle de rotation.

1 minute ------------> $\frac{1}{10}\,tour = \frac{\pi}{5}$

t minutes --------------> $\frac{\pi t}{5}$

Une fois trouvé l'angle de rotation, on doit utiliser les propriétés du triangle pour trouver la hauteur demandée. Par exemple, pour t = 7 minutes : $\frac{\pi t}{5}$



$IOP = \frac{7\pi}{5}$ donc $A'OP = \frac{3\pi}{2} - \frac{7\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$, donc $h = 22 + 20 \sin\frac{\pi}{10} \approx 28{,}18\ m$

Pour conclure sur l'exercice 4, nous allons analyser les réponses à la question 4c *« Construis une figure permettant d'apprécier les hauteurs de la cabine P durant les trois tours du voyage »*.
Rappelons que dans l'exercice 4, contrairement aux 2 exercices qui le précédent, ne sont donnés dans l'énoncé ni formule, ni table de données, ni graphique. 150 élèves ne donnent aucune réponse. Parmi les 50 élèves produisant une figure : 46 construisent une sinusoïde (O)

(15 avec des erreurs sur la période ou sur les valeurs de la fonction), 3 construisent un cercle (C) et enfin 1 élève (H21) construit à la fois un cercle (C) et une sinusoïde (O) : voir ci-après la figure 10.

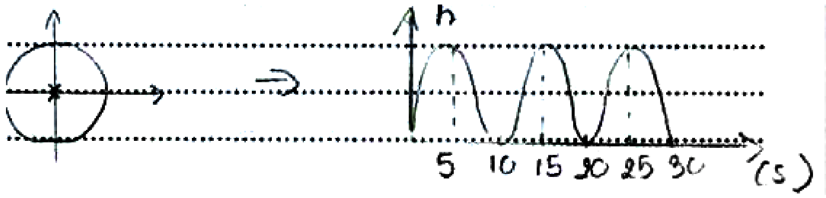


Figure 10. *Figure de H21*

Ci-après l'exemple de la sinusoïde produit par H30 (figure 11).

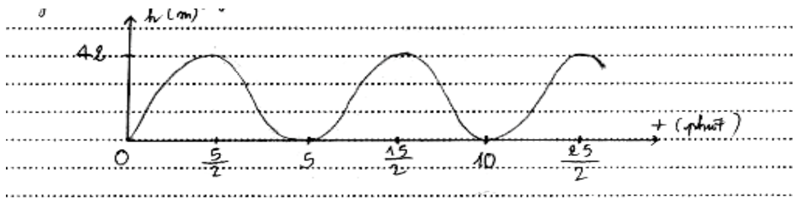


Figure 11. *Graphique de H30*

Cet élève a utilisé le cercle pour répondre à la question 4b : comme H21 il articule (O) et (C) en s'appuyant sur (C) modèle intermédiaire pour tracer la sinusoïde. Il parle d'oscillation harmonique à propos du mouvement de la cabine :

> H30 Le mouvement de la grande roue est une oscillation harmonique, donc le mouvement de la cabine est périodique et est une sinusoïde.

Par ailleurs, 13 élèves ne donnent que l'allure du graphique sans inscrire de valeurs (t, h) même s'ils ont trouvé quelques couples de valeurs en question 4b. Ces figures semblent être des idéogrammes de l'oscillation harmonique. Elles ne permettent pas d'« apprécier la hauteur pendant trois tours du voyage » comme demandée : par exemple, la réponse de H107 :
Puisque après 10 minutes, P retourne à l'ancienne position, donc P fait une oscillation harmonique selon l'équation x = A cos (ωt+φ). Donc le graphique a la forme suivante (figure 12) :

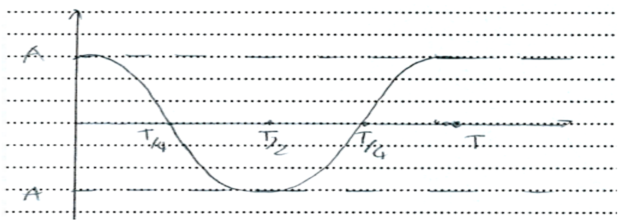


Figure 12. *Réponse de H107*

Que font les 82 élèves qui en 4a et 4b ont représenté la grande roue par un cercle et le sol par un segment de droite ? La plupart d'entre eux construisent une sinusoïde ou ne donnent pas de réponse en question 4c. Ce modèle géométrique n'est pas utilisé pour apprécier la hauteur de la cabine en fonction du temps comme le demande l'énoncé.

Pour la grande majorité des élèves qui répondent à cette question, le terme « figure » de l'énoncé coïncide avec le graphique d'une fonction représentant la hauteur en fonction du temps. Ceci était aussi le cas pour la même question « Construire une figure… » dans les exercices 1 et 3. On peut bien sûr interpréter cette invariance dans les réponses des élèves comme un effet des contraintes propres au lycée vietnamien : quand on demande de construire une figure hors du domaine de la géométrie, cette figure est la représentation graphique d'une fonction. Mais cela montre aussi que les élèves interprètent bien les phénomènes extra mathématiques proposés comme relevant du domaine fonctionnel, même en l'absence des registres emblématique des fonctions (graphique et formule).

Conclusion

Cette enquête nous permet donc d'apporter des éléments de réponse aux questions posées pour éclairer la notion de périodicité en rapport avec les conditions et les contraintes de son enseignement.

Tout d'abord, la périodicité est comprise par les élèves comme une répétition, une régularité dans un mouvement circulaire ou dans une oscillation. Cette propriété est bien sûr présente dans les références aux modèles C et O, mais elle peut l'être aussi dans le fonctionnement du modèle linéaire comme le prouvent les analyses relatives à l'exercice 4. Cependant, les propriétés périodiques des phénomènes sont rarement pour les élèves des outils pour résoudre les problèmes qui leur sont proposés. Tout se passe comme si les élèves ne parvenaient pas à relier les phénomènes périodiques aux modèles mathématiques, comme C et O, qui permettent de les étudier.

On a pu remarquer que les deux modèles C et O sont perçus mais la prédominance du regard local sur la covariation empêche leur articulation et leur exploitation comme on peut le voir dans l'exercice 4 du questionnaire de l'enquête. La confrontation des deux modèles s'érige en obstacle à la mobilisation des outils mathématiques que constituent les modèles. En effet, en plus des difficultés comme prendre des informations de la réalité (ou du pseudo-concret) pour les placer dans le modèle mathématique ou comme replacer dans la réalité les résultats du travail mathématique obtenus du modèle ou les rejeter, nous faisons l'hypothèse que la concurrence des deux modèles oblige à des conversions entre registres et au réemploi dans l'un des modèles d'objets mathématiques qui, institutionnellement, n'y sont pas présents.

Les réponses au questionnaire attestent des conséquences de l'état institutionnel : elles révèlent les difficultés que rencontre l'élève vietnamien dans la modélisation de phénomènes périodiques. Principalement, ce sont des difficultés à :

- choisir, selon le problème à résoudre, l'un des deux modèles C ou O
- spécifier le modèle choisi (les données et les paramètres)
- passer de l'un des modèles à l'autre

L'articulation entre savoirs mathématiques, issus des modèles C et O, et savoirs extra-mathématiques, appelés par le contexte de l'exercice, est l'une des pistes de travail pour comprendre les phénomènes didactiques à l'œuvre dans une activité de modélisation.
Comme on pouvait le prévoir, l'entrée dans un processus de modélisation est difficile pour la plupart des élèves. Bien que les élèves puissent en général déterminer un ensemble de variables dépendantes, ils rencontrent des difficultés pour la construction d'un modèle mathématique. Notamment, l'étape de validation semble être absente dans les réponses de la plupart des élèves : une fois le travail effectué au sein du modèle, ils sont incapables d'évaluer si les résultats obtenus sont adaptés ou non à la réalité extra mathématique étudiée. Il faut remarquer que cette responsabilité ne leur a jamais été déléguée, c'est donc une initiative qu'ils peuvent juger au-delà de ce qui est attendu d'eux dans un contrat didactique classique.

Bibliographie

BELHOSTE B. (1995) *Les Sciences dans l'enseignement secondaire français, textes officiels (1789-1914)*, INRP et Economica, Paris.

BESSOT A. (2010), Modélisation mathématique de phénomènes variables dans l'enseignement à l'aide de la géométrie dynamique, *Deuxième séminaire franco-vietnamien de didactique des mathématiques Didactique, Méthodologie, et Enseignement/ Apprentissage des Mathématiques*, Viêt Nam, Ho Chi Minh Ville, 26 et 27 avril 2010.

BIREBENT A., NGUYEN THI N. (2010) Une étude didactique de la modélisation des phénomènes périodiques, *Deuxième séminaire franco-vietnamien de didactique des mathématiques Didactique, Méthodologie, et Enseignement/ Apprentissage des Mathématiques,* Viêt Nam, Ho Chi Minh Ville, 26 et 27 avril 2010.

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **12/1**, 73-112.

COMMISSION DE REFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES (2000), *La formation des maîtres en mathématiques*, Rapport d'étape. Disponible sur : smf4.emath.fr/en/Enseignement/CommissionKahane/

KRYSINSKA M., SCHNEIDER M. (2010) *Emergence de modèles fonctionnels*, Editions de l'Université de Liège.

LEGRAND M. (2003) Différents types de modélisation dans l'enseignement, *Recueil des contributions présentées à la séance du Comité Scientifique des IREM* le 26 novembre 2003, pp 34-35.

NGUYEN THI N. (2011) *La périodicité dans les enseignements scientifiques en France et au Viêt Nam : une ingénierie didactique d'introduction aux fonctions périodiques par la modélisation*. Thèse Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Ouvrages de physique cités

BREUER H. (1987), *Dtv-Atlas zur Physik*, Version française de M. Meslé-Gribenski, P. Morin, M. Sénéchal-Couvercelle, Edition de Librairie Générale Française.

P. FEYNMAN R. (1963) *The Feyman lectures on Physics*, Version française de G. Delacote et M. Bloch, Paris : InterEditions, 1979.

Manuels scolaires français cité

Mathématique 1re S, Collection Déclic, Editions Hachette, 2005

Physique-Chimie 3^{e}, Collection Parisi, Editions Belin, 2008

Manuels scolaires vietnamiens cités

Manuel Mathématique avancé de classe 11, 2007, Maison d'édition Education et Formation.

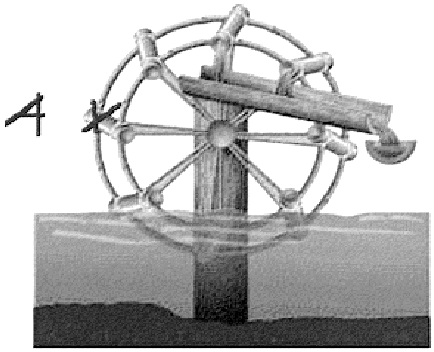
Manuel Physique avancé de classe 12, 2007, Maison d'édition Education et Formation.

ANNEXE. QUESTIONNAIRE POUR L'ELEVE

Exercice 2

Les peuples montagnards du Nord utilisent souvent la noria pour apporter de l'eau aux champs élevés. C'est une grande roue, comme la roue d'une bicyclette, avec des seaux attachés par des goupilles. Les seaux sont successivement immergés, remplis et vidés dans une gouttière.

Supposons qu'une noria ait 8 seaux attachés comme ci-dessous. Un mathématicien étudie la « hauteur » du seau, noté A dans la figure, par rapport à la surface de l'eau. Cette hauteur est positive quand le seau est au dessus de l'eau, négative quand il est au dessous. A chaque instant t (calculé en minutes), le mathématicien a trouvé que cette hauteur (calculée en mètres) suit la loi suivante : $h=2+2{,}5\sin[2\pi(t-\frac{1}{4})]$



(Source : http://www.machinerylubrication.com/Read/1294/noria-history)

a) Qu'est-ce que tu peux dire sur le mouvement de la noria ?
b) Trouve le rayon de la roue et la distance du centre de la roue à la surface de l'eau.
c) On veut déverser dans le champ une quantité d'eau égale au déversement de 1000 seaux dans la gouttière. Pendant combien de temps la noria doit-elle tourner?

ANNEXE. QUESTIONNAIRE POUR L'ELEVE (suite)

Exercice 3

On a relevé la hauteur d'eau au port de Saint-Malo en France les 9 et 10 mai 2009 dans les deux tableaux ci-dessous :

9 mai 2009

Matin		Après-midi	
0H00	5,02m	12H00	5,60m
1H00	3,38m	13H00	3,87m
2H00	2,30m	14H00	2,62m
3H00	2.12m	15H00	2.10m
4H00	3.28m	16H00	2.84m
5H00	5.62m	17H00	4.91m
6H00	8.40m	18H00	7.71m
7H00	10.64m	19H00	10.27m
8H00	11.54m	20H00	11.64m
9H00	11,05m	21H00	11,51m
10H00	9,62m	22H00	10,27m
11H00	7,66m	23H00	8,36m

10 mai 2009

Matin		Après-midi	
0H00	6,22m	12H00	6,78m
1H00	4,28m	13H00	4,82m
2H00	2,83m	14H00	3,30m
3H00	2,05m	15H00	2,33m
4H00	2.39m	16H00	2.34m
5H00	4.10m	17H00	3.71m
6H00	6.73m	18H00	6.19m
7H00	9.40m	19H00	8.96m
8H00	11.15m	20H00	11.04m
9H00	11,45m	21H00	11,72m
10H00	10,51m	22H00	11,03m
11H00	8,83m	23H00	9,46m

(Source : http://maree.frbateaux.net)

a) Que peux-tu dire sur ce phénomène ?

b) Combien y a-t-il de marées hautes durant ces deux jours ? Combien y a-t-il de marées basses ?
(La marée haute est le niveau le plus élevé de chaque marée montante. Par opposition, la marée basse est le niveau le plus bas de chaque marée descendante.)

c) Quelle est l'amplitude moyenne des marées à Saint-Malo sur les deux jours ?
(L'amplitude des marées dans un jour est la différence de hauteur entre le niveau de la marée haute et celui de la marée basse suivante).

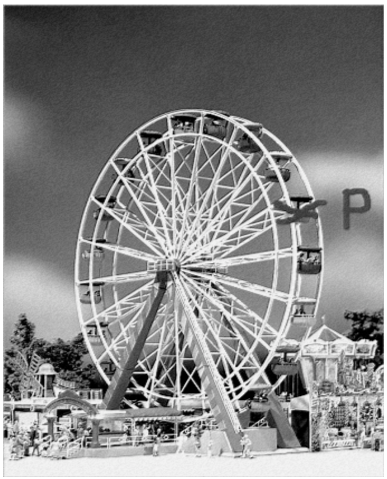
d) Le capitaine d'un bateau veut prendre la mer à Saint-Malo le 11 mai. Le tirant d'eau de son bateau est de 7 mètres. A quelles heures peut-il partir le 11 mai ?
(Le tirant d'eau est la hauteur de la partie immergée du bateau qui varie en fonction de la charge transportée. Il correspond à la distance verticale entre la ligne de flottaison d'un bateau et le bas de la quille. Un bateau dont le tirant d'eau est de d mètres peut naviguer en toute sécurité quand la hauteur d'eau est supérieure à d mètres).

e) Construis une figure permettant d'apprécier les hauteurs d'eau dans ce port durant la totalité des trois jours 9, 10 et 11 mai 2009.

ANNEXE. QUESTIONNAIRE POUR L'ELEVE (suite)

Exercice 4

Un parc d'attraction de Ho Chi Minh ville possède une grande roue de 40 m de diamètre dont le centre est situé à 22 m du sol.



La roue tourne toujours dans le même sens de manière uniforme. Au début du voyage, la cabine P se trouve au plus bas et Minh s'y assoit. Il fait un voyage de 3 tours qui dure 30 minutes.

a) A quel instant Minh est-il à la position la plus haute ?

b) Calcule la hauteur de la cabine de Minh au sol après 2,5 minutes du voyage, après 7 minutes, après 12 minutes et après 22 minutes.

c) Construis une figure permettant d'apprécier les hauteurs de la cabine P durant les trois tours du voyage.

d) A partir de 35 m de hauteur on voit la rivière Saigon. Combien de temps Minh peut-il la voir pendant tout un voyage ?