LA MODÉLISATION DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN SUISSE ROMANDE

Pierre-François BURGERMEISTER
Jean-Luc DORIER
Université de Genève

Résumé. Dans ce texte[1], nous montrons comment la modélisation est apparue dans le nouveau plan d'études romand pour la scolarité obligatoire comme un thème fédérateur et transversal en mathématiques et en sciences. Nous présentons ensuite une formation continue que nous avons mise en place sur ce sujet pour tous les enseignants de mathématiques du Cycle d'Orientation de Genève (3 premières années de l'enseignement secondaire, âge 12-16 ans), en lien avec notre participation au projet européen PRIMAS[2]. Sur la base d'une définition très ouverte de la modélisation, nous introduisons ensuite une typologie en trois niveaux des activités mettant en jeu de la modélisation. Enfin, nous analysons quelques activités des nouveaux manuels scolaires de Suisse romande (pour le 9ième degré, âge 12 ans) en nous appuyant sur cette typologie pour en dégager les enjeux en termes de modélisation et quelques considérations sur leur traitement possible en classe.

Mots-clés. modélisation, schématisation, démarche d'investigation, formation continue, contrat didactique, milieu didactique.

Abstract. In this paper we show how modelling appears as a federating transversal theme for mathematics and sciences in the new curriculum for all compulsory education in French speaking Switzerland. We then present a training course for in-service teachers we have set up on this theme for all mathematics teachers in Geneva, in relation with the European project PRIMAS[1] Based on broad definition of modelling, we introduce a typology in three levels of modelling activities. Finally we show how this was used in this training course in order to classify and analyse a few activities in relation with modelling in the new mathematics textbook for grade 7.

Keywords. modelling, inquiry based teaching, in-service teachers' training, mathematics and sciences teaching.

1. Introduction

Notre article concerne l'enseignement des mathématiques en Suisse romande, mais les questions qu'il soulève nous semblent pouvoir intéresser un public français et plus généralement international.

Le nouveau *Plan d'Etudes Romand* (PER) est entré en vigueur à la rentrée 2011 pour le 9$^{\text{ème}}$ degré du *cycle d'orientation* genevois[3], il s'est généralisé au 10$^{\text{ème}}$ degré cette année et le sera pour le 11$^{\text{ème}}$ degré à la rentré 2013/14. Il divise les disciplines scolaires en cinq domaines, dont *Mathématiques et Sciences de la Nature* (MSN) qui regroupe dorénavant les mathématiques et les sciences de la nature et l'environnement comprenant la physique, la

1 Ce texte est une version française retravaillée d'un texte présenté à CME12 à Seoul en juillet2012 (Dorier & Burgermeister 2012).

2 Le projet PRIMAS a reçu un financement du 7e programme cadre de l'Union Européenne (FP7/2007-2013) sous le grant agreement n° 244380. Ce texte ne reflète que les opinions des auteurs et l'Union Européenne ne peut être tenu responsable de tout usage fait de l'information que ce texte contient.

3 Le PER s'applique à l'ensemble de la Suisse romande, mais chaque canton garde une certaine indépendance dans la politique éducative, en particulier dans l'organisation des différents degrés scolaires. Ainsi à Genève l'enseignement primaire comprend maintenant huit années (de 4-5 ans à 12-13 ans), le Cycle d'Orientation (équivalent du collège français) en comprend trois (de 12-13 à 15-16 ans) et le post obligatoire en général quatre. Les 9ème, 10ème et 11ème degrés correspondent aux classes respectivement de 5e, 4e et 3e françaises.

chimie et la biologie. Néanmoins, la séparation entre Mathématique et Sciences de la Nature reste effective pour sept des huit axes thématiques du domaine MSN : quatre axes (MSN 31 à 34) sont spécifiques aux Mathématiques et trois (MSN 36 à 38) aux Sciences de la nature. Quant à la modélisation (MSN 35 : "Modéliser des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques"), elle est considérée comme une thématique commune aux deux sous-domaines. Cet aspect fédérateur de la modélisation est particulièrement sensible dans le paragraphe de présentation du domaine :

> Le domaine des Mathématiques et Sciences de la nature associe des disciplines qui visent à acquérir des méthodes de pensées et d'action tout autant qu'un ensemble de notions et d'outils permettant de modéliser des situations et de résoudre divers problèmes ; si leur approche diffère (sic), les *Mathématiques* et les *Sciences de la nature* abordent néanmoins des procédures et des notions propres à certains aspects de la réalité et leurs démarches se complètent et s'enrichissent réciproquement. (PER, cycle3, Présentation générale, p.27)

L'idée de modélisation est également prééminente dans les commentaires généraux du domaine MSN :

> Il [le domaine] fournit à l'élève des instruments intellectuels d'appréhension et de compréhension du réel et d'adaptation à ce dernier.
>
> [...] Le propos des *Mathématiques* est d'offrir des manières de penser dotées de méthodes et d'un langage spécifiques pour appréhender l'espace, modéliser des situations et traiter du vrai et du faux. Ces manières de penser se réalisent dans la pose et la résolution de problèmes propres aux *Mathématiques* ou tirés d'autres disciplines.
>
> […] Le propos des sciences est d'établir un principe de rationalité dans la confrontation des idées et des théories avec des faits observables dans le monde environnant. (PER, cycle3, MSN, p.7)

La modélisation recouvre l'ensemble du domaine MSN. En effet les actes qui participent de la modélisation sont, selon le PER, nombreux et variés :

> MSN35 – Modéliser des phénomènes naturels, techniques, sociaux ou des situations mathématiques …
> A) … en mobilisant des représentations graphiques (codes, schémas, tableaux, graphiques, ...)
> B) … en associant aux grandeurs observables des paramètres
> C) … en triant, organisant et interprétant des données
> D) … en communicant ses résultats et en présentant des modélisations
> E) … en traitant des situations aléatoires à l'aide de notions de probabilités
> F) … en *dégageant une problématique* et /ou en formulant des hypothèses
> G) … en recourant à des modèles existants
> H) … en mobilisant, selon la situation, la mesure et/ou des outils mathématiques (fonctions, statistiques, algèbre,...). (PER, cycle3, MSN, rabat de couverture)

Chacun de ces actes se retrouvent dans tous les axes thématiques du domaine.

D'autre part, ce thème est supposé contribuer à la construction de capacités transversales en développant la collaboration, la communication, les stratégies d'apprentissage, la pensée créatrice et la démarche réflexive.

Dans le lexique du domaine MSN, la modélisation

> (...) recouvre l'idée d'associer à une situation complexe un modèle qui la rend intelligible en la réduisant à ses éléments essentiels. (PER, cycle3, MSN, p.58)

Parallèlement à la mise en place du PER, les moyens d'enseignement des mathématiques au cycle d'orientation se voient profondément remaniés. Les nouveaux *Moyens 9-10-11* comprennent pour chaque degré un livre et un fichier. Chacun se découpe en cinq sections qui offrent autant de collections d'activités. Les quatre premières sections correspondent aux quatre axes strictement mathématiques du domaine MSN, alors que la cinquième, appelée *Recherche et stratégies*, aborde à travers des thèmes transversaux la pratique du raisonnement mathématique. Elle est constituée de 24 activités d'investigation, dont 21 intègrent un contenu mathématique se rattachant à l'une au moins des quatre premières sections. Par ailleurs, l'axe commun MSN 35 sur la modélisation, peut être travaillé à travers de nombreuses activités des cinq sections qui ne sont pas pointées en tant que telles.

Comme dans la version précédente des moyens romands (MERM), un *Aide-mémoire* expose une synthèse des résultats théoriques devant être présentés durant les trois années du cycle 3, regroupés selon les mêmes sections. A la fin de la section *Recherche et stratégies* se trouve une définition de la modélisation :

> Créer une représentation simplifiée d'un problème (schéma, croquis, tableau, graphique, simulation, etc.) dans le but de le comprendre et d'élaborer une solution. (Aide-mémoire, p.142)

Cette définition est assortie d'un exemple de problème de dénombrement : « trouver le nombre de poignées de mains échangée dans un groupe de n personnes si chacune a serré, une seule fois, la main de toutes les autres ». Les auteurs dénombrent explicitement les poignées de mains dans les cas où n vaut 2, 3, 4 et 5 ; ils utilisent ensuite un tableau à double entrée pour organiser le dénombrement, d'abord dans le cas $n = 6$, puis pour le cas général. Le tableau est présenté comme une modélisation de la situation.

Dans cette nouvelle collection comme dans le Plan d'études, on voit que le terme de modélisation est pris dans un sens assez large : la démarche de modélisation est supposée emblématique du raisonnement scientifique, et commune aux mathématiques et aux sciences de la nature. Elle ne s'applique pas uniquement aux situations « concrètes » en cherchant à en réduire la complexité, mais peut également être intra-mathématique.

Dans ce sens, cette conception de la modélisation est proche de celle de plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques, et en particulier de celle de la *Théorie Anthropologique du Didactique* pour laquelle :

> Afin de penser d'un même mouvement ces deux types d'emplois et d'études (habituellement séparés, comme en témoignent les oppositions traditionnelles entre mathématiques et applications des mathématiques, entre problèmes « abstraits » et problèmes « concrets », etc.), nous référerons dans ce qui suit à un schéma général de modélisation, dans le dessein d'appréhender sous des catégories communes les emplois intra-mathématiques et extra-mathématiques auxquels nous nous intéresserons. (Chevallard, 1989, p. 53)

D'ailleurs dans la lignée de Chevallard, plusieurs auteurs affirment que :

> (...) la plupart de l'activité mathématique peut être identifiée (…) à une activité de modélisation mathématique.[4] (Chevallard, Bosch and Gascón, 1997, p.51).

A l'opposé, les modèles utilisés par les sciences de la nature ne sont pas uniquement mathématiques ; la modélisation possède également un versant non mathématique. Dans la suite de cet article nous ne nous intéresserons qu'à la question de l'enseignement des mathématiques.

On a vu que le Plan d'études et les manuels romands conçoivent la modélisation comme une façon de traduire une situation dans un autre système de représentation en insistant sur la simplification que cette traduction offre. Or, cet aspect de réduction de la complexité ne nous semble pas être central dès lors que l'on adopte une conception large de la modélisation.

Finalement, l'activité de modélisation peut faire intervenir plusieurs modèles concurrents entre lesquels il faut essayer de déterminer le plus approprié pour la résolution du problème initial.

4 Notre traduction.

Nous verrons dans la deuxième partie de ce texte comment nous intégrons tous ces aspects du concept de modélisation dans notre formation continue. Pour le moment, nous poursuivons notre présentation du contexte de notre travail en exposant brièvement son insertion dans le projet Européen PRIMAS.

1.2. Une formation continue dans le cadre du projet Européen PRIMAS

La mise en place du PER et l'arrivée des nouveaux *moyens 9-10-11* ont conduit l'autorité scolaire genevoise à mettre sur pied une formation continue (recyclage) d'une journée pour tous les enseignants de mathématiques du cycle d'orientation, soit environ 350 enseignants. En tant que partie prenante du projet Européen PRIMAS (*Promoting inquiry in mathematics and science across Europe*), notre équipe formée de 15 enseignants, formateurs et chercheurs en mathématiques, physique et biologie a été mandatée pour concevoir et organiser cette formation. Nous avons choisi de consacrer la première demi-journée à la nouvelle section des *Moyens 9-10-11*, *Recherche et stratégies*, et la seconde à la modélisation.

Les situations d'investigation ne constituent pas une nouveauté pour les enseignants de mathématiques du cycle d'orientation genevois. Sous des appellations différentes (résolution de problèmes, problèmes ouverts, activités de recherche, etc.), les plus anciens ont déjà été sensibilisés à la notion de situation d'investigation depuis plusieurs décennies – et, souvent, les ont largement pratiquées dans leurs classes. Ils ont parfois le sentiment de tout connaître des démarches d'investigation et des activités de modélisation. Cependant, beaucoup sont réticents à les mettre en œuvre dans leurs classes en raison de l'aspect facilement chronophage de ces activités et de la pression toujours plus forte à laquelle ils sont soumis pour pouvoir boucler leurs programmes, en termes de contenus, avant les évaluations communes de fin d'année. Ils se concentrent ainsi sur l'apprentissage des savoir-faire techniques ou algorithmiques, les points du programme qui font justement l'objet des évaluations communes. Il est à noter par ailleurs que les activités d'investigation peuvent déstabiliser aussi les élèves comme le remarquent Blum et Niss (1991, p. 54) :

> Les activités de résolution de problèmes, de modélisation et d'applications aux autres disciplines rendent les leçons de mathématiques indéniablement plus coûteuses et moins prédictibles pour les apprenants que les leçons traditionnelles. Les tâches routinières de mathématiques, comme les calculs, sont plus populaires parmi la majorité des élèves parce qu'elles sont plus faciles à appréhender et peuvent souvent êtres résolues en suivant seulement quelques recettes, qui permettent aux élèves d'obtenir de bons résultats aux examens.[5]

Une formation d'une journée est trop courte pour permettre des évolutions importantes. De plus, les expériences ont montré qu'une formation continue qui se veut efficace doit être pragmatique, proche des préoccupations des enseignants et de leur potentiel d'évolution, sans se montrer trop radicalement ambitieuse (Robert, Penninckx, Lattuati 2012). Dans notre cas, nous avons essayé de construire une formation qui montre que des activités d'investigation et de modélisation peuvent être mise en place sans être trop chronophages, tout en préservant une part essentielle de travail autonome des élèves et sans nécessiter d'autres ressources que celles des manuels officiels.

Conscients de ce que la gestion du temps est entièrement dans les mains de l'enseignant, nous nous sommes concentrés sur le rôle de l'enseignant pendant l'activité en classe et sur la mise en place d'outils d'analyse pour guider ses choix en situation. Deux questions essentielles nous ont guidés : A quel moment est-il approprié d'aider les élèves à organiser leur recherche

5 Notre traduction : « Problem solving, modelling and applications to other disciplines make the mathematics lessons unquestionably more demanding and less predictable for learners than traditional mathematics lessons. Mathematical routine tasks such as calculations are more popular with many students because they are much easier to grasp and can often be solved merely by following certain recipes, which makes it easier for students to obtain good marks in tests and examinations. »

et quel type d'aide leur apporter ? Quand est-il au contraire essentiel, pour ne pas étouffer le potentiel d'investigation et/ou de modélisation, de laisser les élèves trouver leur propre cheminement vers une solution ?

Nous nous sommes donc efforcés de rester réalistes, la formation étant destinée à tous les enseignants de mathématiques genevois, sous mandat de l'institution éducative cantonale. Notre but principal n'était pas d'adapter les pratiques enseignantes au nouveau plan d'études, mais plus modestement d'ouvrir une porte vers une pratique plus « souple » de la modélisation et de l'investigation dans les classes de mathématiques et une meilleure connaissance des enjeux d'apprentissage liés à ces pratiques.

2. Une typologie des activités de modélisation

Notre première tâche était d'adopter une définition de la modélisation à la fois assez large pour respecter le PER et assez précise pour pouvoir être opérationnelle dans l'analyse des différentes activités liées à la modélisation. Comme nous l'avons mentionné plus haut, la modélisation étant vue comme un thème transversal, les manuels ne spécifient pas lesquelles des activités proposées relèvent de ce thème. Il revient aux enseignants de les repérer eux-mêmes et de choisir comment en tirer parti pour travailler la modélisation.

2.1. Une définition de la modélisation

On trouve dans la littérature différentes définitions de la modélisation. Voici par exemple celle qui apparaît dans l'introduction de la 14ème étude ICMI, *Modelling and applications in mathematics education* :

> Un modèle mathématique comprend le domaine extra-mathématique D en jeu, un domaine mathématique M et une correspondance du domaine extra-mathématique sur le domaine mathématique. Les objets, relations, phénomènes hypothèses, questions, etc. dans D sont identifiés et sélectionnés comme pertinents pour le but suivi et la situation et sont ensuite traduits en objets, relations, phénomènes, hypothèses, questions, etc. appartenant à M. A l'intérieur de M, des considérations, manipulations et inférences sont effectuées, dont les résultats sont à leur tour traduits et interprétés dans D comme conclusions concernant ce domaine. Ce cycle de modélisation peut être itéré plusieurs fois, en fonction de la validation et de l'évaluation du modèle par rapport au domaine, jusqu'à ce que les conclusions concernant D soient satisfaisantes, par rapport au but de construction du modèle. Le terme de modélisation se réfère à l'ensemble du processus et à tout ce qu'il implique.[6] (Niss, Blum & Galbraith, 2007, p. 4)

Dans un travail didactique sur l'étude de la mise en équations de problèmes concrets en fin de Collège, début de Lycée, Coulange (1997) a utilisé le schéma suivant pour décrire le processus de modélisation. Dans son travail, Coulange montre bien qu'un tel schéma de la modélisation a beaucoup de mal à vivre dans l'enseignement où le niveau des problèmes concrets est généralement absent, avec seulement des problèmes pseudo-concrets et pas de dialectique dans le processus de modélisation souvent transparent.

6 Notre traduction : « A mathematical model consists of the extramathematical domain, D, of interest, some mathematical domain M, and a mapping from the extra-mathematical to the mathematical domain. Objects, relations, phenomena, assumptions, questions, etc. in D are identified and selected as relevant for the purpose and situation and are then mapped - translated- into objects, relations, phenomena, assumptions, questions, etc. pertaining to M. Within M, mathematical deliberations, manipulations and inferences are made, the outcomes of which are then translated back to D and interpreted as conclusions concerning that domain. This so-called modelling cycle may be iterated several times, on the basis of validation and evaluation of the model in relation to the domain, until the resulting conclusions concerning D are satisfactory in relation to the purpose of the model construction. The term modelling refers to the entire process, and everything involved in it »

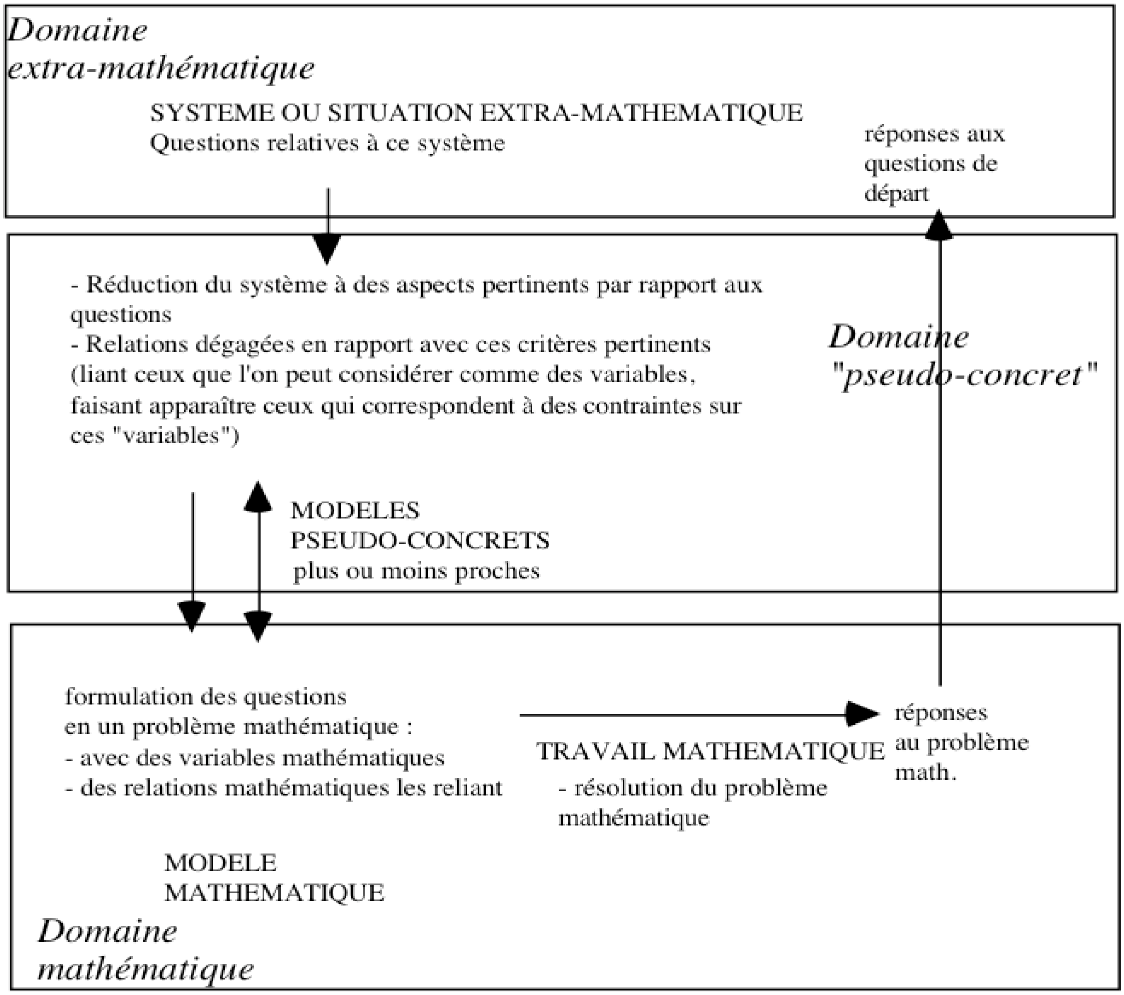


Figure1. *Schéma de la démarche de modélisation mathématique d'après Coulange (1997, p.36)*

La notion de schématisation, liée à celle de modélisation, a également intéressé certains auteurs. C'est le cas de Gonseth, dans son approche philosophique des liens entre mathématiques et réalité (voir Gonseth, 1936). Pour lui, les mathématiques se sont développées à partir d'un processus de schématisation de la réalité, véritable acte de création mentale. Il prend en particulier l'exemple de la droite que l'on abstrait de la perception du faîte d'un toit, de l'arête d'une règle, d'un rayon lumineux ou d'une ligne de visée. La droite apparaît alors comme une image schématique de la réalité :

> Dans un schéma, la réalité ne se trouve pas représentée dans tous ses détails, seuls certains traits sont conservés, et certains rapports évoqués. Un schéma n'est en aucune façon une représentation fidèle en un sens absolu : il n'est compréhensible que si on en possède la clé explicative. Ce qu'on exprimera en disant que l'adéquation du schéma à son objet est symbolique. (Gonseth, 1932, p. 234)

Ainsi, l'acte de schématisation est-il fondamental dans le processus plus complexe de modélisation. Le travail de Gonseth nous rend également sensibles à la fonction cognitive de la schématisation en mathématiques. Nous retrouverons certains éléments de son travail dans un usage didactique de la modélisation pour aider à la conceptualisation mathématique.

Dans notre cas, comme nous l'avons mentionné plus haut, il est indispensable de pouvoir envisager le cas de la modélisation intra-mathématique. Dans ce sens, nous nous rapprochons davantage de l'approche de Chevallard (1989, p. 53) qui introduit : « un schéma simplifié, qui suppose essentiellement deux registres d'entités : un système, mathématique ou non mathématique, et un modèle (mathématique) de ce système. »

Nous ne nous limiterons en effet pas au cas de la modélisation extra-mathématique, où l'un des domaines est non mathématique (on dira souvent réel ou concret) et l'autre mathématique. En effet, notre définition se doit d'inclure des situations où les deux domaines sont mathématiques (modélisation intra-mathématique), ainsi que d'autres où les deux domaines sont non mathématiques (modélisation non mathématique), comme c'est souvent le cas en sciences au niveau du cycle d'orientation[7]. De plus, pour ne pas être trop restrictifs, nous n'avons pas retenu dans notre définition la dimension de réduction de la complexité, d'un système « réel » complexe à un modèle mathématique épuré, souvent considérée comme une des principales visées de la modélisation (c'est particulièrement le cas de la modélisation en sciences).
Nous avons ainsi choisi une définition assez large pour inclure toute la variété des situations de modélisation que l'on peut rencontrer dans les curriculums de mathématiques et de sciences de l'enseignement secondaire genevois :

> *Définition. Modéliser signifie construire, discuter et étudier une correspondance entre deux (au moins) systèmes incluant des objets, des relations entre ces objets et des questions.*

Comme Chevallard, nous préférons le terme de *système* à celui de *domaine*, employé par Niss, Blum et Grabaith, pour deux raisons. D'une part, nous voulons éviter de faire référence au domaine de la réalité et au domaine des mathématiques ; le terme de système nous paraît plus neutre à cet égard. D'autre part, là où ces auteurs parlent de phénomènes et de propositions, nous avons préféré le vocabulaire plus neutre d'objets, de relations et de questions.

Nous allons à présent voir comment cette définition souple permet de faire fonctionner l'idée de modélisation de façon plus ou moins riche. Ceci nous conduira à distinguer trois niveaux possibles dans le travail de modélisation.

2.2. Une typologie en trois niveaux

La manière la plus ambitieuse d'engager les élèves dans une activité de modélisation est de leur poser une question problématique dans le cadre d'un système initial et de leur demander de construire un autre système (le modèle) dans lequel la question pourra être résolue. Dans ce cas, les élèves ont la responsabilité de déterminer les objets et relations pertinents du premier système, de choisir le second système et de construire la correspondance, de résoudre le problème transposé dans ce second système et finalement d'interpréter la solution obtenue dans le système initial. Tout ce processus est décrit et analysé dans maints travaux portant sur la modélisation mathématique dans l'enseignement, dont l'étude ICMI citée plus haut offre un large panorama.

Mais on peut concevoir d'autres situations didactiques liées à la modélisation, qui, si elles n'abordent pas tous les aspects évoqués plus haut, permettent cependant un travail important. Ainsi, l'énoncé d'une activité peut fournir d'emblée les deux systèmes en jeu dans la modélisation et confier aux élèves la tâche d'interpréter une partie d'un des systèmes en termes des objets et relations de l'autre, ou celle de discuter la pertinence de la correspondance entre les deux systèmes relativement à la question posée. On peut aussi proposer aux élèves un système initial ainsi que plusieurs autres systèmes comme modèles possibles et leur demander de donner des arguments sur l'adéquation des différents systèmes

7 Penser par exemple au schéma de la respiration ou à la modélisation moléculaire de la matière. Toutefois, nous n'aborderons pas la question de la modélisation en sciences dans cet article.

pour répondre aux questions que l'on se pose dans le modèle initial. Ces activités, même si elles sont parfois moins complexes, n'en sont pas moins susceptibles d'engager les élèves dans une riche réflexion sur les qualités et les limites de modélisations particulières.

Par ailleurs, on rencontre fréquemment dans les manuels des activités dans lesquelles les deux systèmes sont donnés d'emblée alors que, de fait, la tâche reste essentiellement cantonnée dans l'un des deux (le modèle), sans que la pertinence ou la qualité de la correspondance ne soient interrogées. Ce type d'activité ne présente souvent qu'un intérêt très restreint du point de vue de la modélisation, dans la mesure où le système initial (celui du « monde concret » ou de la « vie courante ») est seulement évoqué dans l'énoncé du problème et la correspondance avec l'autre système (le modèle mathématique) est évidente. C'est un artifice didactique qui ne présente qu'une apparence de modélisation, dans le but de motiver les élèves à la tâche mathématique qu'ils ont à travailler. On pourrait dire que l'on se situe dans la schématisation au sens de Gonseth, plutôt que dans la modélisation. Nous verrons plus loin des exemples de cet ordre.

L'analyse que nous venons de résumer et que nous avons appliquée à une lecture des activités des moyens d'enseignement, nous a ainsi conduit à proposer la typologie suivante, en trois niveaux, des activités de modélisation :

- Niveau 1 : les deux systèmes sont donnés mais la tâche des élèves est cantonnée dans l'un des deux.
- Niveau 2 : les deux systèmes sont donnés et la tâche des élèves implique les deux.
- Niveau 3 : un seul système est donné et la construction du second est à la charge des élèves.

Cette typologie est assez sommaire et ne rend pas compte de plusieurs aspects importants, quant aux difficultés inhérentes aux systèmes en jeu d'une part, à leur mise en correspondance d'autre part, ou, dans le cas d'une modélisation mathématique, à la difficulté de la résolution mathématique dans le deuxième système, et son interprétation dans le système initial. Cette typologie nécessite d'identifier les deux (ou plus) systèmes en jeu et, de fait, oblige à réfléchir aux enjeux didactiques que la mise en scène de l'activité va permettre dans la question de leur correspondance. De fait, même si elle paraît grossière, cette typologie n'est pas toujours aussi simple à appliquer qu'il y parait : elle conduit souvent à la levée d'implicites et à se questionner sur le potentiel de modélisation de l'activité considérée.

Ainsi, cette typologie n'est pas, à notre sens, un outil de catégorisation absolu, mais plutôt une grille de lecture qui permet de problématiser l'analyse didactique des enjeux possibles de modélisation que renferme une activité. C'est pourquoi nous la proposons aux participants de notre formation, et après l'avoir illustrée par quelques exemples, nous leur demandons de l'expérimenter sur une sélection d'activités issues des manuels (livre et fichier) de 9ièmes[8].

Après cette phase d'appropriation, notre formation se poursuit par une analyse plus fine de trois de ces activités en nous focalisant plus particulièrement sur le travail du professeur durant l'activité et sur les leviers dont il dispose pour réaliser au mieux le potentiel d'investigation des élèves dans la démarche de modélisation. Dans ce qui suit, nous allons présenter succinctement l'application de notre typologie à quelques activités en donnant des éléments de réflexion, plus ou moins importants selon les cas, sur la gestion possible en classe.

8 Au moment où nous avons mis en place cette formation, seuls les manuels de 9ième étaient disponibles, mais cette typologie peut bien sûr être appliquée à tous les exercices de mathématiques mettant en jeu de la modélisation. Dans notre sélection, nous avons essayé de trouver des exemples représentatifs des trois niveaux en variant également les thèmes.

3.Quelques exemples issus du livre et du fichier du 9ième degré

3.1. Exemples de niveau 1

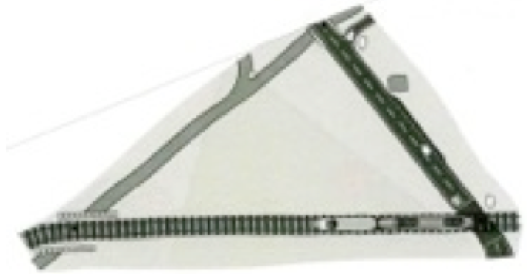
Trouve la position d'un observatoire situé à égale distance de la route, de la voie ferrée et de la rivière.	

Figure 2. *ES28[9] – Observatoire. (Fichier 9ème, p. 118)*

Ici il s'agit de mettre en œuvre la notion de bissectrice d'un angle et celle de point de concours des trois bissectrices d'un triangle, qui est le centre du cercle inscrit. La modélisation porte sur le fait que la topographie du lieu (route, voie ferrée, rivière) est modélisée par un triangle idéalisé. Les deux systèmes en jeu sont le lieu « réel » et la géométrie, les objets sont d'une part des portions d'une route, d'une voie ferrée, d'une rivière et d'autre part des segments de droites qui les représentent. Le système de la géométrie n'est pas donné en tant que tel à l'élève ; néanmoins, cette activité étant généralement utilisée dans le cadre du cours de géométrie, le choix du système permettant de résoudre la tâche est assez transparent. Dans ce sens, on peut noter qu'ici les intersections sont marqués sur le dessin par des points (plus apparents dans le livre de l'élève que sur cette reproduction) ce qui rend la modélisation encore plus transparente et nous conduit à classer cette activité dans le niveau 1 de notre typologie.

On pourrait dire que cette activité met davantage en jeu une schématisation au sens de Gonseth, qu'une réelle modélisation. Il se peut néanmoins que, pour certains élèves, la modélisation d'une route, d'une voie ferrée ou d'une rivière soit problématique, mais ceci relève davantage d'une problématique de l'enseignement primaire que du cycle d'orientation. De plus, même si cette modélisation pose des difficultés à certains élèves, il n'y a guère d'autre solution pour les aider que de la leur imposer. Le mieux que l'on puisse faire c'est de soulever la question de la validité de cette modélisation qui dépendra de la conformité du terrain, et qui est sûrement plus adaptée pour une voie ferrée ou pour une route que pour une rivière (sauf si cette dernière est canalisée ce qui ne semble pas être le cas sur l'illustration). Ce peut donc être une occasion pour expliciter le caractère réducteur d'une modélisation, en laissant éventuellement une part aux débats avec les élèves. Il n'en reste pas moins qu'une fois cette étape franchie, avec plus ou moins de difficulté et de problématisation, l'essentiel de la tâche reste à réaliser et relève du seul système géométrique. En outre, la réponse, comme point de concours des trois bissectrices (voire comme centre du cercle inscrit) ne permet pas un retour productif sur la question posée dans le contexte « réel ». On pourrait imaginer que le problème mette en jeu la possibilité concrète de trouver ce point sur le terrain. Néanmoins, on se heurterait ici au fait que les outils de tracé sur le terrain (macro-espace) sont assez nettement différents de ceux utilisés en géométrie (micro-espace). Dans ce sens, une activité

9 Le codage en haut à gauche est composé comme suit : les deux lettres réfères aux 5 axes thématiques (NO nombres et opération, FA fonctions et algèbre, ES espace, GM grandeurs et mesures, RS recherche et stratégie), le nombre situe l'activité dans le thème en prenant en compte le livre et le fichier (ES28 est dans le fichier, comme ES 23 à ES27, mais ES21 et ES29 sont dans le livre).

dans la cour de récréation avec une corde et une craie serait didactiquement plus profitable, mais aussi plus lourde à gérer. On retrouve ici une des difficultés de l'enseignement de la géométrie et de la problématique du lien entre les connaissances spatiales et géométriques (Berthelot et Salin, 1992, 1993, 1999 ; Brousseau, 2000). Ainsi ces auteurs posent-ils la question fondamentale :

> La géométrie a à voir avec l'espace mais peut-on assimiler les connaissances spatiales, nécessaires à la maîtrise des problèmes qui se posent à tout individu dans ses rapports avec l'espace, et celles qui relèvent du savoir mathématique appelé géométrie ? (Berthelot & Salin, 1992, p. 40)

Ils pointent ainsi deux différences essentielles qui portent sur la genèse de chacun des types de connaissances et sur la nature des problèmes respectifs qui les mettent en jeu. Une part importante de ce travail a consisté à mettre au point des activités d'enseignement de la géométrie au primaire qui problématisent la question des rapports entre connaissance spatiales et géométriques.

> *Comme chaque mois de septembre Aloys sème du rampon[10] dans son jardin potager, après avoir délimité un rectangle à l'aide d'une ficelle.*
>
> *Aujourd'hui, André, son vieux copain de toujours, prétend qu'il a pu, à l'aide de la même ficelle obtenir une surface rectangulaire plus grande. A-t-il raison ?*

Figure 3. *GM37 – Plus grand, mais plus petit (Livre 9ème, p. 145)*

On se trouve ici aussi face à un cas de modélisation géométrique quasi transparent. L'emploi du mot « rectangle », plutôt que « parcelle rectangulaire » par exemple est dans ce sens très révélateur et nous conduit à classer cette activité dans le niveau 1 pour des raisons très semblables à celles de l'activité précédente. Par contre, le fait d'identifier la longueur de la ficelle au périmètre du rectangle offre un enjeu de modélisation un peu plus fort. En contrepartie, la réduction apportée par la modélisation (de la ficelle au segment de droite) est plus faible que dans le problème précédent. Enfin, le prix de la ficelle ne justifie guère l'enjeu contrairement à certains problèmes classiques d'optimisation comme celui consistant à chercher les dimensions d'une boîte de conserve de volume donné en utilisant le moins de métal. C'est bien sûr le carré qui réalise, à périmètre donné, le cas du rectangle de plus grande aire. Ici on semble sous-entendre que la parcelle rectangulaire n'est pas carrée (usage commun du terme rectangle qui exclut le carré). La façon un peu moins conventionnelle d'aborder ce problème classique, peut amener à discuter du fait de savoir si un carré est un rectangle. Le fait que le tour de la parcelle soit fait par une ficelle peut éventuellement permettre une expérimentation de la part des élèves, sauf qu'il est difficile d'évaluer expérimentalement l'aire d'un rectangle.

> *Pour aller chez sa copine, Christine a fait le tiers du trajet en train, puis les deux cinquièmes en bus et le reste à pied. Quelle fraction du voyage représente le parcours à pied ?*

Figure 4. *NO231 – La copine de Christine (Livre 9ème, p. 60)*

Ici le système initial est constitué par le voyage de Christine. Le deuxième système est celui des fractions, ou des nombres rationnels. Cependant les fractions sont déjà comprises dans la description du problème, le deuxième système est donc, à nouveau, assez transparent, ce qui fait pencher pour une classification dans le niveau 1. L'enjeu de la traduction par le bon calcul

10 En Suisse romande, le rampon désigne la mâche, parfois aussi appelée doucette.

est certes non nul, mais est-il aussi fort que celui du calcul à effectuer ? Selon le niveau des élèves, la difficulté peut ici être importante. Il peut par exemple être compliqué de comprendre que le trajet total correspond à la valeur 1.

Outre le fait que poser le problème ainsi semble plus intéressant que de demander de calculer d'emblée 1 – 1/3 – 2/5, cette histoire peut conduire les élèves à une représentation par des segments de droites par exemple qui peuvent leur permettre de visualiser le calcul à effectuer. On retrouve ainsi une vertu didactique à ce type de modélisation, qui ici encore est proche de la notion de schématisation de Gonseth.

3.2. Exemples de niveau 2

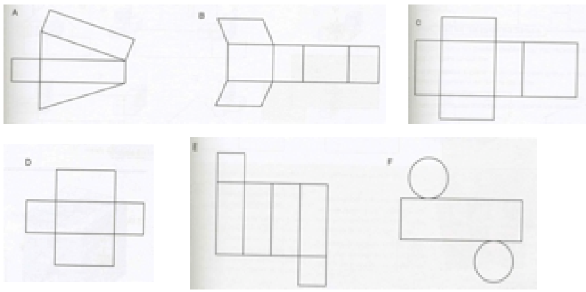
Parmi les développements ci-contre, lesquels sont ceux de prismes droits ? *De parallélépipèdes rectangles ?*	

Figure 5. *ES107 – De développement en développement (Livre 9ième, p. 121)*

Nous avons clairement à faire ici à une modélisation de type intra-mathématique. En effet les deux systèmes en jeu sont de nature mathématique : géométrie plane d'une part avec les développements et géométrie de l'espace avec les solides qu'ils permettent de construire. Les deux systèmes sont donnés et c'est bien la question de la correspondance entre les objets des deux systèmes qui est au cœur de la problématique. Plus précisément, dans cette activité, ce qui pose problème c'est la correspondance entre les propriétés de l'un (nature des différentes faces, positionnement dans le développement) et de l'autre (caractérisation des prismes droits et des parallélépipèdes rectangles). Sauf à faire une démonstration constructive en découpant les développements et en reconstituant les solides, l'enjeu est donc de valider sur des propriétés planes, des caractérisations des solides qui relèvent de la géométrie dans l'espace. Il y a ici, doublé d'un enjeu de visualisation, un enjeu de correspondance de propriétés qui relève nous semble-t-il d'un travail de modélisation entre deux systèmes (mathématiques) donnés, ce qui correspond bien à notre niveau 2.

L'institutionnalisation concluant une telle activité peut ainsi porter sur les propriétés caractéristiques des développements des prismes droits. Les conditions pour qu'une figure plane soit bien le développement d'un solide ne sont pas aisées à expliciter de façon exhaustive. Ici, le fait qu'on parle d'emblée de développements peut laisser supposer que ces conditions sont implicitement respectées. On peut aussi le valider de façon pragmatique en imaginant le pliage qui aboutit à la construction du solide. Une fois ce problème réglé, la caractérisation des prismes droits peut s'énoncer en disant que toutes les faces sauf deux sont rectangulaires (ce sont les faces latérales du prisme) et ont une dimension commune (la hauteur du prisme), les deux autres faces (les bases du prisme) sont identiques et sont des polygones dont les longueurs des côtés correspondent respectivement à l'autre dimension de chacune des faces latérales.

L'activité suivante porte sur les opérations avec des nombres relatifs.

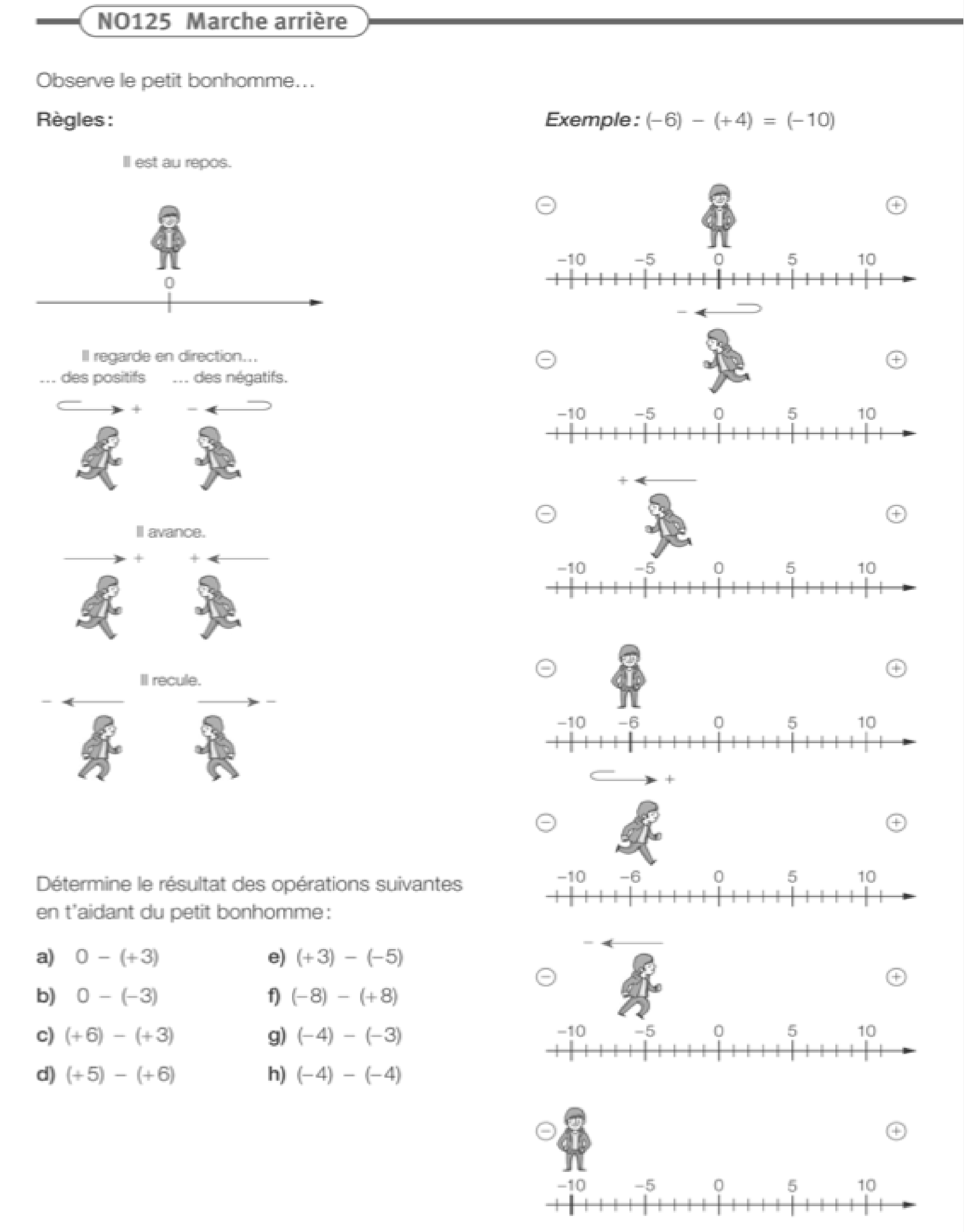


Figure 6. *NO125 – Marche arrière (Livre 9ème, p. 40)*[11]

Ici la modélisation est extra-mathématique puisqu'elle porte sur la correspondance entre le système des nombres relatifs et de leur addition d'une part et un système de déplacements rectilignes et de retournements d'un bonhomme d'autre part. Certes le deuxième système est très restrictif par rapport à la réalité et peut être qualifié de pseudo-réaliste voire de surfait, néanmoins il fait clairement référence à un certain vécu des élèves qui peuvent même le mimer dans la classe. Ici tout est donné, y compris la correspondance à travers les règles et l'exemple que nous n'avons pas reproduit ici.

11 Il faut noter que les signes + et – des opérations et les flèches des déplacements sont en rouge alors que les signes + et – des nombres et les flèches d'orientation du bonhomme sont en bleu. Dans l'activité 119 intitulée Marche avant, le principe a été introduit avec seulement des additions.

Par ailleurs, contrairement à ce qui est habituellement le cas, le système de départ n'est pas le système « réel » mais bien le système mathématique. La modélisation n'est donc pas là pour résoudre un problème de la vie courante, mais bien comme enjeu didactique pour l'apprentissage des règles opératoires sur les entiers relatifs, par l'examen et l'emploi de la correspondance entre les deux systèmes. On est donc bien dans le niveau 2 de notre typologie.

Notre propos ici n'est pas de faire une analyse poussée de l'efficacité de ce dispositif didactique, qui d'ailleurs partage les enseignants du cycle d'orientation genevois presque exclusivement en deux catégories bien distinctes de fervents utilisateurs et de détracteurs virulents. Il est vrai qu'il peut paraître, en première analyse, assez lourd d'utilisation et source de complications inutiles. De fait, si les élèves arrivent à comprendre les règles d'addition et de soustraction des nombres relatifs sans cet attirail, il ne semble pas nécessaire de l'utiliser. Néanmoins, on sait qu'une proportion non négligeable d'élèves butte de façon résistante sur ces règles. Dans ce cas, les activités autour des déplacements du petit bonhomme peuvent être une aide précieuse. Cela demande néanmoins un investissement important. Les élèves doivent pouvoir, au moins dans un premier temps, mimer les déplacements, les significations des couleurs bleu et rouge doivent être bien identifiées, etc.

Sans rentrer dans une analyse détaillée, nous pensons utile de donner ici quelques éléments qui montrent que ce type de modélisation a eu une importance historique dans la légitimation des nombres relatifs et des nombres complexes. En effet, entre la fin du 18e siècle et le début du 19e siècle, les nombres négatifs, bien qu'existant depuis longtemps n'avaient pas encore acquis leurs lettres de noblesse chez les mathématiciens. C'est dans la recherche d'une interprétation des « quantités imaginaires » – comme on désignait alors les nombres complexes – en vue de les légitimer, qu'Argand (1806) est amené à montrer l'intérêt de regarder l'ensemble des nombres négatifs comme le symétrique par rapport à 0 de l'ensemble des nombres positifs. Ceci le conduit à combiner l'idée de *grandeur absolue* (les pas du petit bonhomme) à celle de *direction* (là où regarde le petit bonhomme). Avant de poursuivre le raisonnement d'Argand qui le conduira à une interprétation de $\sqrt{-1}$ [12], notons que faire intervenir direction et retournement dans l'interprétation (la modélisation) des nombres négatifs permet de concevoir le 0 comme un point d'articulation (ce autour de quoi s'opère la symétrie, le retournement du positif au négatif ou l'inverse d'ailleurs, puisque un retournement est involutif) plutôt qu'un point repoussoir (ce au-dessous duquel on descend), comme c'est le cas dans les illustrations à l'aide de thermomètres ou d'ascenseurs. Cette idée est au cœur du processus qui conduit Argand à son interprétation (voir à ce sujet la très intéressante analyse de Châtelet, 1993). Ainsi il commence par remarquer que $\sqrt{-1}=\sqrt{(+1)(-1)}$, qu'il interprète alors comme la moyenne géométrique entre un pas vers la droite et un pas vers la gauche, c'est-à-dire un pas vers le haut ou vers le bas à la verticale. C'est le point clé de sa découverte de la représentation (aujourd'hui classique) des nombres complexes. Une des difficultés dans les opérations avec les nombres relatifs vient de ce que les signes **+** et **–** ont chacun deux statuts différents, celui d'opération et celui de position (sans parler du – qui marque l'opposé). Dans la modélisation avec le petit bonhomme, le signe opératoire (en rouge) détermine si le bonhomme avance (si on additionne) ou recule (si on soustrait) alors que le signe de position (en bleu) porte sur l'orientation du bonhomme vers la droite (pour le +) ou vers la gauche (pour le –)[13]. Notons que le signe – qui marque l'opposé peut être ici interprété comme un retournement du bonhomme, ce qui constitue un des avantages de cette modélisation qui est d'être compatible avec une interprétation des produits

12 Nous utilisons ici la notation de l'époque qui peut choquer un lecteur actuel. Le problème des quantités imaginaires consistait bien à trouver une signification à la racine d'un nombre négatif.

13 Une complication ici est qu'il faut orienter le bonhomme avant de le faire avancer ou reculer. Autrement dit il faut d'abord prendre en compte le signe du nombre avant le signe opératoire. De plus il faut interpréter le premier nombre (donc le premier déplacement) comme une addition (comme si on rajoutait « 0 + » au début de chaque calcul).

des nombres relatifs, en particulier de la fameuse règle des signes, contrairement à la plupart des autres modélisations (Hefendehl-Hebeker, 1991, Barrera-Curin, 2012).

L'activité suivante est un classique de l'interprétation d'une représentation graphique.

Lors d'une émission télévisée, un journaliste montre ce graphique et dit :

« Ce graphique montre qu'il y a eu une très forte augmentation du nombre de cambriolages entre 1998 et 1999. »

Considères-tu que l'affirmation du journaliste est une interprétation correcte de ce graphique ?

Justifie ta réponse.

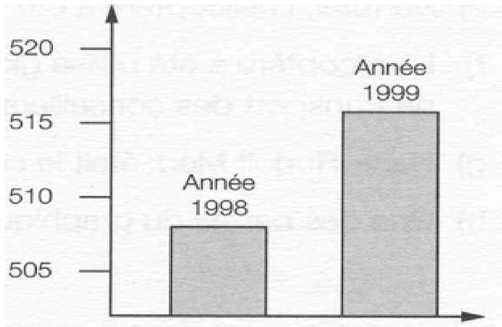


Figure 7. *FA 51 – Cambriolages (Livre 9ème, p. 81)*

Il s'agit d'une modélisation extra-mathématique dont le système mathématique est fourni. Le système initial porte sur le contexte « réel » d'un lieu (indéfini) et des cambriolages qui s'y déroulent. Pourtant ici l'enjeu de modélisation ne porte pas tant sur cette réalité, à laquelle on n'a pas vraiment accès (autrement que par les deux données numériques contenues dans le graphe) que sur un autre système qui porte lui sur le traitement médiatique de la représentation graphique. Autrement dit le système qui rentre en correspondance avec la représentation graphique est celui du langage naturel. En quelque sorte on se trouve dans un jeu de concurrence entre deux modèles interprétatifs d'une même réalité (dont on n'a qu'une vision très parcellaire) et la question de la validité de la correspondance se pose entre les deux modèles plutôt qu'entre modèle et réalité.

Plus précisément, il est clair qu'il y a eu une augmentation du nombre de cambriolages entre 1998 et 1999 (rien de ce que l'on sait ne nous permettra de juger de la « qualité » de ceux-ci, savoir si malgré la différence numérique les cambriolages de 1999 sont finalement plus « bénins » que ceux de 1998 peut être un enjeu sociétal et politique de premier ordre, mais c'est hors de portée dans le contexte qui nous est fourni). Ce qui est en jeu ici c'est la validité de l'usage du qualificatif « très forte » pour décrire l'augmentation que la représentation graphique laisse à voir. Finalement, c'est le décodage du graphique qui donne la réponse, puisqu'il donne à voir une augmentation relative de 1,4% qui ne peut être qualifiée de « très forte ». La perception du graphique est bien sûr biaisée par le fait d'avoir positionné l'axe des abscisses très haut sur celui des ordonnées, un choix qui peut être remis en question en termes de validité du modèle pour représenter la réalité.

On voit donc qu'autour des trois systèmes : graphique, réalité, langue naturelle (on pourrait rajouter celui des données numériques brutes) qui sont tous donnés, l'enjeu de l'activité porte sur un problème de validité d'un des systèmes pour rendre compte de la réalité. On est donc dans le cas du niveau 2 de notre catégorisation.

3.3. Exemples de niveau 3

Nous commencerons par une activité qui peut conduire à une exploitation plus ou moins poussée.

Ana mesurait 1,37 m à 11 ans et 1,45 m une année plus tard.
Quelle sera sa taille lorsqu'elle sera âgée de 16 ans ?

Figure 8a. *FA33 En grandissant (Livre 9ème, p. 74)*

Le système initial est celui de la réalité de la croissance de Ana. Pour pouvoir répondre il faut lui faire correspondre un système constitué d'une fonction donnant sa taille en fonction de son âge. Ce deuxième système étant à construire, on est dans le niveau 3. Ici, on s'attend à ce que les élèves imaginent majoritairement un modèle de croissance linéaire : accroissement de 8cm par an, ce qui conduirait à une taille de 1,77 cm à 16 ans, ce qui est une réponse réaliste. Par contre, si on pousse la prédiction de quelques années, on arrive vite à des valeurs impossibles. Cet exemple peut permettre une discussion intéressante sur la validité des modèles et constitue un bon exemple de remise en cause du modèle linéaire.

L'exemple suivant présente un cas assez classique de modélisation extra-mathématique.

Au marché de Noël, Alexandre achète une bougie mince ayant 24 cm de longueur, Carolina achète une bougie épaisse ayant 12 cm de longueur.

La veillée du 24 décembre à 20 h, Alexandre et Carolina allument leur bougie. Celle d'Alexandre se consume en 8 h et celle de Carolina en 12 h.

A quelle heure précise les deux bougies ont-elles eu la même longueur, et quelle était cette longueur ?

Figure 8b. *RS8 Bougies de Noël (livre 9ème, p. 170)*

Ici le système initial est constitué par le contexte concret des bougies et de leur consomption. L'enjeu de modélisation consiste à mettre en place un système mathématique qui modélise cette consomption, sous la forme de deux fonctions exprimant la hauteur de la chacune des bougies en fonction du temps. Le modèle affine, qui suppose une variation proportionnelle de la hauteur avec le temps est le plus simple et certainement celui qui est attendu à ce niveau. Ici l'élève a bien la charge de trouver le deuxième système, le modèle, ce qui caractérise le niveau 3 de notre catégorisation. Il n'est pas difficile de voir en comptant le temps t en heure à partir de 20h, que l'évolution de la hauteur de la bougie d'Alexandre peut se modéliser de façon affine par $h_1(t) = 3\ (8 - t)$ pour $t \leq 8$ et celle de Carolina par $h_2(t) = (12 - t)$ pour $t \leq 12$.

Il ne reste plus qu'à chercher pour quelle valeur de t les deux fonctions sont égales, pour trouver que les deux bougies auront la même hauteur à 2h du matin ($t = 6$). Remarquons qu'il est possible de résoudre ce problème à l'aide d'un système purement graphique (correspondant aux représentations graphiques des deux fonctions ci-dessus).

Plusieurs modèles pourraient éventuellement entrer en concurrence, mais au niveau du cycle d'orientation et en l'absence d'autres informations, on ne voit pas de raison de ne pas choisir un modèle affine. Il pourrait être intéressant de discuter avec les élèves d'une expérimentation avec une vraie bougie pour vérifier le bien fondé de cette hypothèse de modélisation. L'activité suivante particulièrement riche comprend des questions des trois niveaux.

Ici les deux systèmes en jeu sont d'une part la réalité socio-économique des deux pays en jeu et d'autre part le système mathématique des graphes en bâton, dans lequel on peut inclure tout ce qui permet le décodage et le traitement des données numériques (qui sont strictement du domaine des mathématiques). Ainsi la question a) demande d'abord une lecture graphique et un traitement numérique des données. Dans cette première phase, le traitement reste interne au système mathématique du graphe et des nombres (niveau 1). La fin de cette question a) demande par contre une interprétation des données chiffrées obtenues par rapport à la réalité socio-économique (niveau 2). Les questions b) et c) nécessitent une lecture directe du graphe et une interprétation de celle-ci qui reste du domaine du numérique, c'est un problème de valeur relative ou de pourcentage (niveau1), même si l'interprétation porte sur la réalité socio-économique (les élèves n'ont pas à aller chercher la population des pays sur Internet par exemple, elle est donnée dans l'énoncé de la question).

La question d) est d'un autre ordre. Il s'agit cette fois de faire jouer au modèle un rôle prédictif, qui est un des rôles essentiels de la modélisation en sciences. Plus précisément, la tâche consiste à construire, par extrapolation à partir de l'évolution des données fournies pour les années 1990 à 2008, une extension du système mathématique (graphico-numérique) allant jusqu'à l'année 2020.

Le diagramme en colonne ci-contre indique l'évolution du nombre d'utilisateurs d'Internet, en Suisse et en Inde, entre les années 1990 et 2008. (Unité : M = million)

a) Estime par combien le nombre d'utilisateurs d'Internet a été multiplié, en Suisse et en Inde, entre 2003 et 2008. Comment, d'après toi, peut-on expliquer cette différence ?

b) Sachant que la population de la Suisse est d'environ 7,7 millions d'habitants en 2008, dirais-tu que beaucoup ou peu d'habitants de notre pays ont accès à Internet ? Justifie ta réponse.

c) Sachant que la population de l'Inde est d'environ 1,15 milliard d'habitants en 2008, dirais-tu que beaucoup ou peu d'habitants de ce grand pays d'Asie ont accès à Internet ? Justifie ta réponse.

d) En t'aidant des deux diagrammes, imagine le nombre d'utilisateurs d'Internet qu'il y aura en Suisse et en Inde en 2020, en justifiant ta réponse.

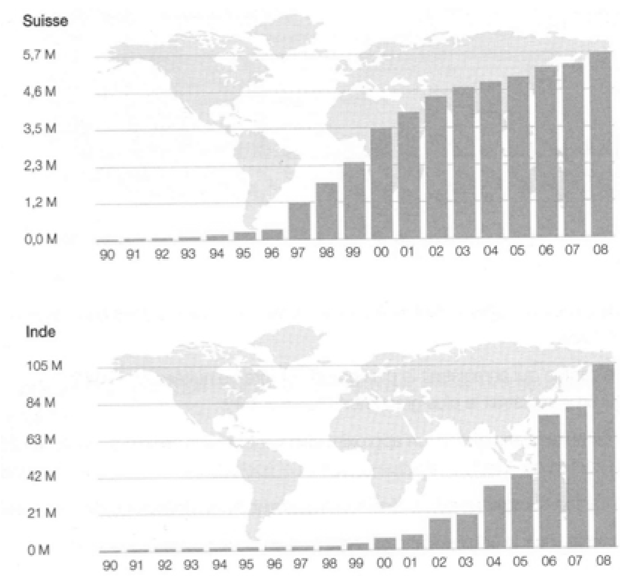


Figure 9. *FA54 – Internet (Livre 9ème, p. 84)*

Il est clair qu'il n'y a pas ici une seule bonne réponse : on peut en effet construire différents modèles d'évolution pouvant s'expliquer en partie par les données connues, mais susceptibles aussi de prendre en compte d'autres facteurs socio-économiques. Chaque modèle consiste à construire un nouveau système sous la forme d'une fonction dont les propriétés sont issues des représentations graphiques données. Le modèle le plus simple consiste à utiliser la proportionnalité sur les accroissements, donc une fonction affine. Les questions b) et c) peuvent fortement induire un modèle à accroissement constant à partir de 2003, sur la base d'une moyenne entre 2003 et 2008, mais il existe bien d'autres façons de construire un modèle affine pertinent. Ainsi en Suisse on voit qu'entre 2003 et 2008, le nombre d'utilisateurs passe de 4.7M à 5.7M ; si on divise la différence par 5, on obtient un accroissement annuel moyen de 0.2M, ce qui conduirait à 8.7M d'utilisateurs en Suisse en 2020 (pour l'Inde on arriverait avec le même modèle à 305.6M). Remarquer que cette prévision dépasse la population actuelle de la Suisse apporte une bonne raison pour s'interroger sur la validité de ce modèle ! Les questions b) et c) portant sur un coefficient multiplicateur, les élèves peuvent penser à un modèle de type croissance géométrique, correspondant à une fonction exponentielle (qui n'est pas connue en 9^{ième}), ce qui revient non pas à diviser l'accroissement absolu entre 2003 et 2008 par 5, mais à prendre la racine 5^{e} du coefficient d'accroissement, ce qui conduirait à un nombre d'utilisateurs en 2020 de l'ordre de 8,8M pour la Suisse et 5438M pour l'Inde ; ce dernier résultat peut être jugé irréaliste, même pour ce grand pays en plein boom démographique. On voit donc qu'il faut prendre en compte non seulement les accroissements, mais aussi leur tassement avec le temps.

Sans développer plus avant les réponses possibles à cette dernière question, remarquons qu'elle pose des difficultés tout autant d'ordre mathématiques que d'interprétation des données et du contexte socio-économique et démographique. On entre ici au cœur de la complexité de la modélisation, sur un exemple pourtant assez simpliste, d'une classe de problèmes (la prédiction) dont des exemples bien plus ardus sont fréquemment traités dans les diverses branches de l'industrie, de la recherche ou de l'administration. Aussi, si on peut raisonnablement espérer que ce type de question motive les élèves au premier abord, il est par contre probable que la tâche leur paraisse vite insurmontable. On peut imaginer, en y mettant le temps, diverses mises en scène avec des aides plus ou moins grandes, un partage des tâches entre les groupes, un outillage par un tableur, etc., pour faire vivre cette activité avec un maximum d'autonomie des élèves. Nous n'avons pas la place ici de rentrer dans le détail de ce type de considérations ; toutefois une solution à minima, qui permet quand même de donner aux élèves l'occasion de s'approprier une part non négligeable du questionnement, consisterait à leur fournir différents modèles (sous formes de graphiques par exemple) et à leur demander de se prononcer sur leurs pertinences respectives pour prévoir le nombre d'utilisateurs en 2020. Nous faisons une proposition dans ce sens en annexe.

Le dernier exemple que nous allons examiner présente une activité de recherche dont l'enjeu de modélisation n'est a priori pas central, mais nous semble toutefois propice à une gestion didactique intéressante.

Après avoir tracé un carré de 6 cm de côté, Pierre demande à sa fille Nathalie de partager celui-ci en neuf morceaux carrés de côtés mesurés par un nombre entier de centimètres.

Nathalie trouve rapidement un partage et se demande s'il y en a d'autres.

Deux partages constitués des mêmes carrés, mais placés différemment, sont considérés comme identiques. Combien y a-t-il de partages différents ?

Figure 10. *RS1 – Carré partagé (Livre 9ème, p. 169)*

Bien sûr le pavage le plus évident consiste à positionner 9 carrés de côté 2 dans le grand carré de côté 6. Ceci dit, il n'est pas très difficile de trouver deux autres solutions (voir figure ci-dessous). Cette étape du travail permet aux élèves une recherche sur une question ouverte. Elle peut donner lieu à des discussions sur des solutions équivalentes (mêmes carrés positionnés différemment) mais globalement, elle abouti assez vite à un accord sur le fait qu'il existe ces trois solutions et que faute d'en avoir trouvé une autre, il n'y a que celles-ci.

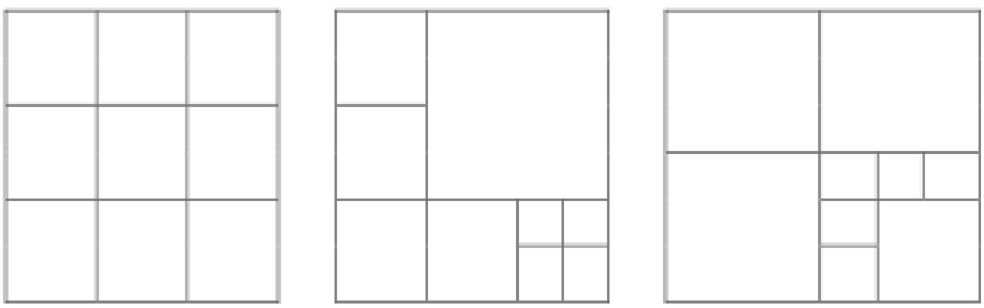


Figure 11. *Les trois solutions du problème du carré partagé*

Si on essaie de justifier le fait qu'il n'y a pas d'autres solutions, on peut tenter une sorte de preuve par exhaustion en commençant par montrer qu'il ne peut y avoir de solution contenant un carré de côté 5, puis en montrant qu'il n'y a qu'une solution avec un carré de côté 4, etc. Cette approche est un peu laborieuse et surtout difficile à rédiger de façon totalement explicite, mais elle a le mérite de rendre compte d'une investigation systématique de tous les cas possibles. Une autre possibilité consiste à interpréter le problème en termes d'aires. On passe donc dans une modélisation du système géométrique à un système numérique. Le problème dans le deuxième système consiste ainsi à lister toutes les décompositions possibles de 36 en la somme de neuf carrés d'entiers non nuls (1, 4, 9, 16, 25). Bien sûr, il faut ensuite vérifier si chaque solution obtenue correspond ou non à un pavage possible (raisonnement par condition nécessaire, puis suffisante). On peut alors voir que, à part la solution avec 9 fois 4, une telle décomposition doit au moins contenir un carré plus grand que 4. On peut alors tour à tour examiner les décompositions possibles comprenant au moins un 9, puis au moins un 16 (sans 9), puis au moins un 25 (sans 9 et sans 16). En plus des trois décompositions correspondant aux solutions ci-dessus, on trouve une seule autre décomposition possible : $36 = 25 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, dont il est facile de voir qu'elle ne correspond pas à un pavage possible, puisque, si on positionne un carré de côté 5, il n'y a plus de place que pour des carrés de côté 1.

Il n'est guère plus aisé de justifier entièrement qu'il n'y a que quatre décompositions possibles de 36 en la somme de neuf carrés non nuls, que de justifier que les trois pavages ci-dessus sont les seuls possibles. Toutefois, cette recherche numérique se systématise plus facilement (elle est d'ailleurs assez simple à programmer sur un ordinateur). Par ailleurs, il est peu probable que des élèves de 9$^{\text{ième}}$ pensent d'eux-mêmes à passer dans le champ du numérique (pour des compléments voir Cherix, Floris & Weiss, 2012).

Ici, il y a fort à parier que, dans une classe où les trois solutions ci-dessus auraient émergé, la majorité (si ce n'est la totalité) des élèves soient rapidement convaincus que ce sont les trois seules solutions et qu'ils ne voient pas la nécessité d'aller plus loin. L'enseignant peut tenter de forcer la nécessité de prouver que ce sont bien les seuls pavages possibles, mais les élèves en seront probablement déjà convaincus par le fait que personne n'en a trouvé d'autres. On se retrouve là dans un cas assez classique où il semble bien que l'enseignent n'a d'autre choix que de renoncer ou d'imposer un changement de contrat didactique. C'est là que la possibilité d'une modélisation numérique du problème peut nous venir en aide. On peut en effet susciter le changement de contrat, et la nécessiter de démontrer qu'il n'y a pas d'autre solution, en modifiant le milieu pour les élèves, par l'apport d'une nouvelle information de type numérique. Cette dialectique entre les modifications du milieu et l'évolution du contrat didactique a été particulièrement travaillée par Perrin-Glorian et Hersant (2003).

Ici, on peut dire aux élèves : « Eric, le petit frère de Nathalie rentre de jouer au foot et regarde le problème et les trois solutions trouvées par Nathalie et déclare qu'il existe encore une solution en prenant deux carrés de côtés 3, trois carrés de côté 2 et quatre carrés de côté 1. A-t-il raison ? ».

Cette relance faite aux élèves n'est pas aussi générale que de leur demander de montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions, mais elle doit les interpeller sur un cas précis, qui demande vérification. La solution d'Eric n'est pas bonne, mais ce qui nous intéresse c'est que l'argument le plus simple pour l'évacuer consiste à voir que la somme des aires fait 34 et non 36. Cet argument ne peut échapper à l'attention ici car même si on commence par essayer de réaliser le pavage, on voit que ce qui cloche, c'est qu'il manque deux carrés de côté 1, pour compléter le pavage. Autrement dit cette relance, permet non seulement de poser la question de la nécessité de s'assurer qu'il n'y a pas d'autres solutions par un biais plus naturel que la demande d'une démonstration, mais aussi de faire apparaître le contrôle par la somme des aires. C'est alors que l'on peut faire une deuxième relance en utilisant la décomposition qui ne donne pas un pavage : « Eric reconnaît son erreur, mais dit qu'il a trouvé une autre solution avec sept carrés de côté 1, un carré de côté 2 et un carré de côté 5. ». Cette solution, qui ne peut être rejetée par l'argument sur les aires, permet de donner tout son intérêt à la recherche des décompositions possibles de 36 en neuf carrés non nuls.

Conclusion

Le but de ce texte, et de la formation continue dont il est issu, est de s'interroger sur ce que la modélisation signifie dans le travail mathématique et sur ses enjeux didactiques. Nous sommes partis d'un choix curriculaire du nouveau Plan d'études romand : celui de placer la modélisation au cœur de l'enseignement des mathématiques et des sciences. Il ne nous appartient pas de discuter ce choix, pas plus que de remettre en cause le contenu des *Moyens d'enseignement 9-10-11*, source officielle unique pour tout le cycle 3 (3 premières années du secondaire) des cantons de Suisse romande. Notre propos a été de voir comment on pouvait rendre opérationnelle une réflexion sur la modélisation dans l'analyse de quelques activités de ces manuels. Ainsi nous avons mis en place une définition souple et large de la modélisation et une typologie en trois niveaux, qui nous ont permis d'organiser notre travail d'analyse. Nous avons ainsi, à l'appui d'une dizaine d'activités, représentatives des *Moyens d'enseignement 9-10-11*, tenté de montrer qu'une entrée par la modélisation dans l'analyse didactique de chacune permettait d'identifier des enjeux d'apprentissage intéressants liés avec une problématique de modélisation, plus ou moins large et plus ou moins explicite pour les élèves. Il apparaît que la modélisation peut revêtir des aspects essentiellement distincts selon qu'elle est extra ou intra mathématiques, qu'elle s'attache à résoudre un problème concret ou qu'elle est utilisée comme levier didactique pour faire acquérir une nouvelle notion mathématique. Nous avons aussi montré que le travail demandé aux élèves pouvait porter sur des éléments plus ou moins larges de tout le processus de modélisation. Nous avons enfin tenté de montrer comment ces activités pouvaient, dans certains cas, permettre un travail d'investigation important de la part des élèves, tout en étant vigilant à proposer des gestions par l'enseignant qui ne soient pas trop chronophages.

Références

ARGAND M. (1806) Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans des constructions géométriques. *Annales de Mathématiques,* **4**, 133–147.

BARRERA-CURIN R. I. (2012) *Étude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*. Thèse de l'université Paris-Diderot.

BERTHELOT R. et SALIN M.-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'université de Bordeaux. IREM de Bordeaux.

BERTHELOT R.et SALIN M.-H. (1993) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, ***53***, 39–56. http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/numero.php?num=53

BERTHELOT R. et SALIN M.-H. (1999) L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N*, ***65***, 37–59. http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/numero.php?num=65

BLUM, W. et NISS, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematical instruction, *Educational Studies in Mathematics, 22*, 37–68.

BROUSSEAU G. (2000) Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. In *Actes du 2e colloque de didactique des mathématiques* (pp. 67–83). Université de Crète (département de l'éducation). http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/fr/

BLUM W. et al. (2007) ICMI Study 14 : Applications and modelling in mathematics education – Discussion document, *Educational Studies in Mathematics, **51***, 149-171.

CHÂTELET G. (1993) *Les enjeux du mobile : mathématiques, physique, philosophie*. Paris : Seuil.

CHERIX P.A., FLORIS R. et WEISS L. (2012) Le carré partagé. Sensibilisation au thème « Recherche et Stratégies » des nouveaux moyens d'enseignement de 9ème Harmos. *Math Ecole,* **218**, (numéro spécial EMF2012), 40–45. Version en ligne avec annexe : http://www.ssrdm.ch/mathecole/

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie – Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, **19***, 43–72.

CHEVALLARD I., BOSCH M. et GASCÓN, J. (1997) *Estudiar matemáticas. El eslabónperdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

COULANGE L. (1997) Les problèmes « concrets » à « mettre en équations » dans l'enseignement. *Petit x, **47***, 33–58.

DORIER J.-L. et BURGERMEISTER P. F. (2012) Modelling: a federating theme in the new curriculum for mathematics and sciences in Geneva compulsory education (age 4 to 15). *Proceedings of the International Congress on Mathematical Instruction* ICME12 (Seoul 8-15 july 12), (TSG17, pp. 3206–3215).

GONSETH F. (1932) La vérité mathématique et la réalité. *Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles **113***, 220-240. (rééd. In Emery, E. (éd.) *Ferdinand Gonseth – Le problème de la philosophie ouverte (Ensemble de textes choisis et annotés par E. Emery)*, (pp.41–61). Lausanne : Dialectica – L'âge d'Homme.)

GONSETH F. (1936) *Les mathématiques et la réalité.* Paris : Alcan.

HEFENDEHL-HEBEKER L. (1991) Negative numbers: Obstacles in their evolution from intuitive to intellectual constructs. *For the learning of mathematics*, ***11(1)***, 26–32.

NISS M., BLUM W. et GALBRAITH P. (2007) Introduction. In W. BLUM, P. GALBRAITH, H.-W. HENN et M. NISS (éds.) *Modelling and applications in mathematics education – The 14th ICMI study* (pp. 4–32), New-York: Springer.

PERRIN-GLORIAN M.-J. et HERSANT M. (2003) Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques, **23(2)**,* 217–276.

ROBERT A., PENNINCKX J. & LATTUATI M. (2012) *Une caméra au fond de la classe de mathématiques – (Se) former au métier d'enseignant à partir d'analyses de vidéos*. Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.