MESURER AVEC UNE RÈGLE CASSÉE POUR COMPRENDRE LA TECHNIQUE USUELLE DE LA SOUSTRACTION POSÉE

Anne-Marie RINALDI

Doctorante LDAR - Université Paris Diderot

Enseignante à l'Université de Picardie Jules Verne

Le travail que nous présentons s'inscrit dans le cadre d'une recherche sur l'enseignement du calcul soustractif posé à l'école primaire. Dans cet article, après avoir donné un aperçu des différentes techniques de soustraction posée et mentionné celles qui sont retenues par certains auteurs de manuels scolaires, nous avons choisi de nous intéresser plus particulièrement à la technique de la soustraction posée « par compensation » (usuelle en France).

En nous appuyant sur une expérimentation conduite en 2010/2011, dans une classe de CE2 de l'école annexe de l'Institut universitaire d'Amiens (centre de Beauvais), nous développons les choix didactiques que nous faisons, pour que les élèves posent correctement une soustraction en colonne et soient capables de dire à quoi correspondent les retenues s'il y en a. En effet, l'analyse des procédures des élèves révèle que la technique par compensation, apprise parfois dès le CE1, est encore mal appliquée ou utilisée, sans référence aux propriétés et significations sous-jacentes.

L'objectif de notre recherche est d'établir qu'il est possible de concilier un enseignement qui vise à installer des savoir-faire et des automatismes, avec un enseignement où les différentes étapes qui interviennent dans le déroulement d'un calcul sont justifiées mathématiquement. Nous emprunterons à la théorie anthropologique du didactique le concept de technologie associée à une technique (les éléments théoriques sont développés dans une partie consacrée en pages suivantes). Nous présenterons une étude mathématique de la technique par compensation, qui nous amènera à définir la propriété de conservation des écarts, et à établir les liens entre les notions de différence, d'écart, et de distance. Après avoir comparé différentes approches utilisées dans les manuels, nous choisirons d'introduire la propriété de conservation des écarts par translation sur la droite graduée. En nous référant à la théorie des champs conceptuels[1], nous montrerons

[1] La quatrième partie de l'article reprend les cadres théoriques que nous utilisons dans notre recherche et que nous convoquons à différentes échelles pour construire et analyser la séance que nous présentons.

l’intérêt d’engager un travail autour de cette propriété dans le domaine de la mesure et de le poursuivre dans le domaine du calcul. La suite de l’article sera consacrée à la situation d’apprentissage « règle cassée ». Nous avons conçu et analysé cette situation en nous appuyant plus particulièrement sur le cadre théorique de la médiation sémiotique. La confrontation des analyses *a priori* et *a posteriori* de cette situation va permettre de déterminer sous quelles conditions l’utilisation d’une règle cassée favorise la conception de l’écart entre a et b ($a < b$) comme la différence entre b et a. Pour finir, nous présenterons les résultats liés à cette première expérimentation qui nous servent de référence dans la poursuite de notre travail.

L’enseignement du calcul posé de la soustraction

Trois techniques opératoires de la soustraction

Dans les nouveaux programmes de 2008 pour l’école élémentaire, il est indiqué qu’une technique de la soustraction posée doit être enseignée, et ce, dès le CE1. Guinet (1978), dans un article retraçant l’histoire des techniques opératoires de la soustraction, mentionne l’existence de trois techniques qui ont fait l’objet d’un enseignement systématique en France. La première, dite technique par « compensation » nous est familière. On dit aussi qu’elle est usuelle. Elle requiert des connaissances en numération décimale et s’appuie sur la propriété de conservation des écarts. C’est elle qui est utilisée, quand on trouve un calcul posé, avec des retenues ainsi placées :

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & 7 & {}_{1}5 \\ - & & \underset{1}{3} & 8 \\ \hline & 2 & 3 & 7 \end{array}$$

La deuxième technique, dite par « emprunt », est davantage utilisée dans le monde anglo-saxon. Elle repose entièrement sur les propriétés du système de numération décimale, en particulier sur le fait que la valeur d’un chiffre dépend de sa position dans l’écriture d’un nombre. C’est ainsi que pour calculer $275 - 38$ avec cette technique, on « casse » une dizaine. 275 est alors composé de 2 centaines, 6 dizaines et 15 unités. Il n’y a plus d’entrave pour enlever 8 unités à 15 unités, puis 3 dizaines à 6 dizaines et 0 centaine à 2 centaines.

La troisième technique, dite par « addition », est fondée sur l’idée que pour chercher la différence entre b et a, on cherche combien il faut pour aller de a à b. Pour effectuer un calcul soustractif posé, on utilise en fait la technique opératoire de l’addition, et en particulier l’addition à trou.

$$\begin{array}{rrrr} & & 3 & 8 \\ + & & & \\ \hline & 2 & 7 & 5 \end{array}$$

On se demande combien il faut ajouter à 8 pour obtenir 5. Comme ce calcul n’est pas possible, on cherche combien il faut ajouter à 8 pour obtenir 15. On trouve 7. On inscrit ce chiffre dans la colonne des unités au-dessus du trait. Dans 275, on a déjà obtenu 15, c'est pourquoi on marque une retenue[2], celle de l'addition dans la colonne des dizaines. 3 + 1 = 4, combien faut-il ajouter à 4 pour obtenir 7 ? 3. On inscrit 3 dans la colonne des dizaines. Il reste alors deux centaines à ajouter pour atteindre 275 : on marque un 2 au-dessus du trait dans la colonne des centaines.

Les techniques opératoires choisies par des auteurs de manuels et d'ouvrages

Les trois techniques présentées ci-dessus ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients. Les auteurs de *ERMEL CE2* (2006) privilégient l'enseignement de la technique par addition, en évoquant surtout la continuité des apprentissages entre le CE1 et le CE2. Même en CM1 (2006), alors qu'ils « *acceptent toutes les techniques performantes* » (p. 187), ils recommandent encore l'apprentissage de la technique par addition pour les enfants qui commettent encore des erreurs.

Les auteurs de « *J'apprends les maths* », quant à eux, en 2003 préconisaient l'enseignement de la technique par emprunt. Ils ont fait évoluer leur choix en 2010, car ils expliquent que cette technique est facile à comprendre dans le cas de nombres à deux chiffres mais que, « *lorsque le nombre a trois chiffres et lorsqu'il s'écrit avec un zéro comme chiffre des dizaines, la gestion d'une telle procédure devient beaucoup plus complexe.* » (p. 86).

Les auteurs d' « *Euro maths* » en 2009 proposent d'enseigner la technique par compensation, dès le CE1, en l'inscrivant dans une progression où les élèves découvrent, au préalable, la propriété de conservation des écarts et une technique de calcul dite à la russe qui va consister à « *remplacer une soustraction par une soustraction équivalente dans laquelle le nombre à soustraire est un nombre rond.* » (p. 29).

Ainsi, avec cette méthode, pour calculer 143 − 67, on calcule 146 − 70. Ces deux calculs sont équivalents, pourtant le second est plus facile à effectuer mentalement. On a ajouté à 67 le nombre 3 pour obtenir un nombre « rond », et ajouté 3 à 143 pour conserver l'écart.

Nous avons fait le choix de nous intéresser à la technique par compensation, car cette technique est relativement commune dans les classes. De plus, elle permet d'utiliser la propriété de conservation des écarts qui est utile en calcul mental comme en atteste le traitement de l'exemple ci-dessus (143 − 67 calculé à la russe) et sera mobilisée dans la résolution des équations en collège.

Nous avons pour ambition que des élèves de CE2 soient capables de poser une soustraction avec la technique par compensation sans « se tromper » et soient capables à terme, de justifier les propriétés des nombres et des opérations mobilisées (visée technique et technologique[3]). Cette seconde exigence sur la valence épistémique[4] de la technique

---

[2] La retenue peut être marquée dans la colonne des dizaines au-dessus du trait ou au-dessus du chiffre 3.

[3] Ces deux termes « technique et technologique » sont ici employés au sens de la théorie anthropologique du didactique et définis dans la quatrième partie de l'article.

[4] Artigue (2005) définit le potentiel épistémique du calcul au-delà de son potentiel pragmatique car le calcul joue un rôle dans la conceptualisation des objets mathématiques qu'il engage.

est-elle cependant légitime ? On trouve, dans les programmes de l'école primaire de 2008, dans la rubrique « Nombres et calcul », les attentes suivantes :

- au cycle 2 : « *Les élèves apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction.* » (p. 18).
- au cycle 3 : « *La maîtrise d'une technique opératoire pour chacune des quatre opérations est indispensable.* » (p. 23).

Rien n'indique dans les programmes quel degré de justification est attendu en CE1, en CE2 et par la suite, les compétences n'étant pas déclinées année par année mais par cycle. Or, sans cette justification de la technique opératoire de la soustraction posée, nous faisons l'hypothèse que les élèves, en particulier ceux qui font des erreurs, ont peu de moyens de contrôler pas à pas leur calcul. Les élèves qui ne font pas d'erreurs, quant à eux, peuvent ne pas savoir quel sens mathématique donner aux retenues. Notre objectif est donc double : travailler la technique pour elle-même et justifier sa mise en place. Venons-en procédures des élèves quand ils posent une soustraction avec la technique par compensation.

Procédures des élèves

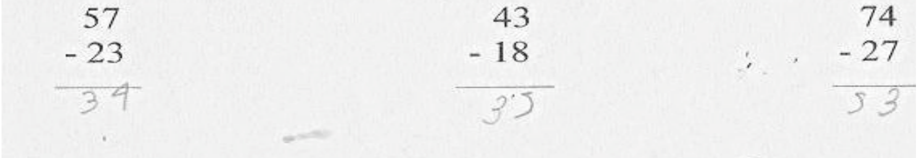
Maurel & Sackur (2010) constatent que les calculs soustractifs avec retenues provoquent encore des difficultés chez certains élèves de CM1. Ces chercheurs avancent que les élèves font « *la soustraction dans le sens où c'est possible, en retranchant le plus petit au plus grand, quelle que soit sa place dans la soustraction posée, en haut ou en bas.* » (Maurel & Sackur, 2010, p. 48).

Dans la classe de CE2 où nous avons conduit l'expérimentation, nous avons proposé un test (Annexe 1), en janvier 2010, pour évaluer les connaissances et les compétences sur le calcul mental et posé. Cette classe est une classe de 21 élèves dans une école annexe de Beauvais. Ils ont suivi le même enseignement en mathématiques. Ils n'ont jamais utilisé de manuels scolaires ni de fichiers. Ils ont un cahier d'entraînement et un cahier de leçon. Les élèves ont appris en CE1 la technique par compensation de la soustraction, et la maîtresse a repris cette technique avec eux durant la première période du CE2.

À l'exercice 3, pour le premier calcul 57 – 23 posé en colonne, un seul élève s'est trompé et trouve 58, tous les autres ont su :

- calculer 7–3 et marquer ce résultat « au bon endroit », dans la colonne réservée aux chiffres des unités.
- calculer 5–2 et marquer ce résultat « au bon endroit », dans la colonne réservée aux chiffres des dizaines.

En revanche, 7 élèves sur 21, donc un tiers, n'ont pas réussi les soustractions avec retenues. Quatre reproduisent l'erreur signalée précédemment comme en atteste cette production :



En effet, dans la deuxième et la troisième soustraction, l'élève cherche le résultat de 8−3 et le résultat de 7−4 et non pas à calculer 3−8 et 4−7, ce qui l'aurait amené à introduire des retenues.

Le travail de recherche que nous avons entrepris s'appuie sur les besoins repérés à travers les procédures des élèves. En l'occurrence, nous constatons que certains élèves ne savent pas appliquer l'algorithme, mais aussi que d'autres élèves savent l'appliquer en justifiant son utilisation en produisant un *discours formel et convenu* d'après Coulange & Grugeon (2008). Nous avançons ce manque de justifications en nous appuyant sur l'analyse d'enregistrements filmés d'entretiens qui ont eu lieu dans la classe de CE2 que nous évoquions précédemment, une semaine après la passation du test écrit. Ces entretiens se déroulaient en tête à tête, entre chercheur et élève, et avaient pour but de recueillir le discours oral, produit par l'élève pour expliciter une procédure de calcul soustractif en ligne ou posée. Le discours de Benoît, élève de cette classe de CE2, produit en février 2010 alors qu'il résolvait la soustraction posée 43 – 18 avec papier-crayon nous semble révélateur :

> « *Alors ici il y a trois moins huit, on ne peut pas. Si j'ai trois bonbons, je ne peux pas t'en donner huit, j'en ai pas assez.* (L'élève prend son stylo et marque les retenues.)
>
> *Donc on va faire une retenue, on va mettre un « un » ici et « un ».*
>
> *Après on fait un paquet.* (Il entoure la retenue placée dans la colonne des dizaines avec le chiffre des dizaines correspondant.)
>
> *Treize moins huit, on peut. Si, j'ai treize bonbons, je peux très bien t'en donner huit.*
>
> *Douze, onze, dix, neuf, huit, sept, six, cinq.* (L'élève compte en même temps le nombre de nombres qu'il dit en utilisant les doigts de sa main gauche qu'il lève un à un, puis trois doigts de sa main droite. Il écrit 5 dans la colonne des unités.)
>
> *Et là, on va faire quatre moins deux, je peux t'en donner deux.* (Il écrit 2 dans la colonne des dizaines.) »

On mesure que l'élève a compris, en référence au registre des collections, qu'on ne pouvait pas retrancher le plus grand au plus petit sans faire intervenir une retenue, et que cette retenue, bien placée, va permettre de poursuivre le calcul. Le statut de ce « un », qui en fait représente une dizaine, n'est pas explicité ; par contre, le « *treize moins huit* » montre qu'implicitement cette connaissance est présente. Le « *on va faire un paquet* » est aussi une convention que l'élève a apprise. C'est un moyen peut-être mnémotechnique pour se souvenir qu'à l'étape suivante, il faudra ajouter le chiffre du dessus à celui du dessous. En conclusion, le discours[5] de Benoît fait référence au dénombrement, aux usages en vigueur dans la classe pour mémoriser les différentes étapes à suivre, mais nullement à la propriété de conservation des écarts pour justifier l'utilisation des retenues. On peut cependant dire que ce discours permet d'identifier « le mode d'emploi » associé à la technique. Dans l'article que nous avons déjà cité, Maurel & Sackur (2010) interrogeaient des élèves d'une classe de CM1 au sujet du calcul soustractif posé. Elles ont pointé le fait que la majorité d'entre eux employaient l'expression : « *J'emprunte une dizaine et je la*

---

[5] L'analyse du discours de Benoît fait référence à la notion de « technologie » que nous définissons en référence à la théorie anthropologique du didactique.

rends » pour justifier le fait d'écrire deux retenues. Là encore, cette phrase permet de mettre en avant une action qui, à première vue, justifie la présence des retenues. Pourtant, il n'en est rien, car dans la technique usuelle de la soustraction posée, on n'emprunte aucune dizaine. On ajoute à chaque nombre une dizaine, ce qui permet de ne pas modifier la différence à calculer. Précisons dans le paragraphe suivant des éléments théoriques qui permettront de justifier l'usage des retenues.

Un regard mathématique sur la technique usuelle de la soustraction posée

La propriété de conservation des écarts

Nous allons préciser quelles justifications mathématiques interviennent dans la technique usuelle de la soustraction posée, en sachant que la théorie associée est liée à la construction des entiers naturels et aux propriétés des opérations notamment la régularité de l'addition.

Prenons l'exemple du calcul posé 275 – 38 :

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 7 & 5 \\ - & & 3 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Le calcul devient :

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 7 & {}_{1}5 \\ - & & \underset{1}{3} & 8 \\ \hline \end{array}$$

Au lieu de calculer 275 − 8, on calcule (275 + 10) − (38 + 10), ce qui permet de trouver le chiffre des unités en effectuant 15 − 8 et le chiffre des dizaines en effectuant 7 − 4.

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 7 & {}_{1}5 \\ - & & \underset{1}{3} & 8 \\ \hline & 2 & 3 & 7 \end{array}$$

En effet, la retenue « 1 » devant le 5 symbolise cet ajout de dix unités à 275, et la retenue «1 » sous le 3 symbolise cet ajout d'une dizaine au nombre 38. Dans le registre des écritures mathématiques en ligne, cela revient à réécrire le calcul (275 + 10) − (38 + 10) en (270 + 15) − (40 + 8) puis en (270 − 40) + (15 − 8), pour finir en (200) + (70 – 40) + (15 – 8) donc à effectuer les deux soustractions que l'on retrouve *in fine* dans le calcul posé.

Cette justification sur un exemple illustre que la technique opératoire par compensation repose sur la propriété de conservation des écarts. Les transformations d'égalités numériques sont obtenues ensuite en décomposant d'une manière « astucieuse » les nombres, manière qui permettra de rendre possible et facile le calcul du chiffre des unités, du chiffre des dizaines, du chiffre des centaines. L'élément théorique sur lequel s'appuie la technique, la propriété de conservation des écarts, n'apparaît pas dans les programmes comme une connaissance exigible. De plus, la transformation d'égalités numériques n'est pas un objectif déclaré du primaire. Cette capacité peut cependant être travaillée en parallèle en numération et en calcul mental. La propriété de conservation des écarts (écart invariant par translation de dix, cent, mille etc. sur la droite numérique) apparaît comme indispensable dans la justification des retenues. Il est également important de revenir sur la notion de différence en elle-même, et d'écart donc, et de préciser les liens entre ces notions.

Différence, écart et distance

Quand on considère deux entiers naturels a et b, il n'existe pas toujours d'entier naturel c tel que $a = b + c$. Si un tel nombre existe, c'est le cas quand a est supérieur ou égal b, il est nécessairement unique : on l'appelle différence de a et b et on le note $a - b$. Le calcul d'une différence est donc directement associé à la recherche d'un complément. Ce calcul n'est pas toujours envisageable et suppose qu'on compare au préalable les deux entiers considérés. Associé au cadre numérique, et en primaire relié à la recherche d'une quantité, la différence représente suivant le contexte un excédent, un excès, un supplément, un défaut, un manque, un complément, un reste, un solde…

Dans le cadre métrique, en considérant deux nombres a et b comme les abscisses de deux points situés sur la droite numérique, la distance de a à b est obtenue en calculant la valeur absolue de $a - b$. En primaire, il n'est pas courant d'opérer un lien entre la notion de distance et le calcul d'une différence. Dire par exemple que Paris est à 72 km de Beauvais, suppose implicitement que Beauvais a pour abscisse le nombre 0 et Paris l'abscisse 72 ou inversement. En effet, à ce niveau de scolarité, la distance est un nombre obtenu à partir d'un mesurage. La mesure de la longueur d'un segment pour une unité donnée (donc indirectement la distance associée à ses deux extrémités) s'obtient, de façon pragmatique, en utilisant un double-décimètre, un mètre, un décamètre etc., un instrument qui donne un résultat par simple lecture.

En quoi la notion d'écart permet-elle d'établir un lien entre les cadres numérique et métrique ? Chercher par exemple l'écart entre 9 et 14, entre 997 et 2, c'est chercher combien il y a de 9 à 14 ou de 14 à 9, et de 997 à 2 ou de 2 à 997. La notion d'écart entre a et b ou b et a renvoie donc à la recherche d'un complément. Or, ce complément, suivant les nombres a et b, se calcule plus facilement en cherchant le résultat d'une addition à trou ou d'une différence. Par rapport aux exemples choisis, l'écart entre 9 et 14 peut se calculer en cherchant l'écart entre 9 et 10, puis l'écart entre 10 et 14 ; et l'écart entre 997 et 2 en calculant directement $997 - 2$. Nous faisons l'hypothèse de recherche que ce calcul de l'écart est d'autant plus facile quand nous plaçons, même mentalement, les deux nombres a et b sur un axe numérique. L'écart entre a et b correspond là à la mesure de la longueur du segment d'extrémités a et b, donc à la différence $b - a$. Cet écart pour les élèves de primaire est souvent vu comme « ce qu'il y a entre a et b », comme le bond entre a et b. La notion d'écart peut donc « précéder » dans l'apprentissage la notion de distance et permettre de montrer, par le calcul et sur le schéma, que la recherche du complément de a pour aller à b correspond à $b - a$.

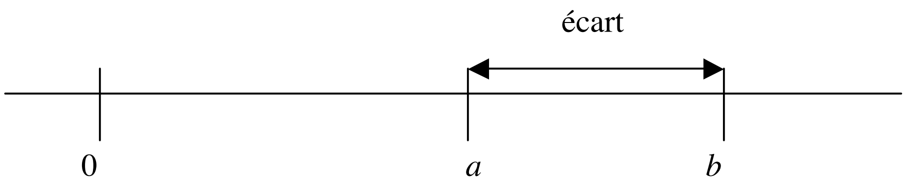


Figure 1 - Représentation de l'écart entre deux nombres sur un axe numérique

L'écart entre a et b symbolisé par la double flèche dans la Figure 1 correspond à la mesure de la longueur du segment d'extrémités a et b (une unité étant fixée), et se calcule en cherchant la différence $b - a$.

Différents choix pour enseigner la propriété de conservation des écarts

Afin de nous assurer de l'existence d'une trace, d'un travail consistant, sur la technologie fondatrice de la technique usuelle de la soustraction en France, nous avons consulté plusieurs manuels de CE2 et les livres du maître associés. Nous avons, dans un premier temps, analysé comment les auteurs se proposent d'introduire la propriété de conservation des écarts, en cherchant quel(s) type(s) de situation ils proposent, et en déterminant à quoi se réfèrent ces situations. *J'apprends les maths CE2* (2010, p. 48) propose une situation où l'élève peut constater cette propriété en manipulant deux collections témoins auxquelles on ajoute le même nombre d'éléments. *Euro maths CE2* (2010, p. 44) propose un problème, où mère et fils découvrent qu'ils auront toujours la même différence d'âge tous les ans. *ERMEL CE2* (2000, p. 118) met en place un jeu où il s'agit de trouver de proche en proche, en tenant compte des écarts, un nombre cible placé sur la droite numérique.

Nous constatons une première différence entre ces approches au niveau du mode de représentation choisie pour les nombres. Le nombre est soit vu comme cardinal de collection, soit vu comme abscisse sur un axe gradué par des entiers. Une seconde différence se situe au niveau des contextes choisis pour introduire la propriété. Le contexte se veut proche du vécu de l'enfant, familier avec la comparaison de collection de timbres pour *J'apprends les maths* et le calcul d'âge pour *Euro Maths*. Pour *ERMEL CE2*, le contexte ne fait pas référence à une situation concrète, le déplacement mental sur l'axe est lié aux besoins du jeu.

En revanche, ces trois approches posent directement le problème de la propriété de conservation des écarts (*ERMEL CE2*) ou de la conservation des différences (*Euro maths* et *J'apprends les maths*) sans s'assurer que les élèves se représentent réellement ce qu'est l'écart ou la différence entre deux nombres entiers. Ce n'est pas le cas de la situation de référence « Règles et réglette » présentée par Bueno-Ravel & Le Poche (2011), construite à partir de la situation « Jeu des règles et des bracelets » décrite par Oyallon (1991) qui permet de travailler sur l'écart entre deux nombres vu comme des repères sur la droite graduée par des entiers. Cet écart est ici bien « matérialisé » par deux bracelets qui délimitent le segment à mesurer. De plus, les élèves, en utilisant ensuite une règle graduée, peuvent valider les techniques de calcul mises en œuvre.

Suite à la lecture des programmes, des manuels, aux constats faits en classe sur les procédures des élèves, nous arrivons à la question suivante : **quelle(s) sont les potentialités des situation(s) pour favoriser le lien entre la différence de deux nombres et l'écart entre ces deux nombres, de façon à permettre un outillage technologique de la technique de soustraction posée par compensation ?**

Une première hypothèse est de nous rapprocher des choix de *ERMEL CE2,* en proposant une situation où les nombres seront représentés sur un axe. Pour que cette situation soit moins abstraite et permette le passage de « l'écart » au calcul de la différence, nous envisageons de graduer l'axe. Nous passons ainsi dans un autre cadre, celui de la mesure des longueurs. L'écart est alors conçu comme la distance entre deux nombres sur la droite numérique. Mais cette proposition de travail dans ce cadre de la mesure suffira-t-elle pour que les élèves construisent le lien voulu entre écart et différence ? De plus, à long terme, quand ils se retrouveront « devant » un calcul soustractif posé, réinvestiront-ils ce qu'ils ont découvert dans un contexte particulier, avec des nombres placés sur un axe ? Afin d'apporter un éclairage sur ces questions, nous faisons référence, dans le paragraphe suivant à la théorie des champs conceptuels.

Une autre hypothèse est de proposer aux élèves un artefact, en l'occurrence, une règle cassée, qui par son utilisation, peut induire cette idée de calculer l'écart en effectuant une différence et inversement d'envisager la différence de deux nombres comme la longueur du segment dont ils sont les abscisses. Afin de mieux cerner les enjeux de l'utilisation de l'artefact puis de concevoir et analyser la séance d'apprentissage « règle cassée », nous avons utilisé des éléments théoriques de la médiation sémiotique. Ces éléments que nous explicitons au paragraphe suivant, permettent de chercher à établir des conditions optimales en envisageant précisément les différentes phases de la séance. Pour chacune d'entre elles, l'élève a un rapport particulier avec l'artefact. Le rôle de l'enseignant est, entre autres, d'accompagner cette évolution puis d'utiliser « *les connaissances partagées des élèves*[6] » en s'appuyant sur certaines d'entre elles afin de faire émerger puis de justifier le calcul d'une différence.

Pour finir, comme ce que nous envisageons dans cet article est un travail sur le sens d'un calcul soustractif posé en colonne avec la technique de compensation, nous allons revenir sur ce concept de technologie associée à une technique, concept emprunté au cadre de la théorie anthropologique du didactique.

Éléments de didactique des mathématiques pour concevoir l'enseignement du calcul soustractif posé

Le calcul soustractif : un vaste champ conceptuel

Dans ce paragraphe, nous allons exposer différents points qui nous semblent essentiels pour évoquer la complexité de l'enseignement du calcul soustractif. On est tenté de formuler une première hypothèse de recherche : les élèves peuvent savoir calculer des différences sur des collections et savoir calculer des écarts en se représentant des nombres sur un axe, sans forcément établir un lien entre différence et écart. Le savoir est en effet associé à deux registres différents et donne lieu à des représentations différentes. Peut-être même, d'après les travaux de Duval (2006), que les élèves vont percevoir la différence et l'écart comme des notions mathématiques distinctes et autonomes, alors que ces deux représentations sémiotiques différentes sont génératives, en l'occurrence d'un calcul soustractif. Un autre constat est lui, lié au fait que les élèves effectuent des calculs soustractifs pour chercher, par exemple, un nombre de bonbons, une mesure de longueur. Ils associent donc la nécessité de calculer à la résolution de problèmes, problèmes fortement dépendants de contexte. Les notions et les propriétés qu'ils découvrent sont alors associées à des grandeurs. Est-ce suffisant pour concevoir ensuite des propriétés sur les nombres et les opérations qui sont des entités abstraites ? Enfin, en référence à Vergnaud (1990), le rapport au sens se construit dans la durée. Pour le jeune élève, la première conception de la soustraction correspondrait à une « *diminution* » d'une quantité initiale, par consommation, perte ou retrait. À partir d'une telle conception,

[6] Cette expression est définie dans le paragraphe suivant.

il ne serait pas immédiat de comprendre la soustraction comme un « *complément* », ou à l'inverse comme une « *augmentation* », comme une « *comparaison* » ou encore une « *différence entre états successifs* ». En effet, chacune de ces situations mobilise une conception différente, suppose un calcul relationnel distinct. Vergnaud insiste sur le fait que la rencontre d'un sujet avec un problème issu d'une classe spécifique n'évoque pas chez un individu tous les schèmes disponibles. Il en déduit qu'il ne faut pas prendre pour objet d'étude des objets trop petits, mais bien au contraire des champs conceptuels assez larges, « *un champ conceptuel étant défini comme un ensemble de situations, dont la maîtrise requiert une variété de concepts, de procédures et de représentations symboliques en étroite connexion.* » (Vergnaud, 1990, p. 62). En conclusion, faire le lien entre différence et écart, en proposant une situation d'apprentissage dans le cadre de la mesure, peut permettre, dans un premier temps, d'aborder avec les élèves la propriété de conservation des écarts. L'importance de cette propriété apparaîtra aussi dans le calcul posé. Par ailleurs, d'autres situations dans d'autres contextes pourront également être proposées, le sens se construisant en établissant des liens entre plusieurs représentations sémiotiques.

Points de vue technologique sur la technique

Dans la théorie anthropologique du didactique, Chevallard (2012) situe toute activité humaine en lien avec une technologie, pour justifier une technique utilisée pour résoudre un type de tâche :

> « *La théorie anthropologique du didactique considère que, en dernière instance, toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T, au moyen d'une certaine technique ι, justifiée par une technologie Θ qui permet en même temps de la penser, voir de la produire, et qui a son tour est justifiable par une théorie Θ.* » (p. 1)

Dans le premier paragraphe, nous avons vu que, dès le CE1, l'élève doit apprendre une technique de la soustraction posée. Des ostensifs verbaux « *Je mets un 1 ici, et un 1 là.* », « *J'emprunte, je rends.* », des ostensifs gestuels « *J'entoure, je fais un paquet.* » vont être mis en place pour que s'installe un phénomène de routinisation. On apprend des gestes et un discours, pour qu'à chaque étape du calcul, une automatisation s'installe. Vient ensuite un moment où la technique commence à être « installée ». Cette technique est devenue « naturellement » une bonne manière de faire et se suffit à elle-même. Se pose alors la question d'installer une technique trop précocement au CE1 (présence de retenues ou non). Une de nos hypothèses est qu'une autre fonction de la technologie, la fonction justificative, doit être installée pour permettre aux élèves de contrôler leurs résultats et de connaître les propriétés mathématiques qui interviennent à chaque étape du calcul. Au vu de l'étude sur les procédures des élèves, ceux-ci semblent reproduire un discours mécanique, convenu, qui n'évolue pas assez au cours de la scolarité[7]. La recherche que nous conduisons vise, en proposant un travail centré sur la propriété de conservation des écarts, à chercher des conditions pour faire évoluer ces procédures.

Utilisation d'un artefact et médiation sémiotique

Nous avons évoqué l'idée d'introduire un artefact, une règle cassée, qui permettrait un accès à la signification des écarts. Avant de décrire précisément cet objet auquel nous

[7] Nous faisons référence à l'étude de Maurel & Sackur (2010) où les chercheurs interrogeaient des élèves de CM1 sur le sens des retenues.

pensons, revenons sur l'utilisation d'un artefact comme ressource pour favoriser certains apprentissages. Un artefact est défini par Rabardel (1995, p. 59) comme : « *Toute chose ayant subi une transformation, d'origine humaine (…) susceptible d'un usage, élaborée pour s'inscrire dans des activités finalisées.* » La question posée par Mariotti & Maracci (2010) est de savoir sous quelles conditions l'utilisation d'un artefact permet à l'élève de réaliser une tâche en s'appropriant un contenu mathématique. Mariotti & Maracci (2010) montrent la complexité du rôle du professeur dès qu'il veut exploiter les possibilités de l'utilisation de l'artefact, car chaque élève va avoir une expérience personnelle, va interpréter « à sa manière » ce qu'il fait, ce qu'il observe, et donc produire des « signes ».

Ce terme de « signe » est défini par Pierce (1978) par :

> *« Un signe, ou representamen, est quelque chose qui tient lieu de quelque chose sous quelque rapport ou à quelque titre. Il s'adresse à quelqu'un, c'est-à-dire crée dans l'esprit de cette personne un signe équivalent ou peut-être plus développé. Ce signe qu'il crée, je l'appelle l'interprétant du premier signe. Ce signe tient lieu de quelque chose : de son objet. »* (Pierce, 1978, p. 121)

Cette définition met en avant une relation entre un signe (un *representamen*), un interprétant et un objet. Nous retiendrons qu'un signe n'est pas l'objet. Il ne peut que représenter l'objet. Il peut exprimer quelque chose à propos de l'objet, ce quelque chose dépendant des connaissances de l'interprète. De plus un interprétant peut devenir à son tour un *representamen* qui crée un nouvel interprétant. Un signe génère donc d'autres signes et d'autres interprétants. Le processus de pensée est donc toujours enrichi et théoriquement inachevé.

Ce concept de signes est essentiel dans la théorie de la médiation sémiotique :

> « *Adopter une perspective sémiotique suppose d'interpréter l'enseignement et l'apprentissage en reconnaissant le rôle central des signes, à la fois comme produits et moyens de constructions de savoir.* » (Mariotti & Maracci, 2010, p. 92)

Une situation d'apprentissage sera théoriquement intéressante, quand elle aura un potentiel sémiotique, c'est-à-dire quand il sera possible de s'appuyer sur des significations personnelles (des productions - constructions de signes par les élèves) pour arriver à des significations mathématiques (des signes mathématiques).

Un rôle essentiel de l'enseignant, mis en avant, est donc d'orchestrer sans « assister » les genèses instrumentales :

> « *Les genèses instrumentales sont liées aux classes de situations auxquelles les sujets ont régulièrement affaire aussi bien dans la vie quotidienne qu'à l'école ou au travail. Elles permettent aux sujets de produire les moyens de ses actions et de son activité dans la diversité des situations qu'il rencontre et en fonction des spécificités et des régularités propres à chaque classe de situation.* » (Rabardel, 1999, p. 283)

Pour Mariotti & Maracci (2010), cette compétence professionnelle est susceptible d'être atteinte si le professeur inscrit son action dans un processus qui met en œuvre plusieurs schèmes, en particulier :

- Le schème de retour sur tâche qui s'exerce dans des situations visant à produire des signes liés à l'utilisation de l'artefact.

▪ Le schème de focalisation qui correspond aux situations où il s'agit de sélectionner les aspects pertinents des significations partagées du point de vue du développement mathématique.

▪ Le schème de demande de synthèse qui « *correspond à un moment où la discussion a fait émerger des signes stables et partagés, concernant les aspects clefs de l'expérience commune avec l'artefact, et qu'il faut généraliser et décontextualiser.* » (Mariotti & Maracci, 2010, p. 101)

Cette analyse du rôle du professeur permet de clarifier ce qui est en jeu pendant les différentes phases de la situation d'apprentissage. Concernant l'orchestration de la discussion en classe, dans le cadre de la théorie de la médiation sémiotique, le grain d'analyse est assez fin, car on va chercher à analyser les signes produits, les signes partagés et les signes mathématiques sachant que ce qui est produit l'est dans l'action. L'enseignant ne peut pas concevoir complètement, *a priori*, la transformation des toutes les connaissances en savoirs mathématiques. Certaines décisions, sont des combinaisons d'intentions didactiques préalables avec des éléments imprévus, émergents du développement de la discussion entre élèves et enseignant. L'enjeu ici d'une analyse *a priori* de la situation sera de dégager les techniques mises en œuvre et de saisir les signes produits, sous forme de gestes,de mots, d'écritures mathématiques qui participent au fondement de la technologie associée à la technique. C'est pourquoi nous allons analyser, dans le paragraphe suivant, la nature de l'artefact choisi, le milieu d'apprentissage qui a été envisagé pour déclencher des schèmes d'utilisation, et les tâches à réaliser entre pairs, ainsi que les schèmes propres à l'enseignant (schème de retour sur tâche et schème de focalisation).

Analyse *a priori* de la situation utilisant une règle cassée

Enjeux de la situation et choix de l'artefact

L'idée est d'utiliser un objet qui permet « d'attraper » la notion d'écart entre deux nombres, de distance entre deux points dans le cadre de la mesure. Mais l'objet auquel nous pensons, contrairement à la règle usuelle, ne doit pas permettre la lecture immédiate de la longueur. Pour empêcher cette lecture, nous avons pensé à couper les deux extrémités d'une règle d'où la terminologie « règle cassée ». Pour des raisons pratiques, nous nous sommes procuré des rubans en papier gradués sur une face en cm et mm et sur l'autre face en pouces et en dixièmes de pouces (1 pouce = 2,54 cm).

Nous avons pris en compte trois nombres x, y et u pour couper les rubans de couturière. Ces variables didactiques sont les suivantes : x et y correspondent au premier et au dernier nombre entier que l'on peut lire respectivement à gauche et à droite de la règle, u correspond à l'unité de mesure choisie pour graduer la règle. En fonction des valeurs prises par ces nombres, certaines techniques vont apparaître plus spontanément que d'autres.

En effet, nous pouvons identifier les procédures décrites ci-après, en fonction des valeurs prises par les variables x, y et u.

Pour x :

▪ Si x vaut 10 : les élèves peuvent spontanément « enlever » 10 et risquent d'occulter le problème initial, comment mesurer avec une règle cassée dans le cas général ?

▪ Si x vaut 8 ou 9 : un élève qui trouverait que le segment mesure 12 cm au lieu de 4 cm (écart de 8) peut se rendre compte de son erreur s'il a l'habitude d'estimer des longueurs en centimètres. Cette valeur de x facilite les rétroactions avec le milieu. La remarque est du même ordre lorsque x est un grand nombre.

▪ Si x vaut 2 ou 3, certains élèves auront plus de dificultés à contrôler leurs résultats.

▪ Si x est proche de zéro : les élèves qui ne tiendraient pas compte de x ne verraient pas forcément leur(s) erreur(s).

Pour u :

Le choix de l'unité, u, a aussi son importance. Nous avons choisi le centimètre. Nous aurions pu prendre pour unité le millimètre. La technique qui consiste à compter de « un » en « un » pour chercher la longueur du segment est alors moins naturelle et moins opérationnelle. On ne peut pas, matériellement, énumérer un nombre en associant le geste de pointer. De surcroît, on « tombe » très vite sur des grands nombres. Nous avons aussi décidé de ne pas effacer la face graduée de la règle en pouces pour préserver à cet artefact, son statut d'objet courant, et voir si les élèves repèrent la face qui correspond à une graduation en centimètres.

Pour y :

Sur le bord droit de la règle, nous pensons que y n'a pas une grande importance pour l'activité de mesurage, mais pour que la règle cassée ressemble à une règle, nous avons en fonction de x ajusté y pour obtenir une règle dans tous les cas d'environ 30 cm.

Suite à cette discussion suivant les valeurs de x, u et y, nous avons choisi de casser les règles afin qu'elles mesurent environ 30 cm et qu'elles commencent aux environs des graduations 2, 3, 8 ou 9. Nous présentons maintenant la situation de mesurage envisagée avec l'artefact règle cassée afin de motiver et de mettre en jeu la notion d'écart entre deux nombres, et la notion de distance entre deux points.

Présentation de la situation d'apprentissage

La situation est découpée en quatre phases.

- La première phase est une phase de présentation où l'enseignant distribue à chaque élève une règle cassée et où il attend des commentaires. L'objectif est d'arriver collectivement à mentionner trois caractéristiques de la règle cassée :

▪ C'est une règle.

▪ Elle ne commence pas par une graduation notée zéro.

▪ Elle est graduée sur une face en centimètres et sur l'autre en pouces.

- Vient ensuite une deuxième phase où l'enseignant distribue une feuille sur laquelle sont représentés trois segments. Il s'agit de mesurer chacun d'eux en centimètres en se servant de la règle cassée et d'écrire le résultat. L'objectif est de permettre à chaque élève de rechercher une technique de mesurage, éventuellement d'en changer car, au total, il y a trois mesures à effectuer.

- Une activité de groupe est alors proposée. Elle consiste à renseigner un tableau (Annexe 2) pour répertorier les mesures trouvées par chacun. Devant la pluralité des réponses, il est demandé aux élèves d'échanger, de communiquer leurs techniques et de se mettre d'accord pour donner la mesure des segments *a*, *b* et *c* en centimètres. L'objectif de cette phase est de confronter les techniques, éventuellement d'arriver à les valider ou les invalider. Il s'agit aussi de faire émerger toutes les significations personnelles au sein du groupe et d'élaborer une construction conjointe de signes partagés. Cette étape, qui n'est pas une activité individuelle, permettra à chacun de réfléchir sur sa propre expérience avec l'artefact et de comparer plusieurs utilisations différentes de la même règle cassée.

- La dernière et quatrième phase, la phase de synthèse, « la discussion de classe » pour reprendre les termes de Mariotti et Maracci (2010), a pour objectif de soutenir l'évolution de ces signes partagés vers des signes mathématiques. L'enseignant reprendra une à une les techniques en explicitant leur domaine de validité. Nous pensons entre autres à l'émergence de certaines d'entre elles que nous présentons dans le paragraphe suivant.

Techniques envisagées *a priori* pour mesurer avec une règle cassée

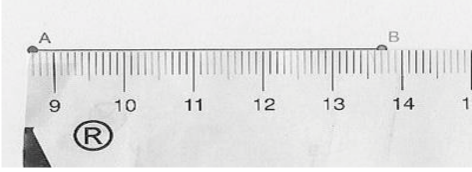
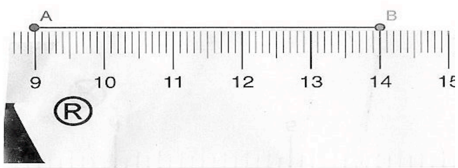
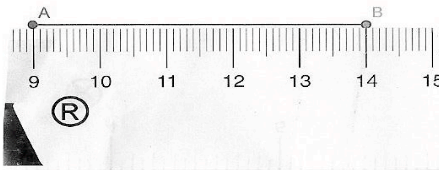
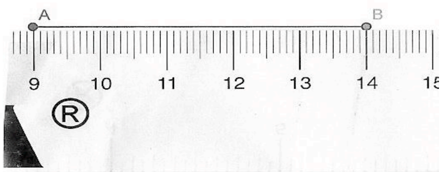
	L'élève pose le bord gauche de sa règle sur l'extrémité du segment. Il en déduit sans tenir compte de la valeur de la graduation correspondant au point A que le segment mesure 13 cm et 7 mm.
	L'élève pose le bord de sa règle pour faire coïncider le point A à la graduation 9. Il en déduit sans tenir compte du fait qu'il n'est pas placé à « zéro » que le segment mesure 14 cm.
	L'élève pose le bord de sa règle pour faire coïncider le point A à la graduation 9, puis il compte de un en un, en s'aidant éventuellement de ses doigts, le nombre de centimètres et trouve 5 cm.
	L'élève pose le bord de sa règle pour faire coïncider le point A à la graduation 9, puis il lit le nombre qui correspond à la graduation B pour en déduire directement que le segment mesure 14 cm – 9 cm.

Figure 2 – Techniques de mesurage avec une règle cassée

Seules les deux dernières techniques vont permettre de trouver une mesure correcte. La première s'appuie sur le dénombrement et le fait que la distance qui sépare deux nombres entiers, ici (choix de la graduation) est de 1 centimètre. L'autre s'appuie sur la notion de distance entre les points A et B. Si on place sur la droite (AB) le point O, point origine qui correspond à la graduation 0, on a : AB = OB – OA, soit le segment [AB] qui mesure 5 cm (14 – 9 = 5). Une troisième technique que nous n'avons pas mentionnée, car elle est dérivée de la deuxième, consiste à faire coïncider le point A à la graduation 10, ce qui permet de calculer mentalement, en soustrayant 10, la mesure du segment. Nous faisons l'hypothèse que les élèves élimineront les trois premières techniques qui ne sont pas valides. En effet, le milieu permet, comme nous allons le voir, de contrôler les résultats produits.

Moyens de contrôle et de validation des techniques

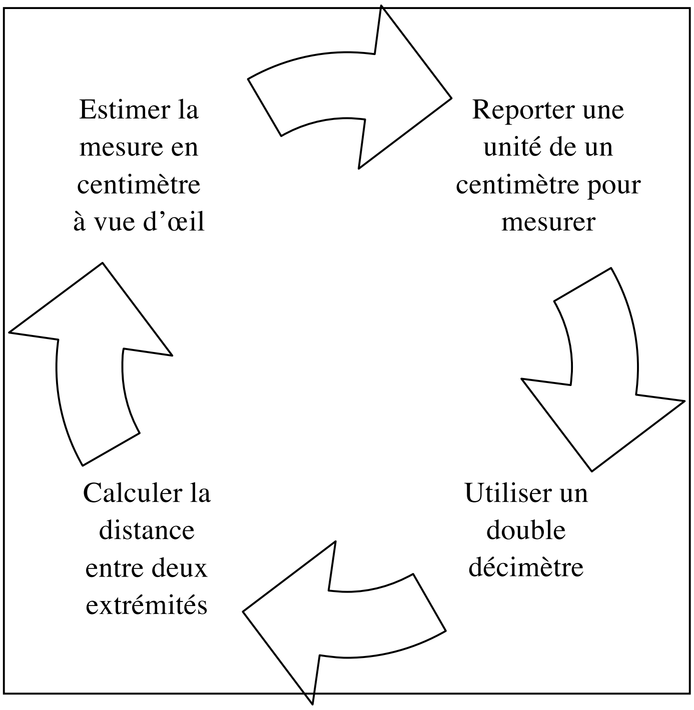


Figure 3 – Différents moyens pour contrôler et valider les résultats obtenus en mesurant avec une règle cassée

Contrôler en estimant, est une activité de l'élève qu'on retrouve, *a priori*, pendant la phase de recherche, les échanges entre pairs et la phase de synthèse. En effet, avant même d'avoir reçu la feuille où sont tracés les segments, les élèves ont tous constaté qu'il n'y a pas la graduation zéro sur leur règle cassée. Si certains choisissent de faire comme s'il elle y était, et mesurent comme s'ils avaient un double décimètre, quand leur règle est cassée aux alentours de 8 ou 9, ils obtiendront un résultat invraisemblable.

Un moyen de validation perceptive est alors d'estimer à vue d'œil la longueur de chaque segment en centimètre. Nous avons justement choisi les règles cassées et les longueurs des segments afin de rendre le milieu rétroactif. Cette action de contrôler est d'ailleurs omniprésente dans la séance car le fait que la règle ait deux faces, l'une graduée en centimètres et l'autre en pouces, incite aussi à distinguer « la taille » d'un centimètre de celle « d'un pouce ».

Pour valider les techniques, nous n'avons pas autorisé l'usage de la règle graduée. Cela n'interdit pas la possibilité de l'utiliser en fin de séance. Au cours des échanges, en explicitant la technique qui consiste à dénombrer les unités, on peut considérer qu'on reporte un segment unité de 1 cm si on explicite le fait qu'entre deux « grandes » graduations de la règle cassée, on retrouve toujours un centimètre. La dernière validation, celle qui consiste à entériner le fait qu'on peut mesurer le segment [AB] en effectuant une soustraction (AB = OB − OA) peut être obtenue en superposant une règle cassée sur une règle non cassée.

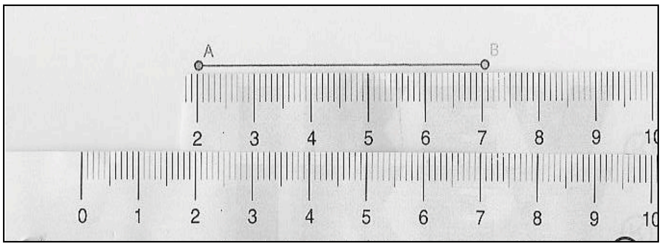


Figure 4 – Lecture de la mesure du segment [AB]
avec conjointement une règle cassée et une règle non cassée

En se référant à la règle non cassée on peut lire que le segment [AB] ne mesure pas 7 cm mais 5 cm car on enlève les deux centimètres « en trop » qui correspondent à la mesure du segment [OA]. O étant le point d'abscisse zéro.

Significations collectives et significations mathématiques

Dans les deux dernières phases de la séance, les élèves vont exposer les techniques qu'ils ont mises en œuvre, face à un groupe restreint de camarades puis face à la classe entière.

- Pour expliquer

Pour expliquer comment ils ont posé la règle cassée sur le segment, referont-ils la manipulation ? Associeront-ils à chaque geste, des commentaires ? Parleront-ils de bords, de bouts, de traits, d'intervalle,…., de nombres ? Dans le cas présent, nous pensons que l'enseignant amènera deux termes spécifiques, le terme de graduation et le terme d'extrémités. Sans ces deux termes, il est difficile de concevoir l'écart entre deux nombres et la distance entre deux points.

- Pour dénombrer

Se contenteront-ils de réciter les nombres ? Associeront-ils un mot nombre à chaque graduation ou chaque intervalle en les désignant du doigt ? L'enseignant, pour arriver à valider la technique, doit *a priori* faire verbaliser que l'intervalle entre deux « grandes » graduations consécutives mesure toujours un centimètre. Un étayage mathématique est utile pour expliquer en quoi l'action de compter ici permet de mesurer.

- Pour calculer

Diront-ils simplement que le segment mesure 7 – 2 ? 7 – 2 cm ? Ajouteront-ils qu'il y a 2 centimètres en trop, ou que l'écart entre 7 et 2 vaut 5 ? L'enseignant peut rendre visible cette technique en superposant, par exemple, la règle cassée et la règle non cassée comme nous l'avons fait au paragraphe précédent. Il peut matérialiser cet écart avec un geste, en dessinant un bond qui permet de passer de 2 à 7.

L'analyse *a priori*, montre que les significations mathématiques que l'enseignant veut atteindre passent par certains mots clefs et manipulations spécifiques au contenu mathématique et à la situation. La situation est potentiellement adaptée pour la notion d'écart.

Expérimentation de la situation « règle cassée » et analyse

Présentation de la classe et du projet d'enseignement

La classe de CE2 dans laquelle nous avons expérimenté cette situation de la règle cassée est celle dans laquelle nous avions, début janvier, fait passer un test en calcul soustractif.

Avant de proposer la situation basée sur l'utilisation de la règle cassée, nous avons conçu puis observé, filmé et analysé plusieurs séances permettant de recueillir un éventail de techniques et leurs technologies associées pour effectuer mentalement les calculs du type :

$67 - 1 =$ $48 - 10 =$ $198 - 8 =$ $197 - 30 =$ $93 - 5 =$

Les dernières séances avaient pour objectif de sensibiliser l'ensemble des élèves, à la technique basée sur le passage à la dizaine inférieure. Technique que seul un élève utilisait spontanément et correctement pour effectuer $93 - 5$. Cette séance fut entre autres l'occasion de représenter les nombres sur un axe, de symboliser l'action de retirer par une flèche et de décomposer le calcul initial en calculs intermédiaires ($93 - 3$ et $90 - 2$) afin de trouver la solution. Cette étape dans la progression nous semble importante, car elle met l'accent sur deux ancrages différents : le premier basé sur la représentation des nombres sur un axe, et le second basé sur les écritures numériques pour effectuer et justifier mathématiquement la technique qui consiste à passer par la dizaine inférieure. Nous retrouvons justement ces deux ancrages pour introduire et utiliser la propriété de conservation des écarts.

Analyse des techniques mises en œuvre pour mesurer avec une règle cassée

La phase de présentation du problème (3 min 40s) s'est passée comme prévu dans le scénario. La maîtresse, après avoir distribué une règle cassée à chacun, a demandé à l'ensemble des élèves ce qu'ils remarquaient :

> M : *Quelque chose de particulier à dire à propos de cette règle ?*

Les élèves ont remarqué qu'ils manquaient le zéro (transcription d'élèves), d'autres nombres comme le 1, le 2, que la règle commençait à 5, …, qu'elle n'était pas entière. L'enseignante a acquiescé à chaque nouvelle suggestion puis insisté sur le fait que personne n'avait de règle sur laquelle était noté le zéro. Idée qu'elle a reprise juste avant de donner la consigne :

> M : *Vous avez une règle comme cela, sans le zéro. Il faut mesurer ce segment, ce segment et ce segment.*

Cette phrase a une valeur locutoire (l'information apportée), illocutoire (l'enseignante dit les choses en y mettant le « ton ») et une valeur perlocutoire d'après Sensevy (2007). Elle suggère le fait qu'il ne faut pas mesurer de la même manière qu'avec une règle usuelle graduée. Elle a certainement produit des effets sur certains élèves. Sans cette phrase, le jeu d'apprentissage aurait été différent. Moins d'élèves se seraient certainement questionnés et auraient cherché une nouvelle technique pendant la phase de recherche qui a duré environ 5 minutes. En effet, en analysant les productions des 21 élèves, nous constatons que :

- Sur 9 productions : les trois mesures sont exactes. On lit « 5 cm, 3 cm et 8 cm ». L'unité est indiquée.

▪ Sur une production, les trois mesures sont incorrectes car exprimées en pouce. L'élève n'a pas utilisé le bon côté de la règle.

▪ Sur 7 productions : les trois nombres sont obtenus grâce à une simple lecture. Les élèves ne prennent pas en compte le fait que la règle ne commence pas à zéro.

▪ Sur 4 productions : les mesures sont inexactes. Il n'est pas possible de savoir sans informations complémentaires comment l'élève a procédé.

Au regard de ces résultats, on a donc deux tiers des élèves qui ont cherché une technique prenant en compte le fait que la règle est cassée. Le travail de groupe qui a suivi va permettre de repérer éventuellement quels sont les élèves qui ont contrôlé leurs résultats et sont capables d'expliquer aux autres, avec des gestes et des mots, la technique qu'ils ont mise en œuvre pour mesurer les segments.

Analyse des technologies associées aux techniques

Pour conduire cette analyse, nous nous référons au travail d'un groupe, que nous avons filmé. Les dialogues sont retranscrits en Annexe 1. Dès le début des échanges, on observe l'investissement de Thibault. Il est convaincu de la justesse de ses résultats. Il prend le premier la parole, et explique comment il a procédé. Il essaye de convaincre Benoit et lui indique le principe de sa technique

T : *Là, Benoit tu aurais du faire le zéro.*

Sur ce, intervient Kylian. Il a recherché un zéro où il y en avait, c'est-à-dire sur l'autre face de l'objet règle. Il se qualifie lui-même de malin car il a contourné la difficulté. L'argument que lui renvoient ses camarades est implacable:

E : *Les centimètres ne sont pas aussi grands.*

Thibault ré-explique sa technique en associant la récitation de la comptine à un pointage de graduation en graduation sur la face de la règle graduée en centimètres.

Benoît est alors convaincu et le reconnaît :

B : *Oui, tu as le droit d'inventer cela.*

Thibaut l'invite alors à appliquer lui-même sa technique, technique faible, car l'élève a mis en place un comptage associé au geste mais sans arriver à justifier « mathématiquement » ce qu'il fait. Thalia entre indirectement en scène et montre qu'elle aussi est en train de mal tenir sa règle ou d'appliquer la façon de faire de Kylian. Benoit reprend l'argument lié au choix des unités : « *Tu as déjà vu des centimètres gros comme cela* ». Antony, sollicité par Thibault, intervient à son tour et dévoile sa technique qui consiste à faire comme si la règle n'était pas cassée. Elle ne sera pas invalidée par les autres élèves du groupe. Là, l'observateur intervient dans le but d'amener Thibault et Benoit à ré-expliquer leur technique. Sur ce, Benoît propose une autre formulation qui consiste à calculer :

B : *Tu as 7 mais comme elle commence par 2 tu fais moins 2.*

Ce discours ne peut pas encore être qualifié de technologie. En considérant le qualificatif introduit par Assude et Mercier (2007), cette technique pourrait être qualifiée « d'invisible » car « *7−2* » peut apparaître comme un simple résultat. Il manque la notion mathématique de distance entre deux points, d'écart entre deux nombres, comme éclairage théorique pour doter cette technique d'une technologie.

Pour finir, Thibault relance ses camarades Kylian et Antony. L'observateur invite les élèves à conclure et plus particulièrement Thibault à rendre compte au groupe classe de leurs échanges.

Nous aboutissons aux conclusions suivantes :

- Une erreur portant sur le choix de l'unité (pouce au lieu de centimètre) a été rectifiée, prouvant que certains élèves savent estimer à quelle grandeur correspond un centimètre.
- Une technique non adaptée, celle qui consiste à faire comme si la règle n'était pas cassée, a été proposée mais aucun élève du groupe n'a cherché à la réfuter. Peut-être parce qu'il allait de soi qu'elle ne convenait pas puisqu'elle avait été présentée après une technique validée par au moins deux élèves et qui donnait des résultats numériques différents.
- Deux techniques pertinentes, pour mesurer un segment avec une règle cassée, sont ressorties, mais nous les avons qualifiés de « faible » et « d'invisible » au regard du discours prononcé par les élèves et des gestes. La première consistant à compter de un en un les unités situées entre a et b. La seconde consistant à calculer directement « $b - a$ ».

Analyse de significations mathématiques émergentes en fin de séance

Pour analyser s'il y a émergence de signes mathématiques à partir des significations personnelles des élèves, commençons par reprendre le dialogue entre l'enseignante et Thibault face au groupe classe :

> M : *Voilà par exemple si on te demande de mesurer le a.*
>
> M : *On met le 8 et la fin du segment s'arrête sur le 13. Il y en a, qui avaient écrit 13 centimètres. Et il est où le problème ?*
>
> T : *Ce n'est pas ça.*
>
> M : *Qu'est-ce que tu comptes toi ?*
>
> T : *Les carreaux.*
>
> M : *Pas les carreaux, les intervalles.*
>
> T : *Les cases.*
>
> M : *Vas-y.*
>
> T : *1, 2, 3, 4, 5.*

Ce dialogue commence par le rappel d'un consensus gestuel.

Les termes employés par l'enseignante « *fin*, *s'arrête* » laissent entendre qu'il y a « *un début* » et qu'on « *commence par* ». Les notions d'extrémités et de graduations sont présentes, dans un registre externe aux mathématiques.

L'élève va ensuite compter. Sans la question de l'enseignante, il n'aurait pas explicité la nature de ce qu'il compte. Il sait pourtant qu'il compte « *des carreaux* », « *des cases* ». La maîtresse valide la technique (on pourrait aussi soumettre cette technique à validation au reste de la classe), mais préfère dire à l'élève qu'il compte « *des intervalles* ».

Élève et enseignant se sont-ils vraiment accordés sur une signification mathématique ? Celle-ci est-elle assez précise ? Certes, on compte des intervalles, mais ceux-ci ont tous la même longueur : il s'agit en fait de la mesure unité. Ce terme « *unité* » est absent, ainsi qu'une étape qui aurait pu consister à dire que le segment mesure 5 centimètres puisqu'on a compté cinq unités de un centimètre.

Regardons maintenant un autre dialogue, toujours extrait de la phase de synthèse, dialogue entre l'enseignante et Benoît :

> B : *En fait, moi au lieu de faire le zéro, c'est le deux, j'ai mesuré et après j'ai fait moins deux.*
>
> M : *Tu as mesuré ?*
>
> B : *Il y a un 7. Là il y a un 2 donc dans ma tête je fais 7 – 2.*
>
> M : *7 – 2 et je trouve 5. 7 – 2 c'est bien l'intervalle qu'il y a entre les deux nombres.*

L'élève explique qu'il n'a pas utilisé la même technique que son camarade. Contrairement à lui, il *« fait moins deux »*, il pose mentalement une soustraction.

La maîtresse réapplique la technique, refait les calculs de Benoît et ajoute que le résultat de l'opération correspond à *« l'intervalle qu'il y a entre les deux nombres »*. Un intervalle n'est pas un nombre. Une autre formulation aurait pu se baser sur la phrase suivante : « L'écart entre les deux nombres 2 et 7 correspond à la différence 7 – 2 ». Nous pouvons faire l'hypothèse qu'un enrichissement du vocabulaire et de la manipulation[8] aurait pu rendre la technique de Benoît visible.

En conclusion, nous pouvons avancer que :

- L'enseignante a incité les élèves à produire plus de signes liés à l'utilisation de l'artefact qu'ils ne le faisaient spontanément. Les questions posées permettent d'associer des termes à des actions.
- L'enseignante a su sélectionner des aspects pertinents de significations partagées du point de vue du développement mathématique (schème de focalisation), pour la technique qui consiste à compter le nombre d'unités même si le vocabulaire employé n'a pas forcément été assez riche[9].
- Pour la technique consistant à soustraire, celle-ci n'a pas été débattue.

Conclusion et perspectives

La séance « règle cassée » et la soustraction posée

La séance que nous avons analysée a pour objectif d'introduire la notion d'écart, dans le domaine de la mesure. Elle permet en prolongement de découvrir la propriété de conservation des écarts par translation, l'idée étant de translater une bandelette sur un axe

---

[8] Manipulation proposée dans la troisième partie, dans le paragraphe concernant les moyens de validation et de contrôle des techniques.

[9] Nous revenons sur cette analyse au paragraphe suivant en explicitant les conditions d'appropriation du scénario par l'enseignante.

gradué et de déterminer sa mesure à partir de « plusieurs endroits » de la règle. À chaque « endroit x » la bandelette a une extrémité qui correspond au nombre a_x et une extrémité qui correspond au nombre b_x. L'écart entre a_x et b_x est la différence entre b_x et a_x, $b_x > a_x$. Reste ensuite à utiliser les résultats obtenus aux différents endroits en mesurant, pour formuler dans le registre de la langue et le registre des égalités numériques la propriété de conservation des écarts :

La différence ne change pas si on ajoute à chaque terme le même nombre.

Sans présenter dans cet article l'analyse *a priori* de la séance 2 « Translation de la bandelette », nous pouvons cependant, en utilisant le cadre de la médiation sémiotique, évoquer là encore la responsabilité de l'enseignant quand il s'agit « d'orchestrer les genèses instrumentales sans les assister » (Mariotti & Maracci, 2010, p. 95). En effet, la majorité des élèves parviendra certainement à mesurer la bandelette, car il s'agit de réinvestir une technique apprise récemment (en utilisant la bande cassée). En revanche, l'écriture du calcul soustractif correspondant (signe mathématique) ne se fera pas spontanément. De même, concevoir et exprimer le fait que la bandelette ne change pas, que sa « longueur est la même », est un signe attendu, alors que réécrire le calcul de la mesure en utilisant d'autres nombres nécessite de « fréquenter » le registre des écritures mathématiques. En conclusion, l'utilisation de la bande permet de mobiliser et de visualiser la propriété de la conservation, et la présence dans la classe d'un enseignant « médiateur sémiotique » permet de la formuler à l'oral et à l'écrit pendant les phases de mise en commun et d'institutionnalisation.

La troisième séance, qui consiste à donner du sens aux retenues, n'a rien d'immédiat, car on « raisonne » directement sur les nombres. C'est celle qui permettra d'expliciter l'utilisation de la propriété des écarts dans un calcul soustractif posé effectué par la technique de compensation. En effet, quand on veut calculer la différence de 275 et 38, posée en colonne :

$$\begin{array}{rccc} & 2 & 7 & 5 \\ - & & 3 & 8 \\ \hline \end{array}$$

On calcule en fait la diférence de 285 et 48 car la diférence ne change pas si on ajoute dix à 275 et dix à 38.

Une autre étape d'explicitation mérite d'être menée en classe pour justifier pourquoi dans la manière usuelle de poser la soustraction, nous ajoutons dix unités à 285 et nous ajoutons une dizaine à 38. Cette étape est clairement nécessaire.

La séance « règle cassée » et la notion d'écart

La séance « règle cassée », que nous avons conçue pour répondre en partie au questionnement suivant « Quelle(s) sont les potentialités des situation(s) pour favoriser le lien entre la différence de deux nombres et l'écart entre ces deux nombres de façon à permettre un outillage technologique de la technique de soustraction posée par compensation ? », permet de mettre en avant plusieurs résultats.

Le premier concerne la notion d'écart en elle-même, et montre à quel point il est difficile de « penser » le calcul de $a - b$ quand on a à mesurer un segment dont les extrémités ont pour abscisses a et b. Seul un élève dans cette classe de CE2 a « calculé dans sa tête ».

Cela renforce la nécessité de confronter les élèves à un type de problème qui va leur permettre de dépasser à terme leurs connaissances initiales pour découvrir d'autres techniques de mesurage (basées sur le calcul) et approfondir une notion mathématique (celle d'écart). Le fait d'introduire un artefact, la règle cassée, a permis de mettre en avant différentes techniques de mesurage. Quand celles-ci ne sont pas adaptées et qu'elles consistent simplement à lire le nombre situé au-dessus de l'extrémité droite de la règle, le milieu permet d'invalider le résultat d'une mesure invraisemblable. La technique consistant à dénombrer de un en un chaque unité, est accessible, pour tous les élèves ; technique plébiscitée mais facilement mise à mal, quand il s'agira de passer à une représentation des nombres sur la droite numérique, avec obligation de calculer l'écart, par exemple, entre 13 et 145.

Un second résultat, qui ressort de l'expérimentation, est le rôle essentiel du milieu, en particulier lorsque les élèves, par groupe, ont renseigné un tableau puis harmonisé leurs résultats. Ce milieu s'est avéré favorable pour valider les techniques, comparer leurs coûts et justifier le fait que les mesures des segments sont égales quelle que soit la règle cassée utilisée.

La séance « règle cassée » et son appropriation par l'enseignant

Au niveau de la médiation sémiotique, il est toujours difficile de produire des signes mathématiques, même lorsqu'une hiérarchisation des techniques et une explicitation de notions et propriétés en jeu sont réalisées. L'enjeu prépondérant pour l'enseignant est que chaque élève soit capable de savoir utiliser la règle cassée pour mesurer un segment à la fin de cette séance. L'enjeu de la situation est de dépasser cette capacité pour établir le lien entre la notion d'écart dans le cadre de la mesure et le calcul d'une différence : celui-ci nécessite un temps plus long, car la construction de signes mathématiques le requiert.

Par ailleurs, l'appropriation d'une situation nouvelle pour l'enseignant nécessite des ajustements au-delà des choix réalisés *a priori*, ne serait-ce que de par les caractéristiques de la classe (mode de fonctionnement, spécificités des élèves etc.).

La séance « règle cassée » et la poursuite du travail de recherche

Nous avons analysé les potentialités de la situation pour introduire la notion d'écart dans le cadre de la mesure. Nous allons poursuivre le travail engagé avec l'enseignante, afin de proposer aux élèves une situation aboutie et complète, et d'approfondir la construction de signes mathématiques. La robustesse de cette situation et de l'ensemble du projet sur l'enseignement du calcul soustractif sera testée sur plusieurs classes avec différents enseignants. Il sera par ailleurs nécessaire d'identifier les caractéristiques nécessaires à la transmission de ce type de situations à d'autres enseignants (par exemple, sur la conduite de classe et l'exploitation des discussions de classe), en particulier si la construction de signes mathématiques demeure un objet central à notre étude. En effet, le travail autour du potentiel sémiotique d'un artefact est nécessaire et l'artéfact lui-même représente une ressource pour l'action didactique du professeur (Gueudet & Trouche, 2010, chapitre 3). Enfin, en dehors de la théorie de la médiation sémiotique, le travail sur « la technologie », s'il est adapté aux connaissances et compétences des élèves de primaire, peut permettre de questionner les techniques et d'apprendre à contrôler leur utilisation. En ce sens, il ne peut qu'enrichir le quotidien de la classe et renforcer l'intérêt des élèves pour le calcul.

Bibliographie

ARTIGUE M. (2005) *L'intelligence du calcul, le calcul sous toutes ses formes*. Actes de l'Université d'été de Saint-Flour, Académie de Clermont-Ferrand, Ressources en ligne.

ASSUDE T. & MERCIER A. (2007) L'action conjointe professeur-élèves dans un système didactique orienté vers les mathématiques. In G. Sensevy et A. Mercier (Eds) *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*, pp. 153-185. Presses Universitaires de Rennes.

CHEVALLARD Y. (2002) Organiser l'étude. Structures & fonctions. *Actes de la XI^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 3-33, Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

COULANGE L. & GRUGEON B. (2008) Pratique enseignante et transmissions de situations d'enseignement en algèbre. *Petit x,* n°78, 5-25.

DUVAL R. (2006) Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensées en mathématiques. *Actes du 32ième colloque sur la formation des maîtres*, pp. 67- 89.

GUINET R. (1978) Histoires des techniques opératoires. *Grand N,* n° 14, 53-68.

LEPOCHE G. & BUENO-RAVEL L. (2011) Situations de « référence » pour enseigner le numérique au cycle 2. *Actes du XXXVIIIème colloque de la COPIRELEM*. Dijon.

MARIOTTI M. & MARACCI M. (2010) Un artefact comme instrument de médiation sémantique : une ressource pour le professeur. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds) *Ressources vives – Le travail documentaire des professeurs*, pp. 91-107, PUR.

PEIRCE C. (1978) *Écrits sur le signe*. Éditions du Seuil, Paris.

MAUREL M. & SACKUR C. (2010) Il ne faut pas désarticuler un nombre - Mise en œuvre du dispositif CESAME en primaire. *Grand N*, n° 85, 43-59.

RABARDEL P. (1999) Le langage comme instrument ? Éléments pour une théorie instrumentale étendue. In Y Clot (Ed) *Avec Vygotski*, pp. 265-289, Paris : La dispute.

VERGNAUD G. (1990) Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. *Petit x,* n°22, 51-69.

SENSEVY G. & MERCIER A. (2007) *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves.* Rennes : Presse Universitaire de Rennes.

Manuels scolaires

Euro Maths CE2 (2010) Manuel de l'élève et livre du professeur. Paris : Hatier.

J'apprends les maths CE2 (2003) Fichier de l'élève et livre du maître. Paris : Retz.

J'apprends les maths CE2 (2010) Fichier de l'élève et livre du maître. Paris : Retz.

ERMEL CE2 (2006) Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Paris : Hatier.

Programmes

Bulletin officiel n°3 du 19 juin 2008. Numéro hors-série.

Le socle commun des connaissances et des compétences, Décret du 11 juillet 2006.

Annexe 1

<u>Exercice 1</u> : Qu'est-ce qu'une soustraction ?

<u>Exercice 2 :</u> Calcule

53 – 10 =

47 – 13 =

13 – 7 =

21 – 3 =

31 – 29 =

<u>Exercice 3 :</u> Calcule

$$\begin{array}{r} 5\ 7 \\ -\ 2\ 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4\ 3 \\ -\ 1\ 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7\ 4 \\ -\ 2\ 7 \\ \hline \end{array}$$

Annexe 2

Tableau à renseigner par groupe

	Mesure de *a* en cm	**Mesure de *b* en cm**	**Mesure de *c* en cm**
……………….....			
………………			
………………			
………………			
………………			
………………			

En lisant les résultats notés dans le tableau, êtes-vous d'accord ?

Après discussion, quelle mesure en centimètres donnez-vous au segment *a*, au segment *b* et au segment *c* ?

Le segment *a* mesure…….centimètres

Le segment *b* mesure…….centimètres

Le segment *c* mesure…….centimètres

Annexe 3

Confrontation des résultats et des techniques au sein d'un groupe (environ 5 min).

Thibault : Il faut faire là 0 (*il tient sa règle à deux mains et montre l'extrémité qui correspond à 2*), comme ça, là on trouve 5, 3 et 8 (*il montre un à un, les segments qu'il a mesurés sur sa feuille*). *Benoît est penché sur Thibault et l'observe.*

Thibault : Là Benoît tu aurais du faire 0.

Kylian : Prends une règle. Le 0, il est là. Tout au début. Kylian, il l'a trouvé tout au début.

Benoît : Montre à Kylian l'extrémité : ça en centimètres, ça commence par 2.

Thibault : Mais Kylian, il ne fait que des bêtises, là c'est 0.

Benoît : Mais tu crois que quand tu comptes, ça commence par 2 ? 2, 3, 4, 5 et 6.

Kylian : Benoît, regarde, tu tournes ta règle. *Il tourne sa règle. (Thibault et Benoît rigolent).* Benoît, Benoît tu tournes ta règle Tu es plus malin *(les deux enfants rigolent).* Tu tournes ta règle. Tu es plus malin.

Thibault : Moi je suis plus malin, regardez.

Benoît : Ça c'est une fausse règle. Tu as déjà vu des centimètres aussi grands ?

Thibault *rigole de façon ostentatoire.*

Kylian : Ben oui.

Thibault : *Prend sa règle et montre à Benoît en comptant en même temps qu'il pointe un à un les centimètres :* 1, 2, 3, 4, 5.

Benoît : Oui, tu as le droit d'inventer cela ?

Thibault : 6, etc.

Thibault : Donc, Benoît, tu vas faire comme moi.

Kylian : Que Benoît, il a faux.

Benoît compte à son tour sur sa règle de centimètre en centimètre en pointant à chaque fois avec son doigt : 1, 2, 3, 4.

Thibault : Mais Tallia, non Tallia, c'est des centimètres trop grands.

Benoît : Tu as déjà vu des centimètres gros comme cela.

Thibault : Tu as trouvé 5 ?

Antony : Oui, regarde (*il remesure*). J'ai trouvé 7 (*pas très audible mais sur sa feuille on lit 7,2cm).*

Thibault : Non 5.

Observateur : Écoute-le, écoute ce qu'il te dit. C'est intéressant. Explique-lui. Dites-lui tous les deux.

Thibault : En fait Antony.

Benoît qui est juste à côté d'Antony pointe son doigt sur la règle d'Antony, règle qui est bien placée pour mesurer le segment a et dit : le 2 c'est le 0, là c'est 1, là c'est 2 *(en pointant respectivement sur la règle d'Antony le 3, le 4).*

Thibault intervient à son tour et pointe un à un les segments de la feuille d'A: Là, tu as trouvé 5, là tu dois trouver 3 et là 8.

Benoît mesure sur sa propre feuille le segment b avec la technique de Thibault : Là, c'est 1, 2, 3 *et passe au segment c* : 1, 2, 3, 4. Ah non, regardez, c'est très simple. On fait 10 – 2. Par exemple, là, on fait 7 – 2.

Thibault s'adresse à Kylian : Toi, tu as tout faux.

Kylian : Peut-être que non, peut-être que c'est bon.

Thibault : Tu n'as qu'à faire ma méthode.

Thibault : Tallia, là elle va trouver 5, 3 et 8.

Benoît : Là Thibault, c'est encore plus simple. Tu as 7, mais comme elle commence par 2, tu fais moins 2 (*il montre sa règle et fait le geste d'enlever les 2 centimètres*).

Thibault : Antony, tu es d'accord avec moi ?

Observateur : Allez, écrivez les enfants, écris Antony et tu expliqueras après. Parfait les enfants.