

DU COMPTAGE À LA NUMÉRATION

UNE FORMATION SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION

Bernard ANSELMO

IUFM de Lyon Centre de Bourg-en-Bresse, Université Lyon 1

Hélène ZUCCHETTA

IUFM de Lyon Centre de la Croix-Rousse, Université Lyon 1

Cet article présente un dispositif de formation sur l'apprentissage de la numération mis en place dans l'académie de Lyon. Il reprend et précise les grandes lignes du compte-rendu rédigé sur ce thème pour les actes du colloque de la COPIRELEM de Quimper (2012).

Il tente aussi d'exposer les éléments qui, dans la construction de cette formation, contribuent à constituer un dispositif apparemment performant qui semble permettre au participant d'interroger ses pratiques et ses conceptions pour, soit les remettre en cause, soit réaffirmer leur bien fondé.

Quelques repères théoriques

Dès 1984, Bednarz et Janvier ont présenté dans un article de Grand N qui est toujours une référence, les principales difficultés et erreurs liées à l'appropriation de la numération :

- « *difficulté à voir les groupements et leur rôle conventionnel dans l'écriture des nombres ;*
- *difficulté à voir la pertinence de ces groupements ;*
- *difficulté à opérer avec ces groupements ;*
- *difficulté à travailler simultanément avec deux groupements ;*
- *difficulté à interpréter les procédures de calcul en termes de groupement. »*
(Bednarz & Janvier, 1984, p. 30)

Les auteurs ont identifié les aspects de l'enseignement conduisant à ces difficultés : « *On dicte à l'enfant beaucoup de règles ou de procédures qu'il apprend et applique le plus souvent mécaniquement. En conséquence, lorsque l'enfant rencontre l'une des difficultés soulignées précédemment, il est complètement démuné... »* (Ibid.)

À leur suite, Chambris (2008) et Tempier (2010), dans l'étude du concept de numération décimale, ont étudié l'évolution de l'enseignement de la numération au cours du XX^{ème} siècle à partir de différents manuels, des programmes et des évaluations nationales récents. Ils ont montré que l'aspect décimal ou « relations entre les différentes unités » est très peu pris en compte contrairement à un autre aspect de la numération appelé aspect position, c'est-à-dire le lien entre les différentes unités (milliers, centaines, etc.) et le rang dans l'écriture du nombre.

Dans l'introduction de sa thèse, Mounier (2010) reprend ces difficultés et énonce :

« Dans la désignation des nombres, il n'y a pas congruence (au sens de Duval, 2006) entre le registre de l'oral et celui des écritures chiffrées des nombres : on ne peut pas traduire un mot par un chiffre. ... En outre, les problèmes abordés par la suite à l'école mettent en jeu des propriétés de l'écriture chiffrée qui ne se retrouvent pas dans les désignations parlées. C'est le cas des écritures des grands nombres, des opérations posées ou encore de l'extension des entiers aux décimaux. L'écriture chiffrée est donc vecteur de mathématiques spécifiques à apprendre et elle ne peut pas constituer une simple transcription écrite du langage oral. Or, en arrivant au CP, les élèves ont une approche des nombres essentiellement en lien avec leur désignation orale, associée le plus souvent à une activité de dénombrement un par un. ... Comme il semble inévitable de faire une séquence sur les nombres sans les nommer, se pose alors la question de la place des désignations orales dans l'apprentissage de la numération décimale de position : comment en faire une aide et non un obstacle ? » (Mounier, 2010, p. 7)

Aigoïn et Guebourg (2004) ont pointé l'importance de ces difficultés et proposé de travailler la notion de groupements-échanges en début de CP. Elles écrivaient au début de leur article :

« Force est de constater l'existence de difficultés persistantes en lien direct avec la numération, du CP au CM2, malgré les invariables révisions annuelles faisant suite aux apprentissages réalisés au cours du Cycle 2¹ : oubli du zéro terminal ou intermédiaire, difficultés à mettre en relation l'écriture chiffrée des nombres ayant une désignation orale irrégulière (70 à 99) lors d'activités de transcodage du type dictée de nombres, difficultés liées à l'utilisation des grands nombres (coder/décoder), difficultés retrouvées également dans la mise en œuvre des techniques opératoires. La liste n'est pas exhaustive.

Face à ce constat, l'hypothèse est faite que nombre des difficultés rencontrées par les élèves en cycle 3 pourraient être le fruit d'une incompréhension ou d'une compréhension partielle des principes de construction de notre numération. Ainsi, un apprentissage raté ou incomplet concernant le fonctionnement de notre système décimal pourrait être la cause des difficultés de nombreux élèves dès l'école primaire et par la suite au collège. » (Aigoïn & Guebourg, 2004, p. 49)

Le modèle choisi

De notre côté, face à ce même constat, nous faisons l'hypothèse que les enseignants (ou les étudiants de Master enseignement) pourraient avoir automatisé les principes de

¹ Les passages en gras ont été soulignés par nos soins, ils ne le sont pas dans le texte d'origine.

construction de notre numération sans en avoir une réelle compréhension. C'est cette apparente facilité qui conduirait l'enseignant à ne pas prendre la réelle mesure des difficultés des élèves et à brûler des étapes dans le processus d'enseignement en délaissant certaines activités centrales pour l'apprentissage².

Pour travailler cette question, nous avons construit un dispositif de trois heures de formation que nous avons mis en œuvre plusieurs fois, en partie ou en totalité, en formation continue auprès de conseillers pédagogiques ou de professeurs des écoles, dans une formation à l'épreuve orale du concours avec des étudiants. Nous avons proposé ce dispositif également à des formateurs, en atelier, au colloque de la COPIRELEM de 2012. Dans ces différents contextes, la formation proposée a toujours suscité l'intérêt des participants et semble avoir généré des prises de conscience. C'est cette robustesse apparente que nous nous proposons d'analyser dans une étude descriptive du dispositif, précisant les choix faits, *a priori*, lors de sa conception, et leurs effets en formation effective.

Le dispositif ne s'appuie ni sur l'analyse d'autres systèmes de numération utilisés en d'autres temps ou dans d'autres lieux ni sur un système fictif mettant en cohérence des numérations écrite et parlée (voir par exemple Brissiaud (2001) pour des écrits sur ce sujet ou le comptage en japonais ou en espéranto). Nous avons choisi d'utiliser des systèmes complémentaires de numération parlée et écrite, imaginaires et différents des nôtres, mais qui gardent les mêmes logiques de régularités et d'irrégularités que nos systèmes de numération décimale. Nous pensons créer ainsi une situation d'homologie permettant aux étudiants ou aux stagiaires, en vivant des activités de référence tirées de différents manuels de primaire, de prendre conscience, à la fois, des différents aspects de notre numération, des difficultés à surmonter pour pouvoir l'appréhender et de la diversité des processus par lesquels se fait son apprentissage.

Dans le but de pointer les obstacles à l'apprentissage intrinsèques à nos systèmes de numération décimale et d'offrir des pistes d'enseignement, la formation suit dans le système de numération construit pour elle, un modèle de mise en progression des apprentissages qui pourrait être suivi en cycle 1 et 2 :

- mémorisation de la comptine qui détermine l'ordre des « mots-nombres » du système de numération parlée ;
- découverte des écritures symboliques « chiffrées » de ces mots « nombres » et travail sur l'aspect algorithmique de la suite des nombres (repérage des régularités et irrégularités des systèmes écrit et parlé) ;
- découverte de la signification des « chiffres » dans l'écriture des nombres, travail sur l'aspect groupement/échange du système écrit de numération de position ;

² Les programmes 2008 de cycle 2 n'incitent pas non plus à le faire. Ils précisent pour le **CP et le CE1** « Les élèves apprennent la **numération décimale inférieure à 1 000. Ils dénombrent des collections, connaissent la suite des nombres**, comparent et rangent. ». Ce n'est **qu'à partir du CE2** qu'apparaissent, dans le paragraphe « Les nombres entiers naturels », « **les principes de la numération décimale de position : valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture des nombres ; désignation orale et écriture en chiffres et en lettres ...** ». Il faut se reporter au document ressource « Le nombre au cycle 2 » pour obtenir un peu plus de précisions (voir en particulier l'article : « Débuter la numération »).

- premiers calculs dans ce système de numération, et, en s'appuyant sur son aspect groupement/échange, découverte et justification des techniques d'opérations posées.

La suite de cet article détaille une à une les activités du dispositif :

- **la comptine** : activité où les participants sont invités à mémoriser une suite de « mots-nombres » ;
- **les nombres cachés** : activité dans laquelle ils sont amenés à écrire et nommer des nombres ;
- **les bouchons** : activité où ils doivent dénombrer une collection donnée pour dire et écrire le nombre d'objets qui la composent ;
- **les bons de commande** : activité où ils sont amenés à mettre en lien groupements d'objets et écriture du nombre de ces objets ;
- **les calculs** : activité dans laquelle ils sont conduits à mettre en œuvre des groupements ou des échanges.

Nous tenterons, pour chacune d'elles, d'explicitier les choix qui ont présidé à sa construction, avant de faire part de quelques démarches de participants qui les ont vécues.

Régularités et irrégularités des systèmes de numération parlée et écrite

Activité 1.1 - La comptine ou mémorisation de la suite des mots nombres

Dans cette première activité, les participants découvrent un nouveau système de numération parlée. Pour pouvoir l'utiliser et en réciter la comptine, ils doivent mémoriser les « mots-nombres » qu'ils utilisent et l'ordre dans lequel s'organise leur succession.

L'animateur compte plusieurs fois le nombre de participants présents, dans un système de numération dont il explique aux formés qu'ils doivent mémoriser le nom des nombres, comme des enfants ont à le faire en situation de classe.

La comptine numérique inventée pour la formation est :

Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, six-trois, six-quatre, six-cinq, douze, douze-un, douze-deux, douze-trois, douze-quatre, douze-cinq, trix, trix-un, trix-deux, trix-trois, trix-quatre, trix-cinq, quadrix ...

Sans que cela soit annoncé aux participants, nous avons fait le choix de nous placer dans la base six, mais sans inventer de nouveaux mots (ou presque) pour les nombres³, comme c'est le cas par exemple dans la numération Shadoks⁴. Nous avons aussi choisi de placer, parmi les irrégularités, un « mot-nombre » point de repère (douze) qui renvoie à la même quantité que celle indiquée par la numération classique en base dix. Notre choix de

³ Suite à des remarques en formation qui suggèrent de mieux marquer la base en changeant les mots à partir de six, nous avons prévu de modifier la comptine, mais nous ne l'avons pas encore testée ; elle pourrait devenir : un, deux, trois, quatre, cinq, zès, zève, acht, zès-trois, zès-quatre, zès-cinq, bix, bix-un, ...

⁴ Par exemple <http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Shadoks.pdf> ou <http://pedago52.fr/guillemin/maths/shadoks/outils.htm>

« mots-nombres » identiques à ceux de la base dix a été motivé par la volonté de faire mémoriser un nouveau système de numération en un temps très court au début de la formation, et pour marquer, dans une certaine mesure, le parallèle entre le processus d'apprentissage de ce nouveau système avec celui que les élèves de début de primaire effectuent. Il était aussi question de rendre l'apprentissage de la comptine un peu difficile. En effet, il s'agit d'apprendre contre une connaissance déjà ancrée chez tous les stagiaires et de susciter des différences dans les rythmes et les processus d'acquisition de la comptine chez les formés. Nous pensons pouvoir ainsi montrer que la compréhension des régularités et irrégularités d'un système de numération se construit de façon différente selon les individus, et que c'est par un croisement d'activités et d'échanges qu'il prend peu à peu sens chez chacun.

L'animateur propose ensuite aux participants de tester et d'entraîner leur mémorisation de la comptine de ce système de numération orale :

Consigne : Maintenant que vous avez bien appris la comptine, nous allons jouer aux jeux « du furet » mais avec cette numération.

Jeux du furet : Énoncer à tour de rôle les nombres de la comptine dans un certain ordre

1. à l'endroit à partir de « un » ;
2. à l'endroit à partir de six ;
3. à l'envers à partir de « trix deux » ;
4. désigner ceux qui vont faire « chut » au lieu de dire le nombre (penser à en avoir qui se suivent) puis dans l'ordre dire « chut » pour certains à la place du nombre et dire les nombres pour d'autres (variante de « plouf dans l'eau » sans bande numérique).

Dans les formations que nous avons menées, les difficultés avec des irrégularités dans la numération orale et des mots-nombres non connus sont vécues par les participants, comme un nouvel apprentissage. En Grande Section, il faut aller jusqu'à 30 pour voir apparaître une certaine régularité, car si on se contente d'aller jusqu'à 16, cela donne l'impression d'avoir un mot nouveau à apprendre pour chaque nombre. Le parallèle avec des jeunes enfants peut donc être fait et être l'occasion d'apports théoriques sur la suite numérique, insécable, instable, stable⁵ ...

La suite des « mots-nombres » met un certain temps à se stabiliser chez la plupart des participants. Malgré trois tours de comptage, certains hésitent pendant le jeu du furet, ils n'ont pas repéré ou retenu les irrégularités et les régularités. La récitation de la comptine à l'envers n'est pas fluide (elle oblige à localiser et à identifier des irrégularités qui rompent la logique de la suite : on dit six-cinq, six-quatre, six-trois, huit, et non pas six-trois, six-deux...).

Les échanges sur les processus de mémorisation de la comptine numérique font ressortir différentes méthodes :

⁵ Fuson, Richards & Briars (1982) dans *Les chemins du nombre* de Bideaud J., Meljac C. & Fischer J.P. ou repris par Pierrard dans *Faire des mathématiques à l'école maternelle*.

- Repérage implicite ou explicite à la base (« *J'ai repéré la base six car on dit douze* », « *J'ai repéré les passages d'un nombre se terminant par 5 au nombre suivant*⁶ »)
- Repérage des régularités et irrégularités (« *J'ai retenu : aller jusqu'à 8, puis repéré les sauts (après quel mot)... les régularités et irrégularités* », « *J'ai noté un ... huit, six-trois..., six-cinq, douze.....* »)
- Utilisation des connaissances sur notre numération décimale ou sur les bases (« *Besoin d'utiliser ses connaissances sur les bases* », « *Fait une corrélation avec notre numération* »)

À l'issue de cette activité, et malgré les échanges, il arrive souvent qu'une partie des participants n'ait pas complètement compris la logique de la comptine, ni retenu entièrement la suite des « mots nombres ».

C'est l'occasion de faire un parallèle avec la classe et de rappeler que les processus et rythmes d'apprentissage ne sont pas identiques pour tous. La répétition et l'entraînement vont permettre de mémoriser la suite des mots-nombres, mais il faudra aussi repérer les régularités et irrégularités.

Activité 1.2 Les nombres cachés ou régularités et irrégularités dans la désignation des nombres

Après la comptine numérique parlée, les participants sont maintenant confrontés aux écritures symboliques qui désignent les nombres qui la composent. Ils ont à découvrir les symboles utilisés et les règles qui régissent leur succession dans l'écriture des nombres.

Pour cela, une bande numérique (Annexe 1) est tout d'abord affichée : elle présente les écritures « chiffrées » des nombres (B, C, D, E, F, BA, BB, BC, ...) de la comptine, les écritures en lettres donnant la façon de les dire et les représentations analogiques correspondantes sous la forme de faces de dés. Il faut trouver les nombres dont au moins une des écritures a été cachée (écriture chiffrée ou/et écriture en lettres) et dire comment ils s'écrivent ou se disent. Les nombres cachés choisis sont F, CA, six-trois, six-quatre, douze, sept, trix, trix-un, trix-deux et leurs représentations analogiques.

La recherche de nombres cachés sur la bande numérique permet d'envisager une approche globale dans laquelle la compréhension du concept de nombre demande d'associer à une quantité ou à une position, une désignation orale ou écrite, ou analogique.

Nous avons choisi une bande présentant : des écritures « chiffrées » des nombres (B, C, D, E, F, BA, BB, BC, ...); la façon de les dire écrite en mots et une représentation analogique des quantités évoquées à l'aide de faces de dés⁷. Le choix d'écrire avec des lettres plutôt qu'avec des chiffres s'éloigne de ce qui est souvent fait en formation et

⁶ Les réflexions en italique sont celles de participants à l'atelier « Du comptage à la numération » du colloque de la COPIRELEM 2012.

⁷ Les représentations analogiques avec les dés peuvent aider à prendre conscience de la base six. On peut faire un autre choix, moins transparent, comme celui des mains avec trois doigts des Shadoks que nous n'avons pas encore testé.

parfois en classe⁸ quand on travaille les bases. Nous avons choisi d'utiliser les lettres de l'alphabet car elles contiennent un ordre connu⁹, mais leur utilisation combinée dans l'écriture de nombre à plusieurs « lettres » permet de soulever la difficulté de la compréhension de l'ordre des nombres (il nous semble moins évident de dire que DA est plus grand que CF que de dire, même en base six, $\overline{30}^6$ est supérieur à $\overline{25}^6$).

En entraînement, une liste désordonnée de nombres en écriture « chiffrée » est distribuée aux participants. Il en manque certains pour reconstituer la bande numérique (Annexe 2) et il s'agit de les retrouver¹⁰.

Les participants, pour y parvenir, doivent certes entrainer leur toute nouvelle connaissance du système de numération écrite, mais ils doivent aussi mobiliser d'autres compétences pour organiser le tri et le rangement des nombres proposés. C'est ce dont certains prennent conscience en faisant l'activité et ceci les amène à envisager des aides à apporter aux élèves (nombres de la liste donnés sous forme d'étiquettes, mise à disposition d'une bande numérique individuelle...)

Une recherche de nombres cachés est ensuite à nouveau proposée mais cette fois-ci la suite des nombres écrits est présentée sous la forme d'un tableau de nombres allant de A à BFF (Annexe 3)¹¹.

Nous avons choisi d'aller jusqu'à BFF et de ne pas nous arrêter seulement à FF (comme dans le tableau proposé par ERMEL CP qui s'arrête à 99). Nous avons complexifié le tableau pour qu'il présente une certaine difficulté pour les adultes, mais aussi pour montrer qu'il est possible d'identifier des nombres en disant comment ils s'écrivent sans nécessairement savoir pouvoir énoncer comment ils se disent (la comptine n'a été apprise que jusqu'au mot « quadrix » et les mots qui permettraient de continuer la récitation au-delà de quadrix-cinq (EF) n'ont pas encore été donnés).

En formation, les participants utilisent les mêmes procédures que les élèves en classe¹² :

- « *Pour le premier nombre pas de problème, on savait le dire et l'écrire, il était dans la bande numérique encore affichée.* »
- « *Pour le BAB, j'ai fait en reculant* », ou « *J'ai vu que c'était dans la famille des BA* » ou « *Pour la ligne, j'ai vu que c'était dans la colonne terminant par A et après FA (il y a BAA), puis la colonne B.* »

⁸ Pour introduire la nécessité de grouper, et pour permettre d'avoir des groupements d'ordre deux avec des élèves de CP (tout en ayant des quantités peu importantes), Odette Bassis (2003, p. 19-76) propose par exemple une progression très détaillée avec l'utilisation de la base quatre. Mais l'utilisation des chiffres arabes pour écrire les nombres reste privilégiée.

⁹ Bobby Lapointe avait inventé un système bibi-binaire (base 16) avec la notation et la prononciation de seize chiffres mais où l'ordre n'est pas transparent.

¹⁰ L'activité « les nombres manquants » est proposée page 67 du guide de l'enseignant Capmath CP (Unité 4, séance 1).

¹¹ L'activité « le château des nombres » est proposée dans ERMEL CP p. 293.

¹² On pourra trouver la description des procédures élèves dans ERMEL CP p. 294.

À l'issue de cette série d'activités sur la numération écrite, les stagiaires se rendent compte de la régularité de la suite écrite et aussi du fait qu'il n'est pas nécessaire de savoir dire les nombres pour écrire la suite des nombres aussi loin que l'on veut avec seulement ici six symboles. Dans cette approche algorithmique, la compréhension de ses règles permet de trouver le prédécesseur et le successeur d'un nombre, sans que la quantité représentée ne soit convoquée : on est sur l'aspect ordinal du nombre. Il s'agit donc de mettre en évidence deux éléments :

- Le procédé de fabrication de la suite des écritures chiffrées et en particulier celui du successeur d'une écriture chiffrée quelconque.
- Les régularités de la suite des écritures chiffrées ; dans la suite des écritures, les périodes dix et cent jouent des rôles importants.

Mais pour comprendre la signification des chiffres dans l'écriture des nombres et être en mesure d'interpréter leur valeur selon leur position dans cette écriture, ce point de vue algorithmique n'est pas suffisant : le nombre doit être appréhendé d'un autre point de vue, qualifié de sémantique¹³, qui révèle les aspects groupements/échanges du système de numération de position utilisé.

Signification des symboles utilisés dans l'écriture d'un nombre

Dans cette partie de la formation, les participants ont à dénombrer des collections dans le système de numération qu'ils viennent de découvrir. La taille des collections fournies, l'obligation de remplir des bons de commande vont les amener peu à peu à constituer des groupements d'objets et à interroger le lien entre les groupements effectués et l'écriture (ou le nom) du nombre cardinal des collections dénombrées.

Les participants, regroupés par 3 ou 4, reçoivent un lot important de bouchons (plus de 72) dans un sac en plastique accompagné d'un couvercle en carton. Plusieurs activités leur sont ensuite proposées successivement. Elles visent à faire découvrir (ou redécouvrir) comment, du comptage au calcul posé, les groupements et les échanges s'inscrivent dans l'apprentissage et la compréhension de la numération écrite.

Activité 2.1 – Les bouchons ou des groupements pour dénombrer plus vite

Consigne : Dans les systèmes de numérations écrit et oral qui ont été rencontrés dans les activités précédentes, indiquer combien de bouteilles pourraient être bouchées avec les bouchons qui vous ont été distribués. Faites l'activité en groupe de 3-4.

Le matériel distribué place l'activité dans un contexte cardinal dans lequel le nombre est associé à une quantité d'objets. La première consigne n'est pas contrainte et reste assez ouverte pour permettre l'émergence de procédures de dénombrement variées qui pourront être mises en débat. Nous avons choisi de proposer un nombre assez conséquent de bouchons pour que l'écriture associée comporte trois symboles et permette d'interroger les groupements d'ordre 2. Un nouveau « mot-nombre » est nécessaire pour désigner ce groupement, nous avons choisi de le désigner par « sextus », mais il n'est pas nécessaire pour l'écriture, il apparaîtra dans la troisième consigne.

¹³ Cf. *Le nombre au cycle 2* :

http://media.eduscol.education.fr/file/ecole/00/3/Le_nombre_au_cycle_2_153003.pdf

En formation, les procédures utilisées par les participants sont les suivantes :

- Certains font des groupements de 6 et des groupements d'ordre 2, en laissant visibles les 6 tas de 6 bouchons ;
- D'autres font des groupements de 6 puis dénombrent le nombre de « sixaines » en utilisant la numération orale ou écrite mais sans constituer des groupements d'ordre 2 ;
- D'autres encore comptent en base 10 puis effectuent une conversion en base six avec la numération écrite (cette procédure est surtout observée chez les étudiants qui réinvestissent leurs connaissances sur les bases) ;
- D'autres comptent directement dans le système de numération proposé (en écrivant éventuellement la suite des nombres) ;
- D'autres utilisent le tableau des nombres de l'activité précédente et établissent une correspondance terme à terme ou ligne par ligne : cette procédure apparaît quand les stagiaires font un premier tas de 5 (pour les 5 premiers nombres à un chiffre) puis des tas de 6 correspondant aux lignes suivantes ;
- Certains utilisent le tableau des nombres à partir de A (ils comptent le « zéro » comme « un ») pour réaliser des groupements de 6, ils trouvent un résultat inférieur d'une unité de celui attendu ;
- D'autres enfin suivent des procédures erronées et font, par exemple, des groupements non réguliers ou non conformes à la base.

Les deux premières procédures par groupement ne sont pas toujours les plus fréquentes, même chez des enseignants en CP ou CE1. Les participants aux formations s'appuient plus facilement sur des procédures de comptage que sur celles de groupements. Pour beaucoup d'entre eux la valeur des chiffres, suivant le rang dans l'écriture des nombres, n'est pas prioritairement comprise en tant que groupements.

Activité 2.2 – Bon de commande¹⁴ ou des groupements dans l'écriture des nombres

Consigne : Les bouteilles sont vendues par pack de six, rédiger un bon de commande écrit. Compléter le bon de commande avec la numération apprise.

On peut boucher bouteilles Soit : packs de six bouteilles et bouteilles isolées
--

Faites l'activité en groupes de 3-4.

¹⁴ D'après ERMEL CP Activité carrelage (p. 339) et suivantes, et surtout CAP Math CP « Le Grand Zyglotron » (p. 150 du guide de l'enseignant).

La rédaction des « bons de commande » en imposant la contrainte de réaliser des « paquets » de six réinterroge l'aspect groupement et en particulier, qu'on attache celui-ci à la signification des chiffres dans l'écriture d'un nombre.

Pour y répondre, en formation, certains enseignants utilisent leurs connaissances sur la numération décimale qu'ils transposent pour lire directement le nombre de paquets dans l'écriture du nombre, mais ce n'est pas le cas de tous et certains doivent refaire les groupements pour y parvenir. Avec des étudiants, il arrive fréquemment que des groupes produisent des réponses dans lesquelles l'écriture du nombre et la traduction en nombre de packs de 6 bouteilles et en bouteilles isolées ne sont pas en cohérence.

Activité 2.3 - D'autres bons de commande ou des groupements dans l'oralisation des nombres

Consigne : Compléter individuellement les deux bons de commande suivants (Annexe 4).

L'exercice proposé est du type réinvestissement, il s'agit de lire la signification des symboles utilisés dans l'écriture du nombre (dans le système de numération parlée, puis dans le système de numération écrite).

Les groupements par 36 (« sextus ») sont cette fois-ci proposés dans le bon de commande, mais l'ordre dans lequel les items de la commande sont agencés ne reprend pas celui des symboles dans l'écriture du nombre, ce qui oblige à prendre en compte la valeur de ces symboles.

De plus, nous avons choisi de proposer d'autres nombres (quadrix-six¹⁵, quadrix-six-trois), dont la dénomination montre une nouvelle irrégularité du système comme celle que présente le système décimal après soixante-neuf.

En formation, les participants se confrontent à cette difficulté et reconnaissent devoir réinterroger la logique de l'ensemble du système : « on a lu « quadrix-six » et « quadrix-six-trois », « ce n'était pas apparu avant, on s'est demandé : est-ce que cela dépasse « sextus » ou pas ? »

Activité 2.4 – Du calcul ou des groupements, des échanges dans les calculs posés

Consigne : Calculer $CFD + ECD$ et $ECD - CFD$. Expliquez comment vous faites.

Les nombres sont choisis pour que les calculs posés nécessitent des retenues et obligent à mobiliser l'aspect groupement/échange des systèmes de numération de position.

En formation, il apparaît différentes procédures de résolution : si certains comptent sur leurs doigts, ou sur la bande numérique, d'autres écrivent les tables d'addition.

Souvent des participants ne parviennent pas à calculer la soustraction. Quelques-uns y arrivent en transposant la technique traditionnelle de la base 10, d'autres procèdent par échanges, d'autres encore cherchent combien ajouter à CFD pour obtenir ECD.

La discussion qui suit porte sur le parallèle ou non qui peut être fait entre les actions d'un élève de début de primaire et d'un adulte dans ces situations de calculs. Elle permet, d'une part, de rappeler que la compréhension des techniques suppose d'avoir compris

¹⁵ En toute logique, on devrait dire « cinquix ou pentix ».

cet aspect groupement/échange, et d'autre part, de pointer la difficulté supplémentaire que constitue, pour l'apprenant, dans la mise en œuvre de ces techniques, le fait de ne pas disposer de résultats automatisés.

Cette deuxième série d'activités déclenche souvent, chez les futurs professeurs des écoles, une compréhension plus fine des systèmes écrits de numération de position. On est, cette fois-ci, sur l'aspect cardinal du nombre : dans cette approche groupement/échange, c'est le lien entre un nombre d'objets unités et sa désignation par une écriture « chiffrée » qui est travaillé. Il s'agit d'établir la correspondance entre les symboles utilisés et les quantités qu'ils représentent, selon les positions qu'ils occupent dans l'écriture du nombre.

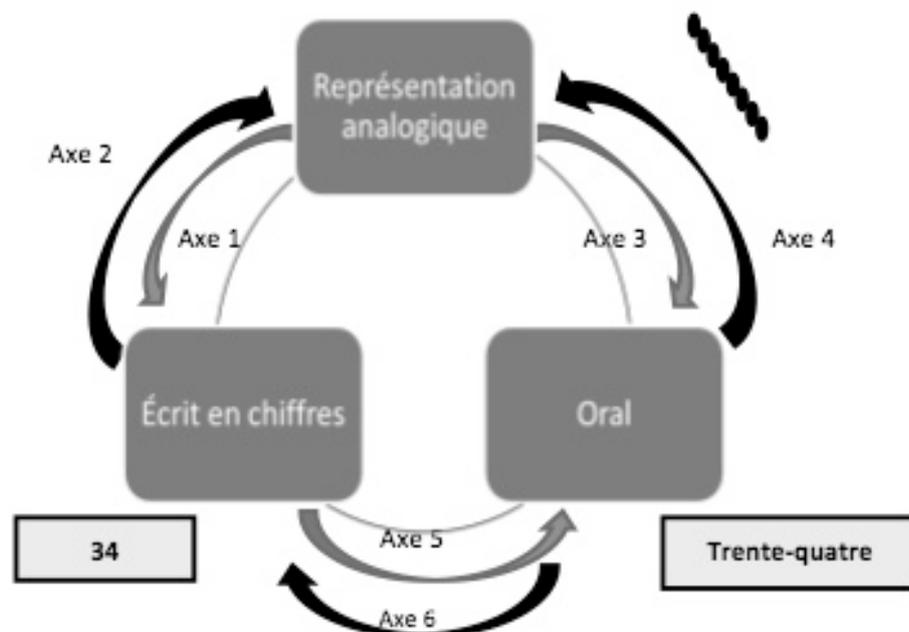
En guise de synthèse

Cette dernière partie de la formation vise à mettre en perspective les différentes approches du nombre rencontrées pendant la séance, et à fournir un complément théorique.

L'animateur projette le schéma de la page suivante et fait référence au modèle du triple code de Dehaene (1992), pour qui il existe trois grands systèmes de représentation mentale des nombres :

- le code analogique des quantités numériques,
- le code linguistique,
- le code Indo-Arabe écrit,

et différentes procédures de transcoding qui permettent de passer d'un code à l'autre.



Pour donner une cohérence à l'enseignement de la numération, il apparaît nécessaire à la fois de travailler les logiques internes à chacun de ces codes, pour les comprendre et pouvoir les utiliser, mais aussi, de travailler les six axes de transcoding, pour établir

des liens entre les différentes représentations des nombres et leur donner une signification commune.

Les activités vécues par les participants peuvent être reprises par l'animateur pour être situées dans ce schéma :

- Les activités de mémorisation de la comptine (répétition, jeux de furet) sont à placer sur le pôle oral (code linguistique).
- L'activité des nombres cachés sur la bande numérique permet de construire des procédures de transcodage qu'on peut situer sur les six axes du schéma.
- Les activités des nombres manquants ou du château des nombres visent essentiellement à comprendre le fonctionnement de la suite des nombres écrits en chiffres.
- Les activités de dénombrement d'une collection de bouchons et de rédaction de bon de commande ont pour but de mettre en évidence les liens qui lient les différentes représentations du nombre et permettent d'enrichir les procédures de transcodage.
- Les activités de calculs engagent des processus complexes sur les écritures chiffrées qui peuvent occasionner des opérations de transcodage et mobiliser temporairement d'autres codes (visualisation analogique d'échanges, appel à des tables mémorisées sous forme verbale...).

Certains élèves se retrouvent en difficultés (échec dans la lecture et l'écriture des nombres, dans la compréhension des techniques opérations, angoisse même chez certains à la simple vue de chiffres) car la numération n'a pas été construite. On connaît les conséquences que ces difficultés ont sur leurs pratiques du calcul posé ou mental et de leur perception des mathématiques en général. Il apparaît donc essentiel de proposer des activités qui donnent du sens. En classe, ces activités permettent d'aborder et de revisiter les différents aspects de notre système décimal et d'enrichir peu à peu le concept de numération.

Conclusion

Le dispositif de formation présenté ici a été utilisé en formation continue et initiale, il suscite un vif intérêt chez les participants¹⁶ (Annexe 5), qui en apprécient l'aspect ludique et dynamique même s'ils reconnaissent être au départ déstabilisés. Il permet, selon leurs dires, d'une part d'interroger (ou de réinterroger) les fondements des systèmes de numération oral et écrit que nous utilisons et les difficultés que posent leur enseignement, d'autre part de découvrir (ou de retrouver) des activités utilisables en classe et dont l'importance n'est pas toujours perçue. Comme cette professeure des écoles en CP qui a reconnu au cours d'une formation qu'elle ne faisait plus l'activité proposée dans son manuel¹⁷ car c'était pour elle une perte de temps ; mais après l'avoir vécue elle-même dans cette formation, elle s'est déclarée convaincue de la nécessité de la mettre en œuvre avec ses élèves pour faire comprendre la valeur des chiffres en fonction de la position dans le nombre.

¹⁶ Voir en Annexe 5 le recueil de réactions de conseillers pédagogiques qui ont suivi cette formation.

¹⁷ Le Grand Ziglotron de CAP Maths consignes 2 et 3 des bons de commande.

Ce qui fait la force de ce dispositif est, qu'à travers la transposition d'activités d'un ou de systèmes usuels de numération à d'autres fictifs mais similaires qu'il propose, il met les participants à la fois dans une situation de résolution de problèmes (avec dimension enjeu et dimension apprentissage) et à la fois, dans une situation d'homologie dans les tâches vécues avec celles qu'il est possible de proposer aux élèves (avec sa dimension formative). C'est cette position dedans/dehors qui favorise leur métacognition et les conduit à réfléchir sur leur activité en apprentissage et à la mettre en rapport avec celle des élèves.

Nous pensons qu'ainsi outillés à l'issue de la formation, les participants sont en mesure d'opérer la transposition des activités dans leurs classes en évitant une « dénaturation simplificatrice » (Kuzniak, 2003, p. 17) qui transformerait la nature du savoir en jeu ou corromprait la démarche pédagogique proposée. Leurs pratiques de classe devraient s'en trouver modifier et se tourner davantage vers des approches par la résolution de problèmes qui tentent de donner du sens aux apprentissages de nos systèmes de numération écrit et parlé.

Bien sûr, il n'est pas toujours possible de concevoir, sur le même modèle que celui proposé ici et pour chacune des thématiques des programmes, des systèmes ou des cadres fictifs, élaborés spécifiquement pour les besoins de la formation, dans lesquels faire vivre, aux enseignants et futurs enseignants, les mêmes activités que leurs élèves. Ces cadres et systèmes doivent en effet être suffisamment similaires à ceux dans laquelle la notion est à construire par les élèves pour en garder les caractéristiques susceptibles de faire obstacle à l'apprentissage et être, en même temps, différents et inhabituels pour permettre aux participants de se retrouver en position d'apprenant et de rencontrer des difficultés d'élèves. Cependant, les retours d'expériences du dispositif de formation que nous avons exposé ici nous montrent que, quand on y parvient, l'impact de la formation est largement renforcé.

Si cet article semble proposer un dispositif « clé en main » en déclinant un scénario, des activités et quelques éléments d'analyse, la réussite de sa mise en œuvre est plus délicate qu'elle n'y paraît. Beaucoup de conseillers pédagogiques qui ont vécu cette formation considèrent qu'il leur faudrait, pour la conduire eux-mêmes, la retravailler individuellement, à la fois du point de vue des connaissances théoriques et au regard du public auquel ils voudraient l'adresser.

Il nous semble en effet utile d'avertir les futurs intervenants qui voudraient mettre en œuvre ce dispositif que ce dernier :

- exige, tout d'abord, de disposer d'un bagage en mathématique et en didactique suffisant, pour pouvoir en appréhender les contenus ;
- et nécessite, aussi, d'accompagner la mise en activité des participants, d'une part, d'un travail d'observation, de verbalisation, permettant de faire émerger les démarches de chacun, et d'autre part, d'un travail d'analyse, pour en comprendre les logiques et en envisager l'exploitation dans le temps imparti de la formation.

Références bibliographiques

- AIGOIN C. & GUEBOURG V. (2004) Du dénombrement terme à terme aux groupements réguliers : un pas nécessaire vers la compréhension de notre système de numération positionnelle. *Grand N*, n°73, 49-65.
- ANSELMO B., DUSSUC M.P. & ZUCCHETTA H. (sous presse) Du comptage à la numération, Atelier B5. *Actes du XXXIX^{ème} Colloque de la COPIRELEM – Quimper 2012*.
- BASSIS O. (2003) *Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques (numération, opérations, nombres décimaux et proportionnalité)*. Éditions Hachette éducation, collection Pédagogie pratique à l'école & au collège.
- BEDNARZ N. & JANVIER B. (1984) La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N*, n°33 et n°34.
- BRACONNE-MICHOUX, A. & ZUCCHETTA H. (2012) Intérêts et limites pour la formation d'une situation d'homologie : situation de communication sur un solide. Conditions pour un transfert dans la classe. *Actes du XXXVIII^{ème} Colloque de la COPIRELEM*.
- BRIAND J. (2008) Question d'enseignants, question d'enseignement. Un partage d'expérience de formation avec des enseignants de cours préparatoire relativement à la construction de la numération. *Actes du XXXVI^{ème} colloque de la COPIRELEM*.
- BRISSIAUD R. (2001) Enseigner une comptine numérique « à l'asiatique » au CP : pourquoi et comment ? *Actes du XXVIII^{ème} colloque inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres, Tours*.
- CHAMBRIS C. (2008) Transposer en formation des résultats de recherche sur l'enseignement de la numération de position des entiers au cours élémentaire. *Actes du XXXVI^{ème} colloque de la COPIRELEM*.
- CHARNAY R., DUSSUC M.P & MADIER M. (2009) *Manuels Cap Maths CP et CE1*. Éditions Hatier.
- DEHAENE S. *Fondements cognitifs de l'arithmétique élémentaire - Cinquième Cours - L'impact des symboles sur la cognition numérique*. Disponible en ligne http://www.college-de-france.fr/media/stanislas-dehaene/UPL28447_Cours2008_5_ImpactSymbolesb.pdf (consulté le 14/03/2013)
- DUVAL R. (2005) Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. Conférence, *Actes du XXXIII^{ème} colloque COPIRELEM*.
- ERMEL (2005) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CP et CE1*. Éditions Hatier.
- FÉNICHEL M. & TAVEAU C. (2006) *Enseigner les mathématiques en cycle 2, les buchettes, et en cycle 3, l'enveloppe des nombres*. DVDs CRDP Créteil.
- GIRODET M.A. (1996) *L'influence des cultures sur les pratiques quotidiennes de calcul*. Éditions Didier, Collection Essais CREDIF.
- KUZNIAK A. (2003) Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Carnets de route de la COPIRELEM. Tome 3*, pp. 7-22.

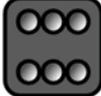
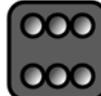
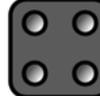
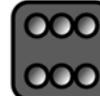
TEMPIER F. (2010) Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, n°86, 59-90.

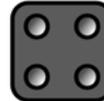
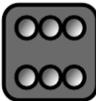
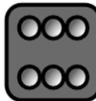
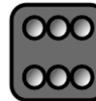
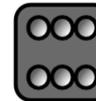
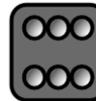
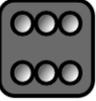
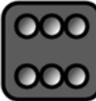
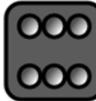
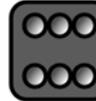
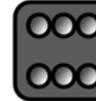
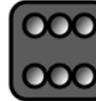
MOUNIER E. (2010) *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Thèse de l'Université Paris 7. Disponible et téléchargeable http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/07/21/PDF/These_Mounier_2010.pdf (consulté le 14/03/2013)

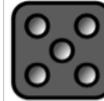
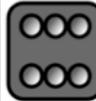
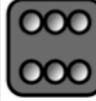
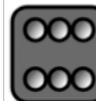
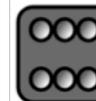
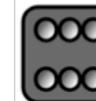
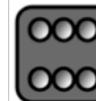
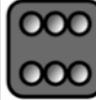
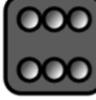
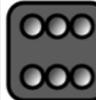
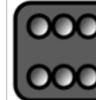
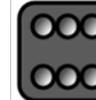
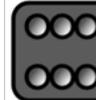
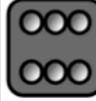
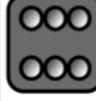
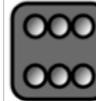
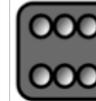
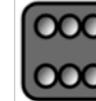
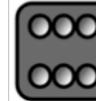
Annexe 1 - Bande numérique

La bande est tirée en grande dimension pour être vue du fond d'une salle de classe et assemblée pour en faire une seule bande. Les représentations de dés sont placées verticalement au lieu d'horizontalement comme dans la présentation d'origine par commodité pour ce texte.

B	C	D	E	F
<i>un</i>	<i>deux</i>	<i>trois</i>	<i>quatre</i>	<i>cinq</i>
				

BA	BB	BC	BD	BE	BF
<i>six</i>	<i>sept</i>	<i>huit</i>	<i>six-trois</i>	<i>six-quatre</i>	<i>six-cinq</i>
	 	 	 	 	 

CA	CB	CC	CD	CE	CF
<i>douze</i>	<i>douze-un</i>	<i>douze-deux</i>	<i>douze-trois</i>	<i>douze-quatre</i>	<i>douze-cinq</i>
					
					
					

DA	DB	DC	DD	DE	DF
<i>trix</i>	<i>trix-un</i>	<i>trix-deux</i>	<i>trix-trois</i>	<i>trix-quatre</i>	<i>trix-cinq</i>
					
					
					
					

Annexe 2 – Nombres manquants

Quels sont les nombres manquants ?

BA	CE	EA	B	FF
E	BAA	BF	FE	CB
EF	DA	BAC	D	DE
FA	CC	BB	EB	FD
CF	EC	FC	CD	BE
C	ED	BD	BAD	DC

Annexe 3 – Tableau de nombres

A	B	C	D	E	F
BA	BB	BC	BD	BE	BF
CA	CB	CC	CD	CE	CF
DA	DB	DC	DD	DE	DF
EA	EB	EC	ED	EE	EF
FA	FB	FC	FD	FE	FF
BAA	BAB	BAC	BAD	BAE	BAF
BBA	BBB	BBC	BBD	BBE	BBF
BCA	BCB	BCC	BCD	BCE	BCF
BDA	BDB	BDC	BDD	BDE	BDF
BEA	BEB	BEC	BED	BEE	BEF
BFA	BFB	BFC	BFD	BFE	BFF

Annexe 4 – Bons de commande déjà complétés

groupe A

On peut boucher **quadrix-six** bouteilles

Soit :

- packs de six bouteilles,
- cartons de six packs de six bouteilles et
- bouteilles isolées

On peut boucher **CAE** bouteilles

Soit :

- packs de six bouteilles
- cartons de sextus bouteilles et
- bouteilles isolées

groupe B

On peut boucher **quadrix-six-trois** bouteilles

Soit :

- packs de six bouteilles
- cartons de six packs de six bouteilles et
- bouteilles isolées

On peut boucher **CFA** bouteilles

Soit :

- packs de six bouteilles
- cartons de sextus bouteilles et
- bouteilles isolées

Annexe 5 – Réactions de conseillers pédagogiques

Lors d'une formation de conseillers pédagogiques le 24 mai 2012 à Saint-Fons (69)

Comment avez-vous vécu les différentes situations ?

- Assis près de la fenêtre, avec curiosité
- Avec intérêt et amusement
- Sympathique, pas trop impliquant
- Surprise, **curiosité**, stimulation intellectuelle
- Dans la bonne humeur mais avec un peu de « stress » (compétition → collectif)

1

Comment avez-vous vécu les différentes situations ?

- Déstabilisée par la 1^{ère} situation : logique dans la suite des nombres ? (six-trois...douze..)
- Jeu du furet : déstabilisant au départ puis très vite recherche d'une logique, idem pour les 3 autres exercices
- Étonnant **déstabilisant** ludique rupture reconstruction
- Inquiétude au début
- **Au départ crainte de ne pas comprendre puis très intéressée**

2

Comment avez-vous vécu les différentes situations ?

- Comme un jeu intellectuel + plaisir de décoder un nouveau code
- Une façon **ludique** de mettre en avant certaines caractéristiques de la numération écrite et orale
- Comme une façon **dynamique** de réinterroger la numération avec l'incertitude « anxieuse » de comprendre la logique des nombres proposés

3

Que pensez-vous en avoir appris, redécouvert ?

- Des logiques différentes entre **numération orale et numération écrite**
- L'importance de la **position des « chiffres »** les uns par rapport aux autres, du nombre de signes
- L'ordre des nombres a une **logique** mais aussi des **exceptions** qui doivent être enseignées
- Qu'un nombre est juste un concept, un « mot » choisi arbitrairement
- La **difficulté d'un code** qu'on ne comprend pas (**parallèle avec élèves en apprentissage**)

4

Que pensez-vous en avoir appris, redécouvert ?

- Le fonctionnement de la numération de position
- Distinction et liens entre numération orale et écrite, logique de la numération de position
- Remontée de la numération en base
- Notion de numération de position, notion de base on s'appuie sur ce que l'on connaît
- Redécouvert le pays du 3, 4 les bases en CM2, le château des nombres d'ERMEL

5

Que pensez-vous en avoir appris, redécouvert ?

- Appui sur des connaissances pour comprendre le « fonctionnement » et faire des essais
- Besoin de mémoire, de concentration
- Une autre façon d'appréhender l'ensemble de la construction des nombres en pointant les obstacles à la compréhension
- Appris : Possibilité de transposer une situation vécue en FLE, redécouvert : travail effectué avec des élèves non francophones

6