LE TRIANGLE-ACROBATE : UN JEU GÉOMÉTRIQUE SUR LES ISOMÉTRIES EN CE1. INTÉRÊTS ET LIMITES

Caroline BULF

IUFM d'Aquitaine, Université Bordeaux 4, équipe E3D Laboratoire LACES, Université Bordeaux 2

Carlo MARCHINI

Università di Parma, Unità Locale di Ricerca in Didattica della Matematica,

Dipartimento di Matematica e Informatica

Paola VIGHI

Università di Parma, Unità Locale di Ricerca in Didattica della Matematica,

Dipartimento di Matematica e Informatica

Le travail relaté ici est le fruit de quelques réflexions soulevées lors d'un échange Erasmus (France – Italie) entre enseignants. Notre intérêt commun sur le thème des transformations géométriques nous a conduits à nous interroger sur le concept d'isométrie chez de jeunes élèves dans l'enseignement obligatoire. En particulier, nous cherchons à interroger les préconcepts (au sens de Rouche (1999), voir plus loin dans l'article) relatifs aux isométries du plan à l'école primaire avant qu'ils ne reçoivent les premiers enseignements explicites portant sur la symétrie axiale : sous quelle forme les préconcepts des transformations du plan peuvent-ils se manifester ? La symétrie axiale a-t-elle déjà une place privilégiée du point de vue de ces préconcepts ? Et est-ce que ces préconcepts peuvent être mis au service d'apprentissage géométrique ? Nous avons conçu une situation, appelée Le Triangle-Acrobate, basée sur le concept d'isométrie et de son utilisation chez des élèves de 6-7 ans. Cet article porte sur l'analyse de cette situation, mise en œuvre dans deux classes françaises. Aussi, après un bref constat sur les enjeux de l'enseignement de la symétrie dans le premier et second degré, nous proposerons une analyse *a priori* puis une analyse *a posteriori* de la situation, dans le but d'essayer d'apporter des éléments de réponse aux questions de recherche envisagées. La comparaison des résultats obtenus en France et Italie est en cours de rédaction et sera relatée dans un autre article (Bulf, Marchini et Vighi, soumis).

La symétrie axiale à l'école

Héritages historique et curriculaire

Dans l'Histoire des mathématiques, la symétrie a d'abord été instituée comme une connaissance pratique pour les arts ou l'architecture, puis ne deviendra un objet mathématique qu'à partir des transformations du plan (émergence au XVI^{ème} siècle avec Desargues puis au XVII^{ème} siècle avec Descartes). C'est la théorie des invariants (dont Galois déterminera les fondements dès le XIX^{ème} siècle) qui la situera au cœur de la pensée mathématique.

Du point de vue des programmes scolaires[1], retenons que dans les programmes de 1971, les transformations du plan sont toutes enseignées en 3ème, la symétrie orthogonale n'est qu'un cas particulier dans l'ensemble des isométries. Ce n'est qu'en 1985 que les transformations (symétrie axiale, symétrie centrale, translation et rotation) se retrouvent isolées à chaque niveau scolaire (respectivement en 6ème, 5ème, 4ème et 3ème). Aujourd'hui[2], la symétrie axiale n'est plus envisagée comme une bijection involutive du plan dans lui-même (compte tenu de l'échec que l'on connait des mathématiques modernes). La symétrie axiale est abordée en premier lieu comme une notion pratique à l'école primaire, que l'on peut rapprocher d'un paradigme de Géométrie I (géométrie naturelle) au sens de Houdement et Kuzniak (1999), puis celle-ci sera abordée d'un point de vue plus analytique en 6ème dans une perspective de paradigme de Géométrie II (géométrie axiomatique naturelle)[3]. Notons également que la translation et la rotation ont disparu des programmes depuis 2008 (enseignées auparavant respectivement en classe de 4ème et 3ème).

L'enseignement de la symétrie axiale à l'école : à la recherche d'une continuité entre le premier et le second degré

Afin de mieux saisir l'intérêt de notre recherche, nous proposons de faire un bref constat sur l'enseignement de la symétrie axiale dans le premier et le second degré. Nous proposons notamment de mettre en évidence la recherche de continuité existante entre ces deux niveaux d'institution.

À l'école primaire[4], le travail sur la symétrie axiale est abordé explicitement dès le cycle 2, en classe de CE1[5] (les élèves ont environ 7 ans) à travers des activités de reconnaissance de figures symétriques basées sur la perception dans le but de passer ensuite au cycle 3 à un

---

[1] Nous renvoyons à la thèse de Chesnais (2009) pour une analyse fine et détaillée de l'Histoire des programmes concernant la symétrie axiale.

[2] BO programmes 6ème : Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008.

[3] Précisons que les choses ne sont bien sûr pas aussi tranchées entre GI et GII. Pour illustrer notre propos, nous renvoyons à l'article de Kuzniak (2009, p. 76) dans lequel sont évoqués les liens parfois assumés ou subis entre les différents paradigmes dans une institution donnée. Rappelons à cette occasion que GI (la géométrie naturelle) se définit par une géométrie qui a pour source de validation la réalité et le monde sensible et que GII (géométrie axiomatique naturelle) se définit par une géométrie dont la source de validation se base sur des lois hypothético-déductives, telles que celles définies par Euclide.

[4] BO des programmes de l'École Primaire : Hors série n°3 du 19 Juin 2008.

[5] Celle-ci a déjà été travaillée indirectement à l'école maternelle à travers par exemple des activités sur les formes géométriques dont certaines ont des axes de symétrie (le carré par exemple).

travail basé sur les instruments (dans des tâches de reconnaissance, de reproduction ou de construction). La symétrie y est vue essentiellement d'un point de vue pragmatique. Les propriétés de la symétrie axiale sont exploitées indirectement à travers par exemple l'usage de divers instruments comme le papier quadrillé (la stratégie de comptage de carreaux permet de vérifier l'équidistance à l'axe, la propriété de perpendicularité est en partie supportée par ce type de papier), le calque, le pliage ou encore le miroir (qui assurent ainsi la propriété de conservation). Citons en guise d'exemple un extrait du guide du maître d'Euromaths CE2, dont la démarche s'inspire des travaux de recherche en didactique de la géométrie :

> *« La notion de symétrie est abordée en premier lieu par son aspect statique (existence d'axes de symétrie dans diverses figures puis recherche de tels axes par pliage, à l'aide du papier calque ou en dénombrant les carreaux sur un quadrillage), dans des situations mettant en avant le rôle de l'anticipation avant la manipulation et la mise en œuvre de la part des élèves de plusieurs « théorèmes-en-acte ». Les figures étudiées admettent ou non des axes de symétrie dans des positions diverses. La symétrie axiale (en tant que transformation ponctuelle) est abordée sous son aspect « dynamique » dans le jeu du miroir. Au cours de ce jeu, c'est un point de vue local qui est travaillé, les principales propriétés de la symétrie axiale étant nécessairement mise en œuvre de manière plus ou moins implicite au cours du jeu. »* (Peltier, Briand, Ngono & Vergnes, 2010, p. 40)

Ce faisant, les propriétés de la symétrie axiale (la perpendicularité, les propriétés d'équidistance, de conservation, etc.) sont abordées dès l'école primaire dans un paradigme de Géométrie GI et seront ensuite reprises et travaillées alors explicitement au collège, en classe de 6ème, notamment avec la notion de médiatrice d'un segment dans une perspective GII. On constate ainsi la recherche d'une certaine continuité entre les objectifs d'enseignement du premier et du second degré[6].

Des difficultés de l'enseignement de la symétrie axiale

Le concept de symétrie a fait l'objet de nombreuses recherches françaises en didactique des mathématiques dans le cadre de son enseignement dans le second degré (Denys & Grenier, 1986 ; Grenier & Laborde, 1988 ; Grenier, 1988 ; Tavignot, 1993 ; Miyakawa, 2005 ; Lima, 2006 ; Bulf, 2011 ; Chesnais, 2012). Toutes pointent des difficultés chez les élèves liées aux propriétés de la symétrie axiale, difficultés résistantes du fait de son empan culturel : l'obstacle familier de l'axe vertical médian, l'obstacle de la conservation de la même direction entre l'image d'une figure et la figure de départ, les difficultés des propriétés d'incidence, les difficultés à réinvestir des procédés de construction point par point, etc. ; des difficultés que l'on peut retrouver dans l'enseignement de la symétrie dans le premier degré.

Nous cherchons à interroger les « préconcepts » (au sens de Rouche (1999), définis dans le paragraphe suivant) que peuvent avoir les élèves de la symétrie axiale avant tout enseignement de celle-ci, étant donnée sa place privilégiée dans les programmes français tout au long de la scolarité obligatoire (elle est la seule transformation enseignée aussi tôt

[6] Signalons à ce sujet l'article de Perrin-Glorian, Mathé & Lerclercq (2013) qui propose de penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans à travers une analyse fine du rapport à la figure et aux instruments dans la résolution de problèmes de géométrie. Le cas de la symétrie orthogonale y est en particulier étudié.

et aussi longtemps dans le premier et second degré) alors que celle-ci est un objet d'enseignement relativement complexe compte tenu des difficultés qu'elle peut générer.

Développement de la pensée géométrique chez les élèves : des préconcepts aux concepts formels

Rouche (1999) définit trois niveaux de concepts. Le premier niveau correspond au niveau des « préconcepts » :

> *« Si, à propos d'un objet rectangulaire, on lui [quelqu'un] demande « c'est quoi ? », il répond volontiers : « c'est pour… ». Si on lui demande « c'est comment ? », souvent il mime le rectangle avec les mains ou dessine un rectangle. Il y a là un décalage - surprenant pour un observateur non averti -, entre une connaissance élémentaire certes, mais pertinente au niveau de l'action, une connaissance qui fonctionne, et une grande incapacité ou maladresse dans l'expression. Nous retenons pour désigner une notion qui fonctionne de cette manière, la dénomination de préconcept ».* (Rouche, 1999, p. 33)

Ces préconcepts se situent donc surtout au « niveau de l'action et de l'intelligence des situations » au sens de Wallon cité par Rouche (*Ib.*) mais pourraient s'apparenter aussi à ce qu'il appelle une « *intelligence spatiale*, ce qui tend à montrer son importance dans l'acquisition de la géométrie » (*Ib*. p. 34).

Le deuxième niveau est celui des « objets mentaux » :

> *« (…) le rectangle s'installe davantage dans la conscience et le langage, également dans la volonté de connaître. Il est non seulement utilisé et nommé, mais encore on peut parler des côtés horizontaux et verticaux, de l'égalité des côtés, des angles droits, du fait qu'on peut plier le rectangle en deux de sorte qu'une moitié recouvre exactement l'autre, et d'autres propriétés analogues. La capacité de parler des propriétés du rectangle et des phénomènes dont il est le siège implique la maîtrise d'un langage approprié, pas nécessairement le langage mathématique consacré. »* (*Ib*. p. 34)

Enfin, le dernier est celui des « concepts formels » :

> *« Il [le rectangle] apparaît à sa place dans le déroulement d'une théorie, place variable selon les axiomes que l'on se donne. Par exemple, dans une axiomatique de géométrie synthétique comme celle de Hilbert, on n'arrive au rectangle qu'après avoir construit une théorie des points, droites et plans, des relations d'incidence et de congruence, des angles, de l'orthogonalité, etc. »* (*Ib*. p. 35)

Chaque niveau intègre le précédent :

> *« Il n'y a pas par exemple d'objet mental qui ne doive une bonne partie de sa substance aux expériences sensori-motrices relevant de l'intelligence des situations ; il n'y a pas davantage de concept formel de rectangle qui n'ait ses racines dans le préconcept de rectangle et dans l'objet mental rectangle. »* (Op. Cité)

Les préconcepts de la symétrie axiale et des transformations du plan en général vont donc, selon Rouche, en partie influencer le développement des concepts formels et des objets fondamentaux leur correspondant, en particulier durant leur enseignement, voilà pourquoi identifier ces préconcepts nous intéresse tout particulièrement.

Certains chercheurs dont Keller (2004, 2006) font l'hypothèse que la symétrie axiale serait à l'origine du développement de la pensée géométrique et plus particulièrement la symétrie aurait été comme un moteur dans l'action pour construire les objets géométriques de référence. Keller analyse l'évolution des constructions des outils des hommes préhistoriques, et en particulier celle du biface (Keller, 2004, p. 10). Keller décrit une structuration de l'espace de plus en plus organisée en formes géométriques dont le travail de taille de pierre commence en 3D (espace) puis s'affine en 2D (surfaces) et enfin en 1D (lignes). En particulier, cela nécessite des « représentants » symétriques en tant qu'images mentales, car le biface révèle une parfaite symétrie sur le plan vertical et médian. Or, « copier » les symétries est « une affaire complexe » que Keller décrit longuement (*Ib*. p. 89). À l'issue de ces deux ouvrages, Keller soutient la thèse suivante :

> *« (…) de l'existence incontestable de ces symétries j'ai déduit l'existence à mon avis tout aussi incontestable, dès les temps paléolithiques, des figures de base : rectangles, cercles, segments de droites. On notera que, comme pour l'outillage lithique, si l'on décèle bien l'apparition des figures géométriques classiques planes, on ne constate rien du même ordre en dimension trois : pas de cube, pas de polyèdre en général, pas de pyramide, pas de sphère.* » (Keller, 2006, p. 216)

Weyl (1952) témoigne également du rôle originel que le concept de symétrie est supposé jouer :

> *« Avec Platon, je suis enclin à penser que l'idée mathématique est l'origine commune, dans les deux cas : les lois mathématiques qui gouvernent la nature sont l'origine de la symétrie dans la nature ; la représentation intuitive de l'idée mathématique dans l'esprit créateur de l'artiste est l'origine de la symétrie dans l'art ».* (Weyl, 1952, p. 16)

Dans le contexte scolaire, en Maternelle, Gorlier (1981) a mis en évidence que des enfants de grande et moyenne sections pouvaient produire des motifs respectant des symétries sans pouvoir verbaliser : « *À chaque fois ils montrent bien les éléments qui se correspondent sans esquisser l'axe de symétrie, ce qui représente une difficulté plus grande et différente* » (Gorlier, 1981, p. 59). On peut renvoyer ici aux modèles de Gerrig (1991) qui considèrent que la mémoire ne conserve pas des « informations » isolées mais que celles-ci s'accumulent pour à terme constituer des unités fonctionnelles. Ici, l'idée serait que l'axe de symétrie serait donc une brique déjà présente inconsciemment dans la mémoire des élèves. De manière plus générale, de nombreuses recherches psychologiques, par exemple Piaget et Inhelder (1977), mettent en évidence l'existence très tôt chez l'enfant d'un stade de recherche d'un axe vertical comme frontière ou plan médian.

Dans des classes italiennes, Marchini et Vighi (2011) ont montré qu'un enseignement expérimental des isométries chez des élèves de 8 ans pouvait influencer les apprentissages géométriques plus standards : en travaillant avec deux échantillons de classes, ils ont vu que la pratique et la pensée sur les isométries améliorent les résultats de problèmes traditionnels sur périmètre et aire. Ces auteurs citent par ailleurs les travaux de Swoboda (2007), de Jagoda (2009), et de Marchini & Vighi (2009) qui mettent en évidence la présence d'une forme d'intuition des isométries du plan chez les jeunes enfants.

Ainsi, d'après les quelques auteurs cités ici (nous n'avons évidemment pas été exhaustifs), la symétrie axiale aurait une influence sur la pensée géométrique. Nous proposons d'interroger cette « intuition des isométries » (que nous appelons ici des préconcepts au sens de Rouche) chez les jeunes élèves français en classe de CE1, avant qu'ils ne reçoivent les premiers enseignements explicites portant sur la symétrie axiale : sous quelle forme les préconcepts des transformations du plan peuvent-ils se manifester ? La symétrie axiale a-t-elle déjà une place privilégiée du point de vue de ces préconcepts ? Et est-ce que ces préconcepts peuvent en effet être mis au service d'apprentissage géométrique (ici, nous questionnerons l'apprentissage des éléments de repérage et de déplacement dans le plan) ?

Afin d'apporter des éléments de réponse à ces questions, nous avons mis en place un protocole expérimental sous forme de jeu géométrique que nous avons appelé le Triangle-Acrobate.

Présentation du protocole expérimental : la situation du Triangle-Acrobate

Objectifs : observer des préconcepts et questionner l'intérêt de la situation en classe

Nous avons choisi de situer notre recherche au moment où l'élève n'est qu'au début de sa rencontre « scolaire » avec la symétrie axiale[7] c'est-à-dire à la fin du cycle 2 en CE1.

Nous avons mis au point une activité expérimentale en deux phases qui a pour but de faire fonctionner dans l'action ce que nous considérons *a priori* comme des préconcepts (au sens de Rouche comme expliqué précédemment) des transformations du plan chez les élèves. Nous proposons un jeu[8] de notre invention basé sur le déplacement d'un triangle équilatéral mobile dans une feuille (le plan) qui est présentée sous forme de réseau triangulaire avec des cases numérotées (Annexe 1). L'intérêt de la situation du point de vue de l'élève consiste à chercher à gagner en trouvant le chemin « le plus court » pour aller d'une case à une autre sous des contraintes données. Par exemple, dans la Figure 1 ci-après, le Triangle-Acrobate est initialement positionné en case 21 et doit se positionner en case 9. Un déplacement possible est de faire une rotation de centre un sommet du triangle numéroté 9 et d'angle 60° (ici pour des questions de clarté, le Triangle-Acrobate est transparent, ce qui n'est pas le cas dans la réalité).

Nous proposons d'exploiter l'analyse de cette situation selon deux points de vue complémentaires :

- le point de vue du chercheur en didactique des mathématiques cherchant à répondre à des questions de recherche (Sous quelle forme les préconcepts des transformations du plan peuvent-ils se manifester ? La symétrie axiale a-t-elle déjà une place privilégiée du point de vue de ces préconcepts ?)
- et le point de vue de l'enseignant dans sa classe cherchant à provoquer des apprentissages chez ses élèves (Est-ce que ces préconcepts peuvent en effet être mis au service d'apprentissage géométrique ?).

---

7 Bien que la symétrie axiale soit bien sûr largement présente sous d'autres formes dès la Maternelle et dans l'environnement quotidien d'un enfant, il nous apparaît cependant difficile voire impossible d'évaluer l'influence de ces « apports ».

8 Nous renvoyons à la partie sur « Quelques considérations sur les jeux » en classe de mathématiques de l'article de Dorier et Maréchal (2008, pp. 70-71). En effet, le jeu est fréquemment présent en classe de mathématiques et peut être porteur d'apprentissage, comme cela est repris dans la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau (1998), ou au contraire avoir une portée seulement ludique.

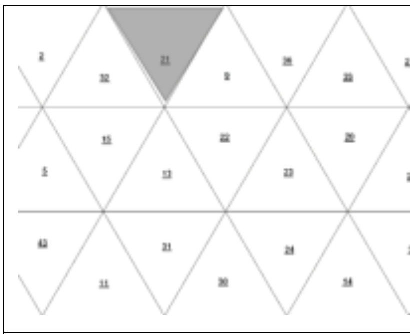
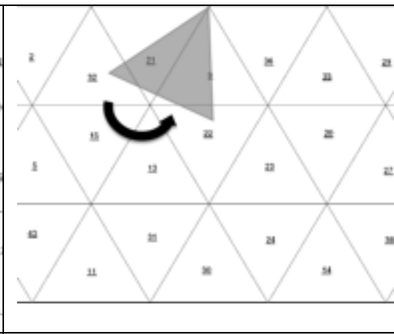
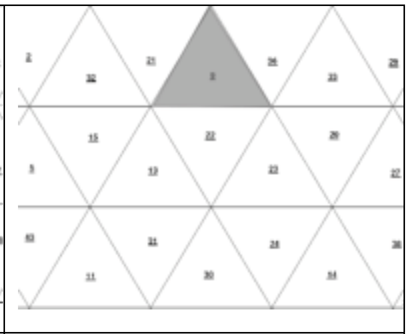
		
Position de départ : case 21	Déplacement par rotation d'angle 60° et de centre un sommet du triangle 9 (ici le sommet est celui qui est commun aux triangles 21, 9 et 26)	Position d'arrivée : case 9

Figure 1. Exemple de déplacement possible : de la case 21 à 9

D'un point de vue de chercheur, nous partons de l'hypothèse de travail que les procédures des élèves dans cette situation nous renseigneront sur les préconcepts des transformations du plan (en adoptant le point de vue de Rouche (1999) : les préconcepts sont à rapprocher d'une forme d'« intelligence spatiale » (*Ib.,* pp. 34-35)). Les déplacements permettant de jouer peuvent être *a priori* décrits en termes de transformations du plan (translation, rotation, symétries ou composées des transformations) : par exemple *tourner (dans le plan) autour d'un point ou nœud du réseau* peut être assimilé à un préconcept de la rotation, *retourner (dans l'espace) le Triangle-Acrobate par rapport à un côté ou un axe* peut être assimilé à un préconcept de la symétrie axiale, ou encore *glisser (dans le plan) le long d'un trait* peut être assimilé à un préconcept de la translation. Nous reviendrons sur les descriptions de ces déplacements en détail dans l'analyse *a priori* décrite plus loin dans l'article. Précisons d'ores et déjà que la pertinence de prendre de telles hypothèses de travail sera également reprise en discussion à la fin de l'article. Ce que nous cherchons à décrire ici, du point de vue du chercheur, porte sur quels préconcepts (tour, glissement, retournement[9], composées de ces différents déplacements, etc.) sont observés : comment ces déplacements pensés *a priori* (et qui sont donc apparentés ici à des préconcepts des transformations du plan) sont observés *a posteriori* ? Sous quelles conditions et contraintes et avec quelle fréquence d'apparition ?

Le point de vue d'enseignant questionne plutôt l'intérêt de cette activité en tant que situation d'enseignement : nous analyserons les potentialités qu'offre ce protocole expérimental, prévu au départ à des fins de recherche, pour travailler des notions explicitement visées par les programmes concernant le repérage et le déplacement dans le plan (Cycle 2) :

> *« - situer un objet par rapport à soi ou à un autre objet, donner sa position et décrire son déplacement ;*
> *- enrichir les connaissances en matière d'orientation et de repérage (repérer des cases, des nœuds de quadrillage)*
> *- percevoir des propriétés : alignement / axes de symétrie / égalité de longueurs*
> *- reconnaître et décrire des déplacements dans le plan*

[9] Précisons que le retournement est un geste qui s'ancre dans l'espace.

- *travail sur les objets géométriques à partir des connaissances spatiales.* » (BO des programmes de l'École Primaire, 2008)

Le matériel et les règles du jeu

Le jeu se compose d'un plateau plastifié de format A4 partagé en cases de forme triangulaire (triangles équilatéraux[10] numérotés aléatoirement et soulignés pour éviter des malentendus - Annexe 1), d'un triangle équilatéral opaque, orange (recto-verso), de 6 cm de côté qui est parfaitement superposable avec chacune des cases du réseau triangulaire (ce triangle mobile est appelé Triangle-Acrobate car il doit toujours rester en contact avec le plateau) et une feuille de route (Annexe 2) pour écrire les parcours (qui concerne la phase 2 explicitée plus loin).

Dans un premier temps, un plateau et un Triangle-Acrobate orange sont placés sur chaque bureau d'élève de manière à ce que chaque élève découvre le matériel en s'installant à sa place. Il est ensuite explicité aux élèves que le jeu consiste en des déplacements du Triangle-Acrobate sur le plateau mais celui-ci doit toujours être en contact de quelque manière que ce soit avec le plateau et en particulier, il sera toujours positionné exactement sur l'une des cases du plateau. On laisse les élèves manipuler librement pendant quelques minutes. Le but du jeu est énoncé : « *Le jeu va consister à déplacer ce Triangle-Acrobate d'une case à une autre. Et tu auras réussi si tu arrives à le faire bouger le moins possible* ». Un premier parcours est donné : « *Comment est-ce que je peux déplacer mon triangle de la case 21 à la case 9 en le faisant le moins bouger possible ?* » Puis seront traités les déplacements de 21 à 15 et 21 à 13. Les règles ne sont pas écrites au tableau et on ne montre pas les déplacements avec les mains. La consigne est seulement verbale.

Cadre théorique et méthodologie : analyses *a priori* / *a posteriori*

Rappelons que cette situation est pensée *a priori* du point de vue du chercheur dans le but d'observer les préconcepts au sens de Rouche (1999) des transformations du plan (symétries, translation, rotation et composées), au début de l'enseignement obligatoire. Dans la suite de l'article, nous procéderons dans un premier temps à la présentation de l'analyse *a priori* détaillée de l'ingénierie, au sens de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau (1998) en termes de variables didactiques, milieu, procédures des élèves, contrat, etc. Puis, dans un deuxième temps, nous détaillerons l'analyse *a posteriori* à partir de l'observation de la mise en œuvre de cette situation dans deux classes de CE1 (en partie à partir de l'analyse des procédures observées des élèves). À partir de cela, nous essaierons d'apporter des éléments de réponse aux questions précédemment déclinées selon deux angles complémentaires : celui de l'existence et de la description de préconcepts des transformations du plan et celui de son intérêt en classe de mathématiques, du point de vue de l'apprentissage de savoirs géométriques.

Analyse *a priori* de la 1ère phase expérimentale

Précisons que d'après les entretiens menés auprès des enseignants des classes que nous avons observées, les élèves disposaient des connaissances pour entrer dans le jeu : connaissances liées à l'orientation et le repérage (repérer des cases, des nœuds de quadrillage), et reconnaissance de formes géométriques simples (triangle) et des nombres

[10] Ce réseau triangulaire s'inspire du « damier » de Houdement et Peltier (2003).

utilisés ici comme repères, bien que toutes ces connaissances soient encore en cours d'acquisition étant donné le jeune âge des élèves.

Dans un premier temps, nous décrirons les stratégies «optimales » possibles d'un point de vue mathématique (en termes de transformations du plan) en fonction des variables didactiques retenues. Puis nous discuterons de l'accessibilité de ces stratégies aux élèves.

Les variables didactiques

- **La nature du support** : nous avons choisi un réseau triangulaire pour s'affranchir de la mémoire du travail déjà réalisé sur des quadrillages et au moins partiellement de l'influence des axes verticaux et horizontaux en lien avec la symétrie axiale (Grenier, 1988).
- **Le choix du couple (Départ, Arrivée)** : par exemple, le déplacement de la case 21 à la case 9 semble induire plus naturellement une rotation, de même le déplacement de 21 à 15 semble induire plus naturellement une translation du fait de l'alignement des triangles selon un axe du réseau. De ce choix découle la position des triangles qui composent le plateau (par rapport aux bords du plateau que l'on peut supposer constant) : si, par exemple, la case triangulaire de départ est orientée dans la même position que celle d'arrivée, cela induira ou non le fait de devoir tourner le triangle (ce qui est le cas par exemple pour le parcours de 21 à 9).
- **La couleur entre les faces du Triangle-Acrobate** : nous avons choisi ici de ne pas changer la couleur (orange). Si nous avions distingué par la couleur les deux faces du Triangle-Acrobate, cela aurait pu induire la recherche de la couleur de la position initiale et aurait donc eu une influence sur le choix des déplacements avec ou sans retournement. *A contrario*, le fait de ne pas distinguer les faces nous empêche de voir si le Triangle-Acrobate a été à un moment donné retourné (ce qui pourrait être l'objet d'une autre recherche).
- **Les contraintes de déplacement (qui sont évolutives au cours du jeu)**

  - La contrainte *le faire bouger le moins possible* offre *a priori* différentes interprétations possibles, ce qui va influencer les procédures des élèves. En effet, qu'est-ce qui définit qu'un déplacement fait bouger plus le Triangle-Acrobate qu'un autre ? S'agit-il de l'espace occupé par le triangle (nombre de cases ?) ou bien s'agit-il du nombre de mouvements (rotation puis translation par exemple) ? Comment l'évaluer ? Dans la première phase de travail proposé aux élèves, cette contrainte est restée « ouverte », c'est-à-dire que nous n'avons pas imposé une interprétation, mais nous y reviendrons par la suite. Le fait de devoir trouver le moyen de faire bouger le moins possible implique également la nécessité d'une certaine anticipation hypothétique dans le choix de la procédure (chercher s'il y a d'autres déplacements possibles par exemple pour pouvoir comparer : mais sous quels critères ? Ceci reste ouvert dans la première phase de recherche du jeu).

  - La contrainte *rester en contact* peut également influencer les élèves à « tenir » le Triangle-Acrobate ou du moins essayer de le fixer au plateau.

  - La contrainte de positionner toujours le triangle *exactement* sur l'une des cases du plateau peut également amener l'élève à faire davantage de rotations (permettant de superposer exactement la case d'à côté) qu'une translation par exemple.

- Le nom du jeu *Triangle-Acrobate* peut suggérer chez les élèves des mouvements inspirés des acrobates du cirque (le retournement par exemple qui peut être perçu comme un saut).

- Enfin, il est interdit d'écrire sur le plateau : ce qui empêche de garder une trace avec des signes personnels de leur recherche durant la première phase du jeu et pousse à utiliser un langage écrit dans la deuxième phase du jeu dans le tableau de l'Annexe 2.

Les stratégies optimales (point de vue mathématique)

- **de 21 à 9**

D'après les variables citées précédemment (dont le choix du couple (départ, arrivée)), la rotation autour d'un sommet commun et d'angle 60°, dans le sens horaire ou trigonométrique en fonction du sommet commun, est une procédure qui semble tout indiquée (voir par exemple la figure 1 précédemment).

On peut cependant penser à d'autres procédures valides :

- translation le long du bord « horizontal », puis rotation (ou plusieurs) d'angle 60° (ou $n \times 60°$, avec n entier, autour du centre[11] du triangle, et translation « verticale » (les deux dernières actions pouvant être effectuées en même temps) ;
- retournement du triangle par rapport au côté commun (9 est alors l'image de 21 par une symétrie axiale d'axe ce côté commun ; 21 et 9 forment un losange).

On pourrait également élargir en pensant à tous les déplacements où le triangle passerait par d'autres cases (par exemple : une rotation - dans le sens horaire ou trigonométrique - autour du centre de l'hexagone formé des triangles 21, 32, 15, 13, 22 et 9) mais dans ce cas, le déplacement n'est pas minimal.

- **de 21 à 15**

De même ici, d'après les variables retenues, la translation dans la direction de la droite sur laquelle se trouvent un côté de 21 et un côté de 15 semble apparaître comme la procédure attendue.

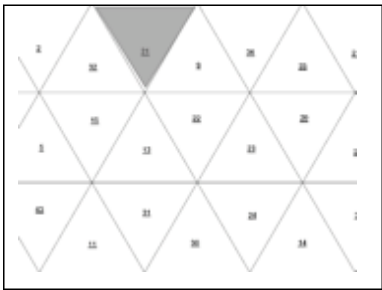
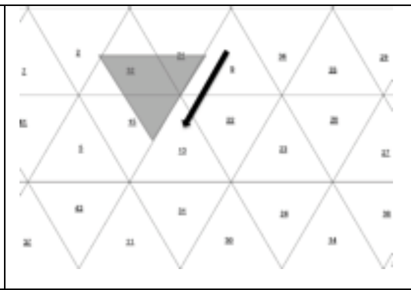
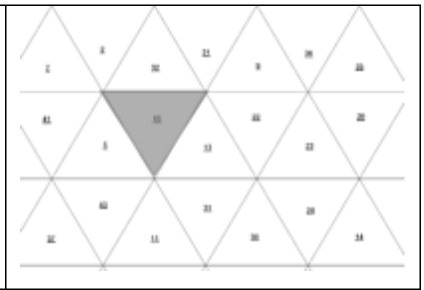
		
Position de départ : case 21	Déplacement par translation le long d'un axe du réseau	Position d'arrivée : case 15

Figure 2. Exemple de déplacement possible et optimal : de la case 21 à 15.

[11] Ici, ledit « centre » du triangle concerne une zone du triangle qui peut être pointée par l'enfant qui se situe autour du centre de gravité du triangle.

D’autres types de procédures valides peuvent également être anticipés :

- symétrie axiale par rapport au côté commun 21-32 puis par rapport au côté commun 32-15 ;
- rotation de centre le sommet commun 21-15 ;
- translation verticale puis horizontale.

- **De 21 à 13**

D’après le choix du couple (départ, arrivée), la rotation (demi-tour) autour du centre de l’hexagone défini précédemment apparaît comme la procédure la plus indiquée. Encore une fois, on peut également penser à l’apparition d’autres types de procédures, notamment sous l’influence des parcours précédents :

- translation verticale puis rotation d’angle 60° autour du centre du Triangle-Acrobate ;
- translation le long d’un côté qui se prolonge puis rotation d’angle 60° autour du centre de l’hexagone;
- retournement (dans l’espace) du Triangle-Acrobate par rapport au sommet commun (nous indiquons ce déplacement bien qu’il ne corresponde pas à une transformation mathématique du plan car elle apparaîtra dans les procédures des élèves).

Précisons que nous avons décrit ici, pour les différents parcours envisagés, les différents déplacements possibles et optimaux pour réaliser le jeu d’un point de vue mathématique. Ce qui nous intéresse de voir maintenant *a posteriori*, c’est si effectivement ces déplacements vont être mobilisés par les élèves et de quelles façons. Autrement dit, lorsqu’ils tourneront le triangle acrobate pour aller d’une case à une autre : prendront-ils un centre précis ou tourneront-ils de manière aléatoire ? De même pour la translation : glisseront-ils aléatoirement le triangle de façon plus au moins « droite » afin de réaliser le plus court chemin ? Est-ce que les élèves penseront à *retourner* le Triangle-Acrobate (geste associé à la symétrie axiale) ? Ce qui nous intéresse aussi c’est de savoir si la réalisation de ce jeu peut être mise au service d’un apprentissage géométrique, ce qui est l’objet des paragraphes suivants.

Quel milieu d’apprentissage ?

Durant cette première phase, les rétroactions avec le milieu au sens de la TSD, sont faibles. En effet, quels que soient les essais de déplacement sur le plan, l’élève n’a aucun moyen de savoir si le déplacement qu’il a opéré est correct ou répond aux contraintes posées. L’élève n’a aucun moyen de valider sa procédure à ce stade de la situation (hormis si l’enseignant surveille sa procédure). D’autre part, les stratégies optimales (gagnantes) visées (déplacement du type tourner, glisser ou retourner) ne mobilisent pas un savoir mathématique clairement identifié en tant que tel à ce niveau de classe ; on considère certes par exemple que tourner autour d’un nœud est un préconcept de la rotation mais un préconcept n’est pas considéré comme un savoir mathématique (voir Rouche (1999) cité en début d’article) et ici il ne revêt donc pas ce statut. De ce point de vue, la situation observée ne présente pas *a priori* un potentiel didactique fort. Seule la confrontation entre deux procédures différentes peut permettre à l’élève de se rendre compte si sa procédure est optimale ou non (d’où l’intérêt des phases de mise en commun pour dégager des critères et l’intérêt de la phase 2 que nous décrivons plus loin dans l’article). Pour autant, étant donnée la faible rétroaction du milieu, cette situation est-elle dénuée d'intérêt du point du travail de connaissances en cours d'acquisition qui portent sur le repérage et le déplacement dans le plan (réseau de droites, cases, nœud, parcours) ? Ceci est l'objet du paragraphe suivant que nous développerons également dans l'analyse *a posteriori*.

Des connaissances mathématiques en jeu ?

Cette situation n'est pas une ingénierie didactique au sens où l'on vise la genèse artificielle d'un savoir nouveau. Elle s'apparente malgré tout à une ingénierie didactique d'un point de vue méthodologique :

> *« Être une méthodologie basée sur des réalisations didactiques en classes, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement. Être une méthodologie dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori (et non externe basée sur la comparaison de performances de groupes expérimentaux et témoins). »* (Artigue, 2010, p. 20)

Rappelons que les visées d'une ingénierie didactique peuvent être de nature différente :

> *« - recherches qui visent l'étude de processus d'apprentissage d'un concept donné et donc en particulier l'élaboration de genèses artificielles pour un concept donné ;*
>
> *- recherches aux contenus transverses même si leur support est l'enseignement d'un domaine précis ;*
>
> *- travaux visant le domaine paramathématique* (Chevallard, 1991, p. 49) *c'est-à-dire celui de ces notions qui, comme celles de paramètres, d'équation, de démonstration, gardent un statut d'outil dans l'enseignement, au moins à un niveau donné ;*
>
> *- travaux visant l'étude et la mise en place de stratégies didactiques globales : problème ouvert, débat scientifique, etc. »* (Artigue, 1988, pp. 286-287, citant Douady, 1987)

Notre situation ne s'inscrit donc pas dans la première catégorie mais peut s'apparenter à la deuxième car elle mobilise *a priori* des connaissances mathématiques propres au repérage dans le plan (surtout dans la phase 2) bien que la situation concerne les préconcepts des transformations du plan : « situer un objet par rapport à soi ou à un autre objet, donner sa position et décrire son déplacement ; enrichir les connaissances en matière d'orientation et de repérage (repérer des cases, des nœuds de quadrillage) » (BO des programmes de l'École Primaire, 2008). En effet, durant la phase 1, l'élève doit déplacer le triangle d'une case à une autre sous certaines conditions, et, durant la phase 2, l'élève doit décrire et anticiper son déplacement (voir plus loin dans l'article le déroulement de la phase 2) ce qui implique des connaissances propres aux repérages dans le plan comme celles citées par les programmes précédemment.

On peut également admettre que cette situation concerne également la dernière catégorie des types d'ingénierie car il s'agit d'un jeu qui admet plusieurs procédures possibles dont la validité va être discutée lors de la mise en commun et de la phase 2. En particulier, les procédures visées par le jeu sont à rapprocher de celles que l'on peut retrouver dans des situations visant la comparaison de deux figures dans le plan, comme les situations dites « Pareils, pas pareils » (ERMEL, 2006, p. 344) ou « Le puzzle unicolore ou non » (*Ib.*, p. 353). Cela est un choix assumé de l'ouvrage ERMEL :

> *« À l'école primaire, on peut poser des problèmes relatifs à l'isométrie sans se référer à l'idée de transformation géométrique. Bien avant le cycle 3, les élèves réalisent par empreinte la copie d'une face d'un solide et reproduisent une forme à l'aide d'un gabarit ou d'un calque. En référence à ces expériences, la question : « Ces deux objets sont-ils pareils ou pas pareils ? » signifie « L'un est-il une copie de l'autre ? », ou « L'un pourrait-il, par déplacement, être amené en coïncidence avec l'autre ? » Dans ces formulations, on se réfère au mouvement, en général de faible amplitude, de l'objet lui-même, du calque ou du gabarit. L'utilisation du mouvement se retrouve dans la procédure de comparaison par déplacement mental des objets. »* (*Ib.*, p. 332)

Dans le jeu du Triangle-Acrobate, il ne s'agit pas de comparer deux figures planes mais d'exploiter la superposition admise du triangle équilatéral avec chacune des cases du plateau pour permettre l'étude des différents déplacements possibles (et décrits précédemment dans l'analyse *a priori*). L'un des choix d'ERMEL par la suite est justement d'exploiter l'un de ces déplacements : la relation entre le retournement et la symétrie axiale (*Ib.*, p. 335).

Analyse *a posteriori* de la phase 1 : analyse des procédures des élèves

Les conditions expérimentales

Nous avons testé cette situation dans deux classes du centre-ville de Bordeaux en avril et mai 2010[12]. L'une des classes que nous nommerons la classe A comportait 15 élèves et la classe B en comportait 22. Dans chacune des classes, la séance dura environ 1h. Dans la classe A, nous avons globalement réussi à filmer l'activité de tous les élèves à chaque parcours proposé lors de la phase 1 ainsi que la mise en commun qui a suivi. Dans la classe B, les élèves étant plus nombreux, nous avons pu filmer une majorité d'entre eux mais pas la totalité de la classe. Les deux séances ont été menées conjointement par l'enseignant et le chercheur présent (la passation de consigne, le passage parmi les élèves en phase de recherche et la mise en commun). Aux yeux des élèves, l'enseignant et le chercheur avaient donc le même rôle. Précisons que l'enseignant connaissait les enjeux de la recherche.

Quels observables ?

L'analyse *a posteriori* porte sur l'observation et la description des procédures effectives des élèves dans le but de confronter ces observations avec nos prévisions : quel(s) déplacement(s) va (vont) être effectivement mobilisé(s) par les élèves ? De quelle manière ? Sous quelles contraintes ? À quelle fréquence ?

Les procédures effectives des élèves lors de la phase 1

<u>21</u> à <u>9</u> : prégnance des rotations

Dans la classe A, les gestes des élèves observés correspondent globalement bien à ceux que nous avions apparentés *a priori* aux préconcepts d'une rotation. Beaucoup d'élèves

---

[12] Nous tenons à remercier vivement Élodie et Sandra pour leur accueil dans les classes bordelaises et pour leur intérêt pour cette recherche. D'autres expérimentations ont eu lieu également dans des classes de même niveau en Italie, mais cet article n'en rendra pas compte ici : voir (Bulf, Marchini, Vighi, soumis).

font tourner le Triangle-Acrobate en fixant un sommet du triangle positionné sur un nœud du réseau triangulaire (voir R1, Fig. 3), d'autres vont plutôt déplacer le triangle en le faisant pivoter sur lui-même par rapport à son centre soit d'un angle de 60° (ou $n \times 60°$, n entier) soit en lui faisant faire plusieurs tours (voir R2, Fig. 3).

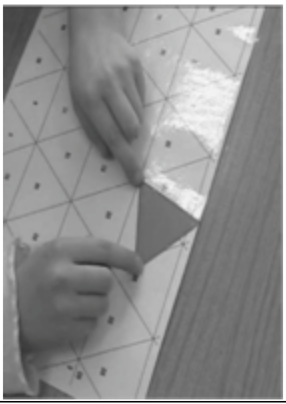
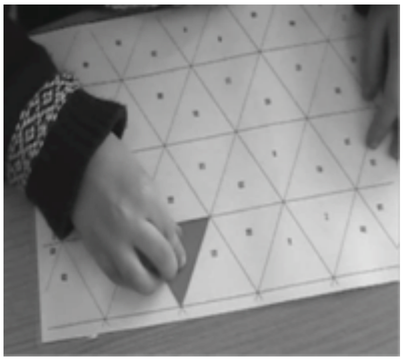
	
R1 : Rotation en tenant un sommet fixe du Triangle-Acrobate positionné sur un nœud du réseau triangulaire	R2 : Rotation en faisant pivoter le triangle sur lui-même par rapport à son centre

Figure 3. Capture d'écran des gestes observés des élèves associés à la rotation (pour le parcours de 21 à 9)

On peut s'interroger sur ces gestes : pourquoi fixer un sommet du triangle ? Est-ce que cela vient de la contrainte *ne doit pas quitter le plateau* ? Quoi qu'il en soit, on constate une reconnaissance et une appropriation dans l'action des nœuds du réseau triangulaire comme repère fixe pour faire tourner le Triangle-Acrobate.

Dans la classe B (cette fois l'ordre était d'aller de 9 à 21) on observe également une prégnance des déplacements par rotation selon les mêmes variantes (seules les mesures d'angles peuvent varier ou les sommets fixés sont différents). Nous n'avons pas pu l'observer au moment de la recherche individuelle mais un élève a proposé durant la mise en commun qui a suivi (après avoir cherché tous les autres déplacements), un retournement par un côté. Cette idée lui est peut-être venue après avoir également discuté sur tous les autres déplacements lors de la mise en commun.

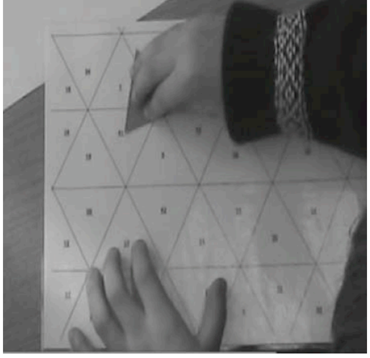


Figure 4

L'un des points intéressants à relever concerne le rôle de l'orientation des triangles. L'invariance de la position du triangle par rotation autour du centre et de mesure d'angle un multiple de 60°, est très souvent mobilisée (R2, Fig.3) mais au cours de certains déplacements, il semblerait que certains élèves cherchent à donner un sens au déplacement du triangle comme s'il s'agissait d'une petite voiture (*avant/arrière*). À titre d'exemple, la capture d'écran ci-contre (Fig. 4) prise lors de la phase 2 où l'élève a choisi l'un des sommets du triangle comme « avant » du triangle lors de son déplacement.

En comparant ces observations avec l'analyse *a priori*, on retrouve bien les stratégies mathématiques optimales prévues concernant les déplacements par rotation, en revanche, aucun élève à ce stade (quelle que soit la classe A ou B) ne semble avoir retourné le Triangle-Acrobate.

21 à 15 : une pluralité de gestes observés et un embryon de geste associé à la symétrie axiale

Sur 14 élèves observés de la classe A, on observe les déplacements suivants :

- 7 translations le long du côté commun (voir Fig. 2).
- 5 rotations (d'angles différents).
- 2 intermédiaires (composée de translation et de rotation).

Dans un premier temps, il est intéressant de remarquer que plusieurs procédures différentes sont observées (translation, rotations et composées). Dans le cas de la translation, les élèves s'appliquent pour bien suivre l'axe commun aux deux triangles 21 et 15. Quant à ceux qui préfèrent faire une rotation, on observe les mêmes gestes que précédemment : l'élève fixe un sommet avec un de ses doigts sur un des nœuds du réseau triangulaire ou bien fait tourner le Triangle-Acrobate par rapport au centre. Lorsque les élèves font deux rotations successives de 60° de centre différents, ils changent de point fixe et marquent le changement de rotation par une brève pause entre les deux. D'autres élèves ont quant eux remarqué qu'ils pouvaient se suffire de fixer un seul nœud (le nœud commun à 21, 32 et 15) et ne font ainsi qu'une seule rotation d'angle 120°.

Relatons ici un débat intéressant entre deux élèves voisins, l'un ayant fait d'abord une rotation et l'autre une translation :

> *ELV1 : au début t'avais fait comme ça* (il mime une rotation incertaine de 60° de 21 vers 15 sans fixer de sommet en faisant pression sur le triangle par son centre)
> *ELV2 : puis après moi j'ai fait comme ça* (il mime la translation)
> *CHERC : pourquoi c'est mieux la nouvelle méthode ?*
> *ELV1 : moi je me suis rendue compte que ceci* // (il place le triangle sur 21) // *celle-là comme méthode* / (il fait une rotation de centre le sommet commun à 15 et 21, fixe le centre avec son doigt et fait la rotation d'angle 120°) *était un peu [inaudible] que celle-ci*
> (il mime la translation)
> *CHERC: pourquoi ?*
> *ELV1: je trouvais que ça faisait plus de trajets / ça* (mime rotation) *c'est plus difficile que de faire ça* (mime translation).

Apparaît donc ici l'existence de plusieurs procédures possibles et donc la nécessité de trancher sur des critères de comparaison afin de déterminer la validité de ces procédures (ce qui sera fait durant la mise en commun).

Dans la classe B, on observe également une majorité de translations le long du même axe. Un certain nombre d'élèves proposent également différentes composées de rotations : successions de deux rotations de 60° de centres différents ou une rotation de 120° de centre le sommet commun entre 21, 32 et 15.

Donc, jusque-là, le comportement des élèves de la classe B est tout à fait semblable à celui observé pour les élèves de la classe A. Pourtant un élève de la classe B va proposer un déplacement nouveau : il va retourner le Triangle-Acrobate en maintenant fixe un des sommets avec le nœud commun aux cases 21, 32 et 15. Ce geste ne sera observé dans la classe A que pour le déplacement suivant (21 à 13). Qu'est-ce qui a fait que cet élève a fait ce geste à ce moment-là ? Nous ne sommes pas en mesure d'y répondre. En revanche, ce que nous pouvons dire par rapport à l'analyse *a priori* c'est que les translations et composées de rotations sont bien apparues comme prévu. D'autres composées intermédiaires (moins fréquentes) de rotation et translation ont également été observées dans les deux classes. En revanche, aucun retournement par rapport à un côté n'a été observé.

Pour une grande majorité des déplacements observés, on relève une prise en compte des nœuds (comme centre de rotation pour fixer un sommet du triangle et le faire tourner) ou des réseaux de droites (pour suivre un glissement) ou des cases (pour décomposer par exemple leur geste en plusieurs rotations : rotation de 21 à 32 puis rotation de 32 à 15).

21 à 13 : une grande pluralité des gestes et quelques retournements

Dans la classe A, sur 15 élèves observés, on constate les déplacements suivants :

- Demi-tour dans le plan : 5
- Translation verticale puis rotation(s) : 4
- Translation le long d'un côté puis rotation(s) : 3
- Composées de rotations : 2
- Retournement par un sommet (dans l'espace): 1

Sur les 15 élèves observés, seulement 5 font clairement un demi-tour dans le plan. Une majorité des élèves font plutôt une composée de translation et rotation(s) en commençant par une translation le long de la verticale. Relevons une procédure intéressante qui apparaît pour la première fois dans la classe A, c'est la procédure dite du retournement (contrairement au demi-tour qui reste dans le plan) par rapport à un sommet. Il est intéressant de relever que cet élève n'arrive pas à expliciter pourquoi cette procédure est valide (car le sommet reste bien ici en contact avec le plateau) :

CHERC: tu peux me remontrer ce que tu as fait ?
(L'élève s'exécute en tenant le triangle de ces deux mains des deux côtés et en retournant ce dernier tout en maintenant en contact le sommet commun entre 21 et 13 en contact avec le triangle orange).
CHERC: super // est-ce que tu es toujours en contact avec le plateau-là ? Qu'est-ce qui est toujours en contact avec le plateau ?
ELV3 : l'acrobate
CHERC : oui / comment il est toujours en contact ?
ELV3: heu // mmmmh //
CHERC: comme tu as fait / t'as respecté la règle du jeu car il y avait toujours quelque chose en contact avec le plateau / Tu peux me montrer ce que c'est ?
ELV3: ++ le plateau
CHERC: vas-y/ refais le déplacement que tu as fait tout à l'heure ?
L'élève refait son retournement.
CHERC: super/ alors là qu'est-ce qui est toujours resté en contact ?
ELV3: l'acrobate
CHERC: ouais / mais y a un bout qui a décollé ?
ELV3: heu
CHERC: c'est pas grave / c'était très bien //

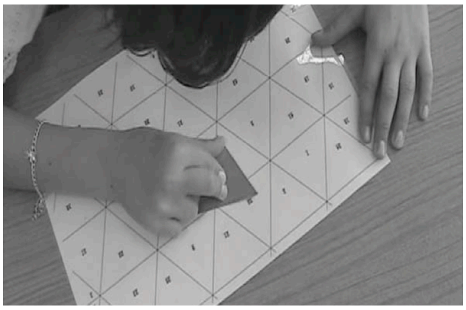


Figure 5

Lors du geste associé à la translation, on constate encore une fois qu'une élève se sert du sommet du Triangle-Acrobate comme d'une flèche qu'elle fait suivre le long d'un trait (Fig. 5).

Dans la classe B, on constate qu'un nombre plus important d'élèves (par rapport à la classe A) proposent le retournement (dans l'espace) comme déplacement possible. Un certain nombre d'élèves n'hésitent pas à montrer plusieurs déplacements possibles (demi-tour dans le plan par exemple et un retournement par un sommet dans l'espace). On observe également, tout comme dans la classe A, un nombre important de composées de translation et rotations, avec une tendance à d'abord rechercher la verticalité (par rapport aux bords de la feuille). De manière générale, les procédures observées pour ce dernier parcours sont tout à fait cohérentes avec ce que nous avions prévu *a priori*. Précisons que l'on remarque une plus grande variété des déplacements proposés par les élèves que dans les deux autres cas ; cela peut venir du choix du couple (départ, arrivée) mais également de la plus grande familiarité avec le jeu à ce moment-là.

Que retient-on de cette analyse *a posteriori* ?

On peut faire le constat de l'existence de diverses procédures possibles qui nous renseignent sur ce que nous avons appelé des « préconcepts des transformations du plan ». Ceci reflète donc une perception différente et riche qu'ont les élèves, dans ce type de situation, en fonction des variables didactiques prédéfinies. En particulier, on constate que le retournement dans l'espace par un côté n'est pas un geste fréquent alors que le retournement par rapport à un sommet est lui apparu plus fréquemment dans ce contexte expérimental. On peut se demander dans quelle mesure la contrainte de *rester en contact avec le plateau* a freiné ce geste. Pourtant le retournement par rapport à un côté sera généralement exploité en classe par la suite à travers notamment le geste du pliage comme une première approche de la symétrie axiale. Par ailleurs, nous avons pu constater que la verticalité (par rapport au bord du plateau) influençait déjà les gestes des élèves (et sera plus tard un obstacle à la symétrie axiale). Une pluralité des gestes associés à la rotation et à la translation voire même à des composées des deux est également observée. On peut se demander si l'ordre des tâches données a pu influencer l'apparition de ces gestes étant donné que les premiers parcours demandés favorisaient l'apparition de rotations et de translations.

On peut maintenant s'interroger sur l'intérêt de l'existence de ces gestes et s'il convient de les exploiter dans une perspective didactique (ici attachées aux connaissances géométriques liées au repérage et au déplacement dans le plan). Une perspective envisageable sur laquelle nous reviendrons en fin d'article concerne un travail sur la gestion des éléments[13] de différente dimension du plan considéré, c'est-à-dire les cases de

[13] Nous nous inspirons de la classification des éléments géométriques selon leur dimension au sens de Duval (2005).

dimension 2D, le réseau de droites de dimension 1D et les points de dimension 0D (nœuds). Nous avons choisi cette catégorisation notamment dans la perspective de faire le lien (en fin d'article) avec le travail de Duval et Godin (2005) sur « le changement de regard de la figure » et qui est, selon les auteurs, l'un des enjeux de la géométrie enseignée à l'école primaire. En effet, compte tenu de nos observations, on constate la nécessité dans l'action de prendre en compte des éléments de différentes dimensions pour assurer les gestes des élèves :

- la dimension 3D peut être considérée lorsque les élèves appliquent un retournement du triangle par un sommet ou un côté;
- la dimension 2D se trouve dans l'usage global des cases triangulaires ou dans celui du Triangle-Acrobate (surface entière ou une sous-partie, un coin par exemple) ;
- la dimension 1D peut être considérée dans l'usage des droites ou réseaux de droites notamment en jeu avec la translation ;
- la dimension 0D se trouve dans l'usage des nœuds du réseau et/ou des sommets du triangle en jeu notamment avec les rotations ou le retournement.

On constate ainsi la mobilisation de certains éléments invariants, caractéristiques des isométries (le *centre* d'une rotation, l'*axe* d'une symétrie) comme repères pour assurer les gestes des élèves accompagnant le déplacement du triangle acrobate dans ce réseau triangulaire. Aussi, sans tomber dans une dérive du type « effet Jourdain » (Brousseau, 1998, p. 53) qui consisterait à reconnaître des traces d'une activité mathématique alors qu'il s'agit de geste anodin de l'élève, on peut se demander si cette situation peut favoriser un travail autour de la manipulation des éléments de différentes dimensions du plan qui participe plus généralement à éduquer le regard des élèves, d'un point de vue géométrique. Nous reviendrons sur une telle perspective en fin d'article. Nous proposons maintenant dans la partie suivante une analyse de la phase 2 du jeu.

La phase 2 : comptage des coups par groupe de 2

Bilan de la mise en commun, avant de commencer la phase 2

Avant de passer à la phase 2, une mise en commun est menée par l'enseignant et le chercheur à l'issue de la phase 1 afin de recenser les différentes procédures des élèves. Cette mise en commun est l'occasion de recenser et formuler les différentes procédures observées et notamment d'exhiber la difficulté de mesurer laquelle fait bouger le moins possible le triangle acrobate. En particulier, cette mise en commun permet de pointer la nécessité d'identifier les déplacements possibles autorisés (c'est-à-dire répondant aux différentes contraintes de déplacement correspondant aux règles du jeu) et de trouver un moyen de les comparer. L'idée de compter ces déplacements est apportée par le chercheur (car elle n'a pas émergé du groupe ; elle aurait pu être apportée lors d'un débat ou bien par l'enseignant directement). Il serait intéressant et nécessaire de montrer comment les élèves sont arrivés à se mettre d'accord sur les formulations pour désigner les différents déplacements autorisés mais cela est une autre piste de recherche que nous n'avons pas (encore) exploitée. Précisons tout de même que l'enseignant et le chercheur ont aidé à la formulation finale des déplacements en demandant de préciser davantage certaines propositions. Par exemple, pour définir le deuxième déplacement autorisé dans la classe A (Fig. 6), voici un extrait des échanges :

CHERC: ensuite
ELV1: déplacer
CHERC: déplacer // c'est-à-dire // comment tu peux faire //
ELV1: glisser
CHERC: glisser // comment tu le fais glisser // Comme ça // (mime un glissement aléatoire).
ELVS : non
CHERC: ah // comment on fait
ELV1: on prend par le trait // et on fait comme ça (l'élève mime dans l'air un déplacement en diagonale).

Aussi, la richesse des échanges et du vocabulaire mobilisé par les élèves a permis, durant la mise en commun, dans la classe A et dans la classe B, de lister quatre déplacements autorisés pour la suite (Fig. 6) :

CLASSE A	CLASSE B
1. tourner en tenant un angle	*1. saut avec la pointe en contact*
2. glisser le long d'un trait	*2. le rond-point*
3. sauter en tenant un angle	*3. glissement le long d'une ligne*
4. sauter en tenant un côté	*4. un saut avec le côté en contact*

Figure 6. Bilan des déplacements autorisés déterminés à l'issue de la première mise en commun

Ce qui est très intéressant à noter c'est qu'on retrouve les mêmes déplacements validés dans les deux classes[14] et que chacun est identifié en fonction d'un repère de dimension différente (un « angle », une « pointe » : 2D ; un « trait », « ligne », « côté » : 1D ; un « point » : 0D, etc.). Le retournement par rapport à un côté (que nous avons associé à la symétrie axiale) apparaît ici comme une procédure des élèves validée alors que nous ne l'avions pas observée durant les phases de recherche individuelle : est-ce que ce déplacement est apparu aux élèves comme une procédure possible après avoir fait état des autres déplacements possibles étant donné qu'il arrive en 4[ème] position dans les deux classes ?

Un moyen d'évaluer le coût d'un déplacement est ensuite proposé à l'ensemble de la classe par le chercheur[15]: on comptera un coup lorsque le triangle passera *exactement* par une case.

Si on reprend les exemples précédents, selon les déplacements autorisés, cela donne :

- De **21** à **9** : quelle que soit la stratégie : 1 coup.
- De **21** à **15** : pour la translation, 1 coup (car le triangle ne passe pas complètement par 32). La rotation, 2 coups et le retournement par symétrie axiale 2 coups.

---

[14] Précisons que dans une des classes italiennes dans lesquelles a été testé le jeu, un déplacement supplémentaire a été formulé durant la mise en commun : le demi-tour. Nous renvoyons les lecteurs à l'article italien (Bulf, Marchini & Vighi, soumis) pour une analyse comparative plus détaillée entre les classes françaises et italiennes.

[15] Cela aurait pu être apporté par l'enseignant (cela est a priori *neutre* dans la méthodologie proposée ici).

- De **<u>21</u>** à **<u>13</u>** : retournement, 1 coup ; rotation, 3 coups et translation et rotation ou translation et symétrie axiale, 2 coups.

On peut d'ores et déjà repérer l'ambiguïté de cette proposition arbitraire car on aurait pu aussi proposer de compter en fonction du type de déplacement mobilisé : par exemple, si l'élève ne fait qu'une rotation : 1 coup, mais s'il fait une translation puis une rotation du triangle sur lui-même : 2 coups. De plus, on peut supposer que le fait de devoir compter un coup uniquement lorsque le triangle passe exactement sur l'une des cases triangulaires est complexe pour des élèves de cet âge.

L'une des variables importantes de cette nouvelle phase de jeu est la communication et le travail par groupe. En effet, les élèves sont maintenant en binôme et doivent se mettre d'accord sur un parcours. L'intérêt de cette phase est justement la formalisation de leur geste, son anticipation et la découverte d'un moyen de convaincre de sa validité.

Analyse *a priori* de la phase 2

Le but du jeu est toujours de déplacer le Triangle-Acrobate d'une case à une autre en le bougeant le moins possible et en utilisant les déplacements autorisés (et écrits au tableau durant la mise en commun ; la liste est restée écrite – Fig. 6). Durant la deuxième phase, l'idée est maintenant de compter le nombre de coups lors des nouveaux déplacements. Il est donc expliqué aux élèves qu'ils vont maintenant travailler par deux et qu'ils doivent se mettre d'accord sur un parcours qui sera le plus court possible, c'est-à-dire qui demandera le moins de coups possibles. Ils devront l'écrire sur la feuille de route distribuée (Annexe 2). Ils devront en particulier noter le départ, l'arrivée ainsi que tous les triangles par lesquels passe le Triangle-Acrobate et qui constituent le parcours. Il sera rappelé aux élèves qu'ils n'ont pas le droit d'écrire sur le plateau (afin de favoriser le processus d'anticipation).

On propose l'étude du déplacement suivant : <u>20</u> à <u>41</u>. L'une des stratégies gagnantes est la translation le long d'un axe horizontal en 3 coups (<u>22</u> – <u>15</u> – <u>41</u>). D'autres déplacements ont été proposés mais par souci d'économie de place dans cet article, nous ne traiterons que le cas de <u>20</u> à <u>41</u>.

La variable didactique jouant ici est la position des triangles de départ et d'arrivée qui sont effectivement positionnés dans le même sens et alignés (<u>41</u> est l'image de <u>20</u> par translation « horizontale »). En particulier, la solution est soutenue par un raisonnement géométrique portant sur le chemin le plus court qui est la ligne droite.

Analyse *a posteriori* de la phase 2 : les procédures des élèves

Dans la classe A, la procédure de la translation le long de la ligne horizontale apparaît majoritairement (d'après nos observations filmées et les feuilles de route remplies par les élèves). Certains élèves ont pourtant cherché d'autres procédures.

Un élève propose par exemple plusieurs types de déplacements possibles pour aller de <u>20</u> à <u>41</u> :

- un retournement non valide (le triangle décollait totalement)

- une succession de rotations (ce qui est valide mais très coûteux)

- un glissement du triangle semblable à celui d'une voiture que nous avions déjà évoqué dans la partie 1 (Fig. 4 et 5) car renvoie à des soucis de prise en compte de l'orientation (l'élève déplace le triangle sur la bande supérieure du plateau, ce qui rend très couteux le déplacement).

Ce qui est très étonnant, c'est que ce même élève fait pourtant bien la procédure attendue c'est-à-dire la translation le long de l'axe horizontal, pour faire revenir le Triangle-Acrobate à la case de départ, et ce, plusieurs fois. Pour quelle raison l'élève n'a donc pas conscience que ce geste est une procédure valide ? Est-ce dû à la recherche d'une procédure plus originale ou plus complexe pensant que c'est ce qu'attendait l'enseignant ? Ceci est notable car nous observons des comportements similaires dans la classe B.

Dans la classe B, on observe la procédure de la translation mais de manière moins prégnante que dans la classe A. On observe de manière importante des procédures qui consistent plutôt à faire passer le Triangle-Acrobate par toutes les cases entre 20 et 41 par rotation (c'est-à-dire en faisant tourner le triangle de la case 20 à 23 puis sur 22, 13, 15, 5 et enfin 41). Ce cas de figure est intéressant mais peut être interprété de deux manières différentes :

- soit les élèves ont le souci de convoquer l'une des procédures validées précédemment (appelée « rond-point » dans la classe B),

- soit les élèves cherchent à faire passer le triangle par toutes les cases exactement qui sont entre 20 et 41.

Un argument en faveur de cette interprétation est que ces élèves-là ne fixent pas un sommet sur un des nœuds, contrairement à précédemment pour faire tourner le triangle comme dans la phase 1, là, ils déplacent plus globalement le triangle de case en case comme si c'était surtout ça l'important.

Une autre procédure très répandue dans la classe B est celle qui consiste à retourner le Triangle-Acrobate pour aller de case en case. Certains élèves procèdent clairement par retournement par rapport à l'un des côtés qui correspond à un côté de la case triangulaire du plateau ou à un nœud du plateau. D'autres élèves, cherchant à être les plus rapides, font des retournements « abusifs » au sens où ils passent par exemple de la case 20 à la case 22 en retournant le triangle et en fixant le sommet avec le nœud commun aux cases 22, 23 et 20. Étant donné les contraintes du jeu et le faible degré de rétroaction du milieu (l'élève ne dispense d'aucun moyen pour valider son déplacement hormis la validation par l'enseignant), ce déplacement ne peut donc pas être invalidé. Un grand nombre d'élèves n'hésite pas à faire passer le Triangle-Acrobate dans les autres bandes du plateau (en se dégageant de la bande entre 20 et 41), afin de procéder à des retournements de grande envergure. Ce type de procédure est beaucoup plus répandu dans la classe B que dans la classe A.

De manière générale, que ce soit dans la classe A ou dans la classe B, le concept de déplacement « le plus court possible » a du mal à être opératoire d'une manière commune et partagée par tous. Certains font en effet peu de déplacements en appliquant, par exemple, un retournement « abusif » qui ne fait pas parti des déplacements autorisés mais qui ne peuvent pas être invalidés non plus car respectent les contraintes du jeu ; tandis que d'autres cherchent à faire passer *exactement* le triangle par chaque case (soit par rotation, soit par retournement) ce qui leur donne un nombre important de coups. On peut donc en conclure que ce sont les contraintes de départ qui sont mal posées étant donné le faible degré de rétroaction du milieu.

Notons également que, de manière générale, dans les deux classes, on constate un grand décalage entre les procédures observées et leur transcription écrite sur la feuille de route. Cela vient d'une part du fait que traduire un geste en termes de coups, ne va pas de soi (de manière plus générale, passer de l'oral à l'écrit est complexe) et d'autre part nous pensons que cela vient également de l'ambiguïté du comptage. En effet, la manière de compter les coups n'est pas claire : il y a confusion entre le nombre de cases par lesquelles passe le triangle *exactement* et le nombre de déplacements différents mobilisés (faiblesse que nous avions déjà évoquée *a priori*). À cela s'ajoute la complexité de comprendre la notion de passer *exactement* par la case qui n'est pas évidente pour tous. Par exemple, beaucoup d'élèves procèdent bien par translation pour aller de <u>20</u> à <u>41</u> mais tous ne proposent pas la même façon de transcrire leurs parcours sur la feuille de route :

- <u>22</u>, <u>15</u> et <u>41</u> (3 coups qui correspondent à la méthode de comptage proposé durant la mise en commun)
- <u>23</u>, <u>22</u>, <u>13</u>, <u>15</u>, <u>5</u> et <u>41</u> (6 coups qui correspondent aux cases par lesquelles le triangle va effectivement passer sans être superposé exactement).

Qu'apprend-on de nouveau par rapport à la phase 1 ?

Au-delà de l'intérêt de travailler par groupe et de chercher à formaliser sa procédure, il convient de dire que l'analyse *a posteriori* de la phase 2 met davantage en évidence les lacunes de la situation (déjà évoqués *a priori*) que la phase 1. En effet, les procédures des élèves sont plus anarchiques par rapport à celles identifiées *a priori* tout en respectant pourtant les contraintes initiales. Le faible degré de rétroaction du milieu ne permet pas aux élèves de les (in)valider ou de rechercher une autre procédure. Du point de vue du chercheur, ces procédures-là peuvent aussi bien rendre compte de préconcepts des transformations du plan car elles peuvent toutes être vues comme composées de translation, rotation ou retournement (dans l'espace). Les élèves ont-ils fait pour autant des mathématiques ? Maintenant qu'en est-il du point de vue des autres connaissances mathématiques en jeu dans cette situation (voir paragraphe plus en amont concernant le repérage et le déplacement dans le plan) ? Qu'est-ce qui permet de dire que les élèves ont fait des mathématiques durant cette séance ? Cette question peut être posée de manière plus générale bien au-delà de l'ingénierie proposée ici, car il nous semble que nous disposons finalement de peu d'indices pour trancher.

Perspectives : une situation pour aider l'élève à changer de regard sur une figure ?

Dans notre façon de décrire les procédures des élèves nous avons distingué les éléments pris en compte dans les différents déplacements sur le plateau (éléments 2D, 1D ou 0D : côtés, morceaux de plan, morceaux de triangle, lignes, points, nœuds, etc.). D'après l'article de Duval (2005) et Duval & Godin (2005), le passage d'une perception globale à une perception plus analytique de la figure (en réseau de droites et de points) ne va pas de soi pour l'élève d'autant plus que *ce changement de regard* n'est pas explicité par les programmes et n'est donc généralement pas pris en charge directement par l'enseignement (c'est-à-dire qu'il ne fait pas l'objet d'un savoir institutionnalisé). Notamment dans le dernier article cité, les auteurs (voir aussi Keskessa, Perrin-Glorian & Delplace, 2007 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013) décrivent des situations qui amènent l'élève à ce changement de regard sur la figure grâce à un jeu de variables didactiques sur le choix des figures et des instruments ainsi qu'un système de malus/bonus afin de contraindre les élèves à analyser les figures : les auteurs cherchent à créer des contraintes sur la situation telle que l'élève passera d'une perception globale 2D (incontournable car première) de la figure à une analyse en terme de réseau de droites (par prolongement de tracés, intersection de ces droites, relation d'incidence, alignement et report de longueurs) à travers des situations de gabarit ou de pochoir déchirés (« grignotés »). Il s'avère ici que, dans ce contexte expérimental, *a posteriori*, nous reconnaissons un usage différent, selon les élèves et selon certaines contraintes, des éléments de dimension inférieure du support, par exemple le retournement par symétrie axiale par rapport à un côté entraîne la considération d'un des côtés du triangle (1D) qui doit se superposer à l'un des côtés du triangle du réseau. De même, la rotation implique qu'un sommet du Triangle-Acrobate doit être superposé à l'un des nœuds du plan (0D), etc. L'élève doit donc identifier et considérer dans l'action des éléments de dimension différente (certains éléments sont d'ailleurs à la frontière 2D/1D : les bords par exemple sont d'abord identifiés comme les limites d'une zone 2D mais doivent être superposés à un trait (1D) du réseau, etc.). La question reste de savoir dans quelle mesure ce type de situation permet en effet de faire travailler les élèves à considérer les éléments de dimension différente d'une configuration et si cela les aide à « éduquer leur regard géométrique » ou à enrichir leurs connaissances géométriques liées au repérage et au déplacement dans le plan ? À ce stade de nos analyses, nous ne pouvons en dire davantage mais cela reste, selon nous, une piste à explorer.

Conclusion

Du point de vue du chercheur, d'après nos observations et analyses, nous pouvons admettre l'existence, sous certaines conditions, de certains gestes, variés et riches, répondant à ce que nous avons appelé des préconcepts des transformations du plan. Nous voulions savoir si le retournement par rapport à un axe (geste généralement travaillé par la suite) était observé. La réponse est oui, dans le cadre de notre expérimentation et sans être observé à tous les coups. Maintenant dans quelle mesure tous les autres gestes observés, vus comme des préconcepts des transformations du plan sont des germes de connaissances mathématiques ? Qu'en faire ? Comment les exploiter ? Dans quel but ? Tant de questions auxquels nos analyses n'ont pu apporter des réponses. Malgré cela, l'une des pistes qui nous semblerait intéressante à suivre serait d'exploiter les liens entre notre situation et celles décrites dans l'ouvrage ERMEL (2006) et déjà citées précédemment (« Pareil pas pareil » p. 344 et « Le puzzle unicolore ou non » p. 353). Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, l'étude des déplacements observés dans la situation du Triangle-Acrobate sont à rapprocher de ceux que l'on retrouve dans ces situations de comparaison de figures planes dont les objectifs sont d'approfondir la notion de superposabilité (permise par divers déplacements dans le plan) et de faire prendre conscience aux élèves que certaines figures sont réversibles et d'autres non (*Ib*., p. 351), ce que notre situation ne permet pas de traiter ici (le triangle acrobate, étant un triangle équilatéral, est réversible). Rappelons que nous cherchions à observer et à décrire les préconcepts des transformations du plan car ces derniers vont selon Rouche (1999) influencer le développement des « concepts formels » et celui des « objets fondamentaux » (*Ib*.) qui leur sont associés, notamment durant leur enseignement.

Cependant, nous formulons quelques limites à son exploitation en classe. D'après les procédures des élèves décrites ici, un certain flou existe finalement sur la réelle mobilisation des connaissances mathématiques. Lorsque les élèves font tourner le triangle : s'agit-il finalement d'un préconcept de la rotation ? Ou bien s'agit-il seulement d'agiter le triangle ? Lorsque celui-ci positionne son doigt sur un des sommets superposés à l'un des nœuds : s'agit-il d'un travail intéressant sur le repérage dans le plan et notamment du passage de la perception des objets géométriques de dimension 2D à 0D ou s'agit-il pour l'élève d'un moyen de « coincer » son triangle sur le plateau afin de répondre à la consigne *ne doit pas quitter le plateau du jeu* ?

Ce type d'analyse permet de s'interroger plus largement sur les situations où les élèves sont pourtant actifs et semblent s'amuser. En particulier la question de la récupération des savoirs mathématiques de ce type d'activité se pose toujours et doit toujours se poser car une situation peut paraître séduisante, voire certaines connaissances mathématiques peuvent être identifiées mais pour autant est-ce que cela provoque un réel travail mathématique chez les élèves ? Si oui, quelle récupération de quels contenus ? Il s'agit d'une question vive qui se rapproche des recherches actuellement menées dans le cas plus particulier des problèmes pour chercher (Hersant, 2008 ; Houdement 2009 ; Bulf, Celi, Coulange, Reydy, Train & Urruty, 2010).

Références bibliographiques

ARTIGUE M. (1988) Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* Vol 9/3, 281-308.

ARTIGUE M. (2010) *L'ingénierie didactique comme thème d'étude*. In : C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Éds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Actes de la XV^{ème} École d'été de didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BULF C. (2011) Les effets de l'enseignement de la symétrie axiale sur celui de la symétrie centrale : une étude de cas en France. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 31/1, 51-77.

BULF C., CELI V., COULANGE L., REYDY C., TRAIN G. & URRUTY P. (2010) La résolution de problèmes en questions - quels savoirs ou quels savoir-faire ? Quelle institutionnalisation ? *Actes du XXXVII^{ème} colloque de la COPIRELEM*.

BULF C., MARCHINI C. & VIGHI P. (soumis) Preconcetti sulle isometrie nella scuola primaria, analisi di un gioco matematico: il triangolo-acrobata. Un case-study condotto in Francia e in Italia. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*.

CASSAN (GOBERT) S. (1997) Centre de symétrie d'une figure, comparaisons de productions d'élèves de CM2 et de cinquième. *Petit x*, n°46, 55-84.

CHESNAIS A. (2012) L'enseignement de la symétrie orthogonale en 6^{ème} : des contraintes, des ressources et des choix. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 32/2, 229-278.

CHESNAIS A. (2009) *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

CHEVALLARD Y. (1991) *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné – avec un exemple de la transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

DENYS B. & GRENIER D. (1986) Symétrie orthogonale : des élèves français et japonais face à une même tâche de construction. *Petit x,* n°12, 33-56.

DORIER J.-L. & MARECHAL C. (2008) Analyse didactique d'une activité sous forme de jeu en lien avec l'addition. *Grand N*, n°82, 69-89.

DOUADY R. (1987) L'ingénierie didactique un instrument privilégié pour une prise en compte de la complexité de la classe. *Actes du congrès PME XI,* pp. 222-228.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et sciences cognitives*, n°10, 5-53.

DUVAL R. & GODIN M. (2005) les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, n°76, 7-27.

ERMEL (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes cycle 3*. Coord R. Charnay & J. Douaire, INRP. Paris : Hatier.

GERRIG R.J. (1991) Text comprehension. In R.J. Sternberg & E.E. Smith (Eds.) *The Psychology of Human Thought*, pp. 244 - 245. Cambridge: CUP.

GORLIER S. (1981) Deux activités à l'école maternelle sur le temps et l'espace. *Grand N*, n°23, 53-61.

GRENIER D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

GRENIER D. & LABORDE C. (1988) *Transformations géométriques – Le cas de la symétrie orthogonale*. In : G. Vergnaud, G. Brousseau, & M. Hulin (Éds.) *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*. Actes du colloque de Sèvres Mai 1987, pp. 65-86, Grenoble : La Pensée Sauvage.

HERSANT M. (2008) Problèmes pour chercher : des conduites de classes spécifiques. *Grand N*, n°81, 57-75.

HOUDEMENT C. (2009) Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* n°14, 31-59.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (1998-99) Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x*, n°51, 5- 21.

HOUDEMENT C. & PELTIER M.-L. (2003) Assemblages de triangles équilatéraux. *Carnets de la COPIRELEM – Concertum*, pp. 153-160.

JAGODA E. (2009) Substantial learning environment "Tiles". *Didactica Mathematicae*, 32, 121 -147.

KELLER O. (2004) *Aux origines de la géométrie : le paléolithique et le monde des chasseurs cueilleurs*. Paris : Vuibert.

KELLER O. (2006) *Une archéologie de la géométrie : la figure et le monde : peuples paysans sans écriture et premières civilisations*. Paris : Vuibert.

KESKESSA B., PERRIN-GLORIAN M.-J. & DELPLACE J.-R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3, une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N*, 79, 33-60.

KUZNIAK A. (2009) Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de scolarité obligatoire en France. In : A. Gagatsis, A. Kuzniak, E. Deliyianni, L. Vivier (Éds) *Chypre et France, Recherche en Didactique des Mathématiques, premier colloque Franco-Chypriote de Didactique des Mathématiques*, pp. 71-89.

LIMA I. (2006) *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs – Étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

MARCHINI C. & VIGHI P. (2009) Can we develop geometrical understanding by focusing on isometries? A teaching experiment by the means of geometrical artefacts. *Proceedings SEMT '09*, 169-176.

MARCHINI C. & VIGHI P. (2011) Innovative early teaching of isometries. *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 7), pp. 547-557.

MIYAKAWA T. (2005) *Une étude du rapport entre connaissance et preuve : le cas de la notion de la symétrie orthogonale*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

PELTIER M.-L., BRIAND J., NGONO B. & VERGNES D. (2010) *EuroMaths, livre du professeur CE2*. Paris : Hatier.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C. & LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères IREM*, 90, 5-41.

PIAGET J. & INHELDER B. (1947) *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris : PUF (édition 1977).

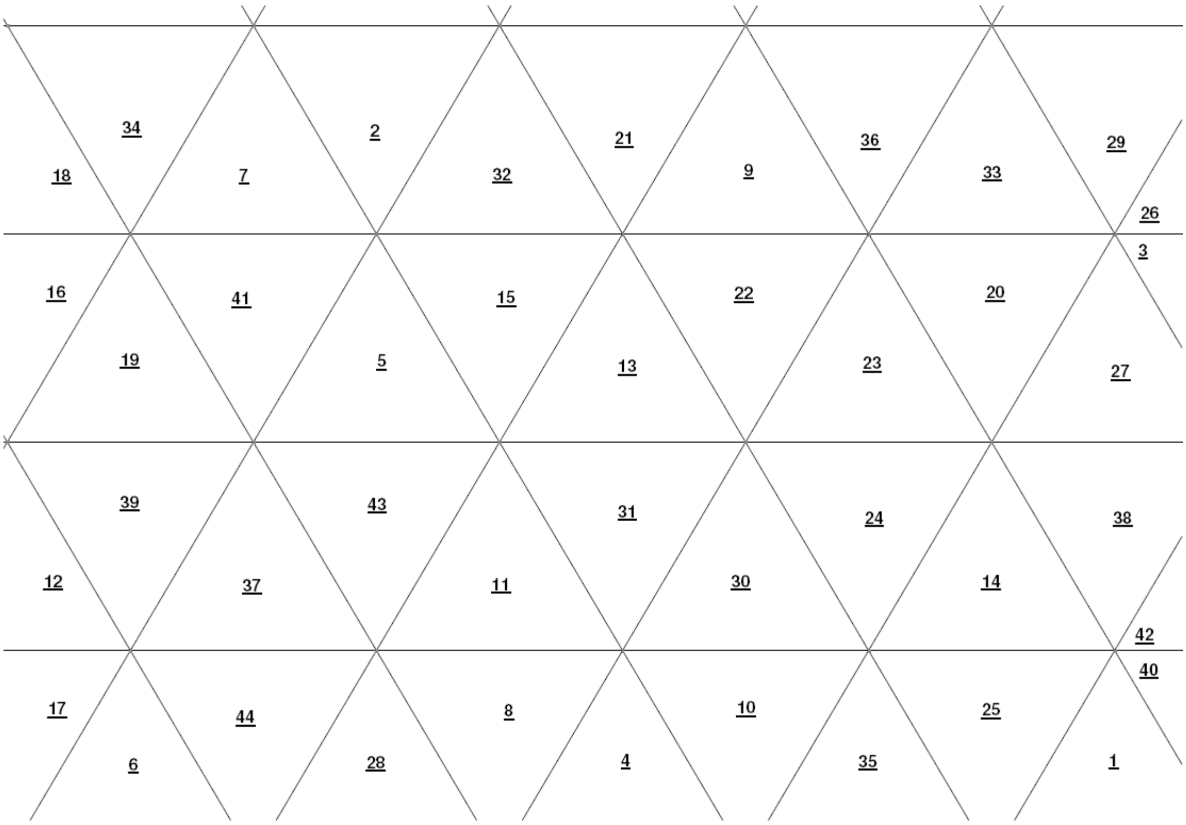
ROUCHE N. (1999) *Formes et Mouvements, perspectives pour l'enseignement de la géométrie*. Nivelles (Belgique) : CREM.

SWOBODA E. (2007). Intuition of geometrical relations in plane in works of 4-7 year old children, *Proceedings SEMT'07. International Symposium Elementary Maths Teaching*. 249-257.

TAVIGNOT P. (1993) Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 13/3, 257-294.

WEYL H. (1952) *Symétrie et mathématique moderne* (titre d'origine : *Symmetry*). Flammarion (Édition 1964).

Annexe 1 - Support principal du jeu le *Triangle-Acrobate*, un réseau triangulaire numéroté



Annexe 2 - La feuille de route distribuée aux élèves dans la phase 2 du jeu

Nom : Nom :

Prénom : Prénom :

Départ	*Arrivée*	*Parcours*