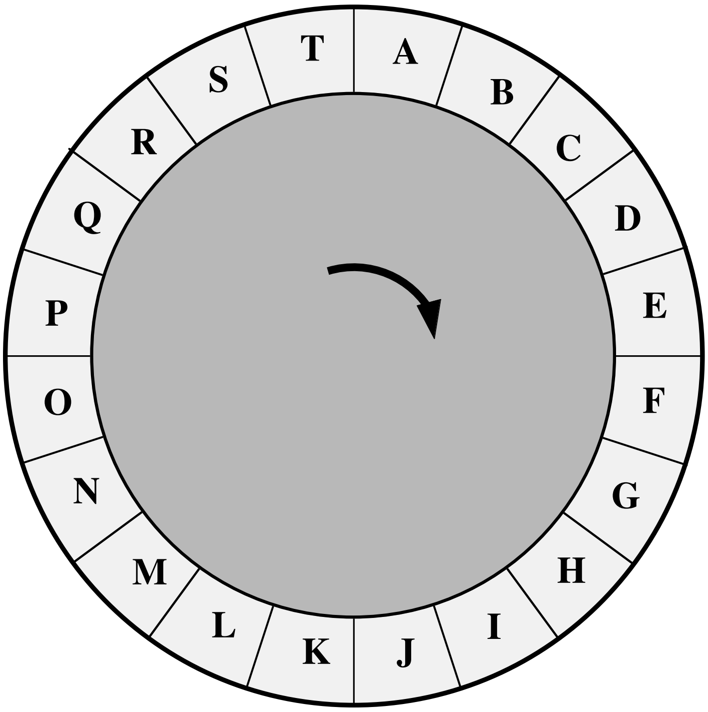
POINT DE DÉPART

LA PISTE[1]

Sur cette piste, vous avancez d'un pas par case, en tournant toujours dans le même sens. Vous faites le premier pas sur la case A, le deuxième sur la case B. Au troisième pas, vous êtes sur la case C, etc.

Sur quelle case serez-vous après 1234 pas ?



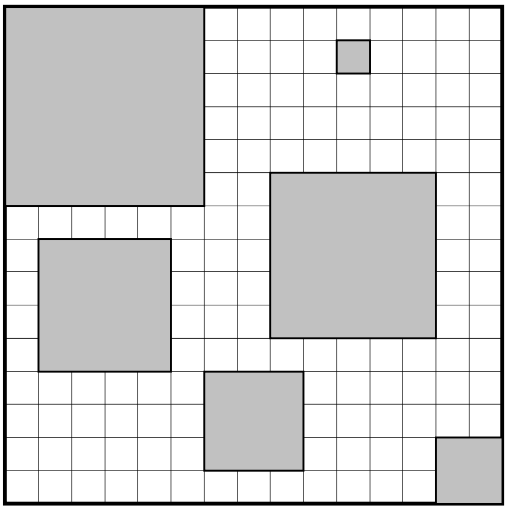
Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

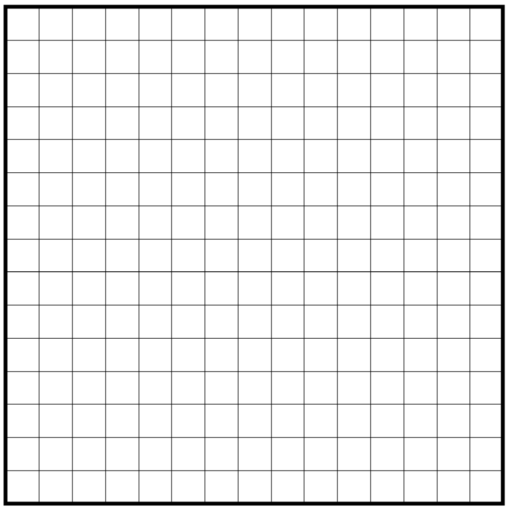
[1] Problème du 2ème *Rallye mathématique romand* (1994) repris dans la brochure *Ateliers de résolution de problèmes avec matériel* du Rallye mathématique Transalpin (RMT), www.armtint.org

POINT DE DÉPART

PAVÉS CARRÉS[2]

Sur la figure de gauche, vous voyez une grille et des pavés carrés de six grandeurs différentes.





Recouvrez entièrement la grille de droite par des pavés de ces six grandeurs :

- en utilisant au moins un pavé de chaque grandeur,

- sans que les pavés se recouvrent et sans qu'ils dépassent de la grille,

- en utilisant, en tout, le moins possible de pavés.

Combien de pavés utiliserez-vous, au minimum, pour recouvrir exactement la grille ?

Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

[2] Ce problème, inspiré d'une activité de *Mathématiques 3P* (Collection de moyens d'enseignement de Suisse romande), a fait l'objet d'un point de départ dans le numéro 213 (2004) de la revue *Math-École* et de commentaires dans le numéro suivant 214 (2005).

La piste
Pavés carrés
premières réflexions

(par François Jaquet)

LA PISTE

Ce point de départ se situe dans le domaine de la multiplication et de la division, notamment de la division euclidienne, et dans celui de la numération de base dix, pour la mise en évidence de régularités dans la suite des nombres naturels.

Quelles sont les tâches des élèves pour résoudre ce problème et les savoirs qu'ils pourront mettre en œuvre ?

La phase d'appropriation du problème se limite à la compréhension de la correspondance entre le nombre de pas et les désignations des cases, à partir de A.

Les élèves doivent se rendre compte qu'ils ne peuvent pas aller pas à pas jusqu'à 1 234 et qu'ils doivent donc chercher une procédure plus courte et plus efficace.

Les premiers déplacements doivent aboutir obligatoirement à la constatation que le 20^{e} pas conduit à la case T et que l'on se retrouve en A au 21^{e} pas ; puis au 41^{e} pas, puis aux 61^{e}, 81^{e}, 101^{e}. … pas (ou qu'on se retrouve en T aux 40^{e}, 60^{e}, 80^{e}, … pas, c'est-à-dire pour tous les nombres de pas qui sont des multiples de 20).

La périodicité étant établie, il faut encore prendre conscience que, bien qu'elle soit possible, l'énumération de tous les multiples de 20 sera longue et qu'il est donc plus économique de trouver des repères plus éloignés, comme les multiples de 100 ou de 200 pour déterminer que le 1 200^{e} pas se fera sur la case T, comme le 1 220^{e} et/ou le 1 221^{e} sur la case A. Cela nécessite d'avoir repéré que 100 ou 200 sont aussi des multiples de 20.

À partir de 1 221 sur A, il suffit alors de compter jusqu'à 1 234 pour constater qu'on aboutit à la case N.

Les élèves qui ont perçu clairement la période de 20 et qui maîtrisent la division euclidienne (ou « division avec reste ») peuvent directement chercher le reste de la division de 1 234 par 20, 14, et compter les 14 pas en partant de la case A.

(Des propositions plus détaillées à propos de cette opération figurent dans les *Développements possibles* ci-après).

Commentaires sur la pratique de ce point de départ

Dans la conception de ce « Point de départ », il est évident qu'on envisage une exploitation de la situation allant bien au-delà de la découverte de la réponse : la case N.

Des explications écrites de la démarche ou une mise en commun doivent aboutir à l'explicitation des propriétés de la case T qui accueille 20, 40, 60, ... c'est-à-dire les multiples de 20 (ou de celles de la case A qui accueille les multiples de 20 augmentés de 1) et que, par conséquent, le problème peut se résoudre en repérant le multiple de 20 qui précède 1 234 : 1 220. Ceci implique que les élèves connaissent ou découvrent le critère permettant de reconnaître les multiples de 20 (ou les nombres divisibles par 20) : « nombres qui se terminent par 0 et dont le chiffre des dizaines est pair », ou encore qu'ils utilisent implicitement le fait que le multiple d'un multiple de 20 est un multiple de 20, par exemple 200 est un multiple de 20, donc 1 200 (égal à 6×200) est aussi un multiple de 20.

Il serait aussi intéressant de ne pas se limiter à la case d'arrivée mais de demander encore le nombre de tours de piste effectués (61) et de le justifier, pour aboutir à des écritures combinant additions et multiplications, du type :

$$1\,234 = (61 \times 20) + 14 \; ; \; 1\,234 - 14 = 61 \times 20 \; ; \; \ldots.$$

Développements possibles

Dans une modalité d'exploitation plus poussée, on peut envisager de dresser, pour chaque case de la piste, un début d'inventaire des nombres de pas qui permettent d'y aboutir. On arrive ainsi :

- pour la case A, à {1 ; 21 ; 41 ; 61 ; …}
- pour la case B à {2 ; 22 ; 42 ; 62 ; …}
- ... pour la case N à {14 ; 34 ; 54 ; 74 ; …} etc.

Le nombre de tours (quotient entier) n'apparaît pas encore à ce stade. Il ne s'agit que de la partition de l'ensemble des nombres naturels en « classes de reste de la division par 20 ». Ce concept de « classe de restes » ne figure pas explicitement dans les programmes scolaires, mais il est cependant fondamental en arithmétique. Il illustre la structure de l'ensemble des nombres qui lie les deux champs conceptuels de l'addition et de la multiplication et permettra d'aborder la délicate opération de division.

La finalité de ce point de départ est précisément de faire un pas dans la construction de ce concept, en proposant des questions, exercices ou problèmes, sur ce support de la piste.

On peut faire varier par exemple le nombre de pas, le nombre de tours, la longueur de la piste, la case d'arrivée … et inventer une grande variété de recherches dont les structures sont esquissées par le tableau suivant :

Nombre de pas	Nombre de tours complets	Nombre de cases de la piste	Case d'arrivée
1 234	?	20	?
2 501	?	20	?
?	56	20	F (6)
?	17	25	N (14)
385	15	?	? (?)
1 000	?	?	P (16)

On peut ainsi proposer des « petits » problèmes comme les suivants :

a) (En référence à la 3ème ligne du tableau précédent) : « Vous avez fait 56 tours complets sur cette piste et vous êtes arrivés à la case F. Combien avez-vous fait de pas en tout ? »

b) (En référence à la 5ème ligne du tableau précédent) : « Vous vous arrêtez après 385 pas et 15 tours complets sans avoir encore terminé le 16e tour, sur une piste où les cases sont marquées dans l'ordre alphabétique A, B, C, … Quelle est la dernière lettre de cette piste ? Sur quelle case êtes-vous arrêté ? »

c) (Pour aller *plus loin*, dans le contexte de la piste de 20 cases) : « Vous êtes arrivés sur la case P, vous vous reposez et faites encore 85 pas, sur quelle case aboutirez-vous ? »

d) (Toujours sur la piste de 20 cases, pour aller *beaucoup plus loin*) « Xavier et Yvan partent ensemble de A et marchent régulièrement chacun à sa vitesse. Après 351 pas, Xavier rattrape Yvan pour la première fois. Combien Yvan a-t-il fait de pas lorsque Xavier le rattrape ? Sur quelle case Xavier rattrapera-t-il Yvan pour la deuxième fois ?

Remarque d'ordre mathématique

Il paraît opportun de relever ici la distinction entre « division euclidienne » et « division », et ses implications dans la construction de ces deux opérations par l'élève, sur la voie de l'approche des nombres rationnels.

La division euclidienne s'effectue dans l'ensemble des nombres naturels et fait correspondre, à un couple de nombres (dividende et diviseur, noté (D ; d)), un autre couple de nombres (quotient (entier) et reste, noté (q ; r)) tels que :

$$D = d \times q + r, \text{ avec } 0 \leq r < d$$

Il n'y a pas de symbole universel pour ce passage entre deux couples (on rencontre parfois des graphismes qui rappellent la disposition de l'algorithme $\vdash\!\!-$). C'est l'égalité précédente qui exprime la relation multiplicative et additive entre les quatre éléments des deux couples, complétée par l'inégalité entre reste et diviseur.

La division, opération inverse de la multiplication, s'effectue dans des ensembles de nombres plus vastes. Elle fait correspondre, à un couple de nombres (dividende et diviseur, noté (D ; d)) un seul nombre, le quotient. Le symbole de cette opération est « : » ou une barre de fraction, ou encore une combinaison des deux, comme sur les calculatrices.

Si le couple est constitué de nombres naturels « bien choisis », le quotient est aussi un nombre naturel et l'on se retrouve dans le cas de la division euclidienne, avec un reste égal à 0. Dans le cas où le quotient n'est pas un nombre naturel, et où l'on entend aller au-delà du quotient entier et du reste, on entre dans un nouvel ensemble de nombres, les nombres rationnels.

La confusion entre les deux opérations n'est vraisemblablement pas étrangère aux obstacles que rencontreront les élèves au moment où ils devront différencier des nombres de leurs approximations ou distinguer des écritures fractionnaires d'écritures décimales.

La piste offre précisément une occasion d'approcher les nombres rationnels et leurs écritures dès qu'on s'intéresse aux nombres de tours non entiers. Avec ses vingt cases, on voit immédiatement l'intérêt de passer aux demi-tours, dixièmes de tours ou vingtièmes de tour sans utiliser obligatoirement d'écritures formelles des nombres rationnels sous-jacents.

PAVÉS CARRÉS

Quelles sont les tâches des élèves pour résoudre ce problème et les savoirs qu'ils devront mettre en œuvre ?

La lecture de l'énoncé ne présente pas d'obstacles, la phase d'appropriation du problème se limite à la détermination des dimensions de chaque carré : la grille de 15 unités de côté, les six sortes de pavés, de 1, 2, 3, 4, 5 et 6 unités de côté et à la prise en compte des deux contraintes essentielles : un pavé de chacune des six sortes et le nombre minimum de pavés.

Dans une procédure par essais, la tâche consiste à remplir progressivement la grille par des carrés, en les dessinant un à un. Au cours des essais, la nécessité d'une anticipation des carrés à dessiner apparaît progressivement. Le côté de la grille (15) ne permet que certains alignements : 6 + 6 + 3 ; 5 + 5 + 5 ; 6 + 5 + 4 ; 4 + 4 + 4 + 3 ; … et conduit l'élève à rechercher, dans le cadre numérique, les décompositions additives de 15 en termes allant de 1 à 6.

Une stratégie « naturelle » pour organiser les essais conduisant à un minimum de pièces est de chercher à placer le plus grand nombre possible de pavés les plus grands (de côté 6), puis de passer aux pavés suivants (de côté 5, puis 4, …). On remarque rapidement que si la grille peut contenir quatre pavés de côté 6 (formant par exemple un carré de côté 12), l'espace manquera (entre 12 et 15) pour placer des pavés de côté 5 ou de côté 4. On ne peut donc pas espérer placer plus de trois pavés de côté 6. On s'aperçoit alors que les contraintes géométriques (espace disponible dans la grille) ne permettent de placer qu'un seul pavé de côté 5. On pourrait ensuite placer trois pavés de côté 4, mais il n'y aurait plus de place pour ceux de côté 2 et il faut se limiter à deux pavés seulement de côté 4. Quatre pavés de côté 3 se placent naturellement entre ceux de côté 6 ou dans leur suite, un cinquième trouve place dans l'espace restant, avec trois pavés de côté 2 et trois pavés unités. On arrive ainsi à 17 pavés recouvrant entièrement la grille, avec de nombreuses dispositions possibles (voir *Figure 1* ou *Figure 2*) ; mais on ne sait pas encore si 17 est le nombre minimum.

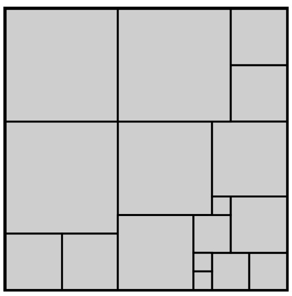


Figure 1

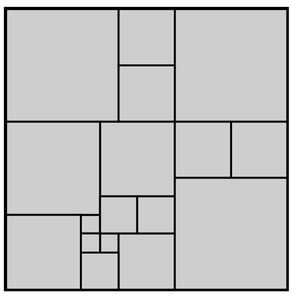


Figure 2

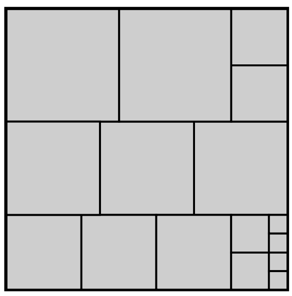


Figure 3

Les recherches d'un minimum à partir du premier choix de trois pavés les plus grands aboutissent systématiquement à une disposition dans laquelle les trois pavés de côté 6 et quatre pavés de côté 3 laissent un espace carré de côté 9 occupé par dix autres pavés.

Dans ce carré, le pavé de côté 5 est flanqué de deux pavés de côté 4. Il faut se convaincre que les contraintes des dimensions ($9 = 5 + 4$) imposent cette disposition et constater ensuite que l'espace restant ne peut pas être occupé par moins de 7 pavés (un de côté 3, trois de côté 2 et trois de côté 1).

Pour espérer trouver un nombre de pavés inférieur à 17, il faut donc renoncer au choix initial de trois grands pavés - si on ne l'avait pas fait précédemment - et envisager une disposition avec deux pavés de côté 6 seulement, formant avec deux pavés de côté 3 un rectangle de 6×15. Il reste alors de la place pour former une « bande » rectangulaire de trois pavés de côté 5 et une autre contenant trois pavés de côté 4. Au décompte final, on s'aperçoit que la grille est recouverte entièrement par 16 pavés, solution plus économique, en pavés, que la précédente.

En travaillant dans le cadre numérique, on peut imaginer des procédures de répartition de l'aire totale de la grille $225 = 15 \times 15$ en somme d'aires des différents pavés : 36 (6×6), 25, 16, 9, 4 et 1. Les divisions successives donnent des solutions arithmétiques qu'il faudra confronter aux contraintes géométriques et à l'exigence d'avoir au moins un pavé de chaque sorte.

Par exemple, si on cherche à placer le plus grand nombre de pavés de côté 6 ou d'aire 36, la division euclidienne $225 = 36 \times 6 + 9$ conduit à six grands pavés. On constate alors que l'aire de la grille est supérieure à celle de ces six grands pavés, qu'il faudrait découper pour pouvoir les placer effectivement. L'hypothèse successive, $225 = 36 \times 5 + 45$, doit être écartée pour la même raison. Les deux suivantes, en quatre ou trois grands pavés : $225 = 36 \times 4 + 81$ et $225 = 36 \times 3 + 117$ doivent aussi être écartées pour des raisons déjà évoquées précédemment.

Finalement la solution la plus avantageuse et effectivement réalisable correspond à la décomposition de l'aire totale en 16 pavés :

$$225 = (36 \times \mathbf{2}) + (25 \times \mathbf{3}) + (16 \times \mathbf{3}) + (9 \times \mathbf{2}) + (4 \times \mathbf{2}) + (1 \times \mathbf{4}) \qquad \text{(I)}$$

ou $225 = 72 + 75 + 48 + 18 + 8 + 4$

Commentaires sur la pratique de ce point de départ

L'activité peut convenir à des élèves de tout âge. Elle peut être organisée pour toute la classe par groupes ou individuellement, sous forme de défi et sans intervention du maître avant les phases de validation et d'exploitation des résultats. Un crayon et une feuille de papier quadrillé suffisent pour s'engager dans la recherche.

Si, pour de très jeunes élèves, on envisage de préparer du matériel, il faut savoir que sa construction exige la réalisation de pièces précises, rigides, stables et épaisses et que l'activité se limitera à déplacer des pièces « jusqu'à ce que ça marche ».

Pour pouvoir exploiter la recherche, il est essentiel d'en conserver une trace : dessin, coloriage ou collage. On pourra alors valider les solutions, les comparer, examiner les différentes dispositions des pièces et chercher à se convaincre, lors de mises en commun, que le minimum est bien de 16 pavés.

La recherche dans le cadre géométrique (dessins de carrés, déplacements, observations de figures) peut être complétée avec profit par une exploitation dans le cadre numérique. L'égalité (I) ci-dessus est en effet une vérification arithmétique qui justifie la démarche de recherche sur les pavés. Le va-et-vient d'un cadre à l'autre donne du sens à l'activité.

Développements

Selon nos expériences, les élèves (et les maîtres aussi) voient évidemment un progrès dans le passage de 17 à 16 pavés, mais ils poursuivent leur recherche car ils ne sont pas certains d'avoir obtenu le minimum. La question reste ouverte pour eux.

Il vaut la peine d'exploiter cette envie d'en savoir plus et de poursuivre la recherche, même si la justification de cette valeur minimale, est assez longue à établir. Il n'existe en effet pas de démonstration ostensible en quelques implications logiques qui se concluent par le « CQFD » triomphal.

Une justification peut se dérouler simultanément dans les deux cadres géométrique et arithmétique. D'une part, on raisonne sur le placement des pavés sur la grille, d'autre part, on travaille sur l'inventaire des décompositions de 225 en somme de six termes, multiples respectivement de 36, 25, 16, 9, 4 et 1.

Par exemple :

Nous avons vu précédemment que la décomposition avec 3 pavés de côté 6 ne conduit pas à moins de 17 pavés au total. Il faut donc examiner les décompositions avec 2×36 comme premier terme, laissant un reste de $225 - 2 \times 36 = 153$ à décomposer en cinq multiples de 25 , 16 , 9 , 4 et 1. (Voir figure 3)

Comme il n'y a pas de place pour plus de trois pavés de côté 5, on arrive à la décomposition suivante : $153 = 3 \times 25 + 78$.

Là encore, la place pour les pavés de côté 4 ne permet d'en placer que trois ce qui conduit à : $78 = 3 \times 16 + 30$.

Il faut alors prendre en compte les deux pavés de côté 3 qui occupent « naturellement » le prolongement des deux grands pavés et forment avec eux un rectangle de 15×6 (on peut exclure une à une toutes les autres dispositions de ces quatre pavés, qui empêcheraient le placement des pavés de côté 5) et l'on calcule qu'il ne reste que 12 carrés unités à disposition ($30 = 2 \times 9 + 12$). Ces 12 carrés, du point de vue arithmétique, permettraient de placer un pavé de côté 3, mais il n'en resterait pas assez pour placer un pavé de côté 2. On arrive ainsi à une disposition faisant apparaître trois rectangles de longueur 15 et à la décomposition mentionnées précédemment (I).

La démonstration n'est cependant pas finie, il faut encore explorer la disposition où il n'y aurait qu'un seul grand pavé, permettant en revanche de placer quatre pavés de côté 5 et quatre de côté 4, pour arriver à 17 pavés, comme dans la première recherche (en l'état actuel de nos recherches !).

De nombreuses variantes du problème s'obtiennent facilement en modifiant la grandeur des pavés, les dimensions de la grille, les contraintes sur les nombres, etc. Dans chaque cas, on peut chercher des dispositions optimales et tenter, avec profit, de les justifier.