PROPORTIONNALITE EN CM2 ET SIXIÈME

Arnaud SIMARD
IUFM de Franche Comté

Résumé. Cet article fait suite au texte intitulé « Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique » dans lequel nous montrions que pour justifier qu'une situation est conforme (ou non) au modèle proportionnel, les raisonnements heuristiques reposent sur des arguments de deux types. L'un concerne le retour à l'unité, l'autre concerne l'application de propriétés additive ou multiplicative. Dans cet article nous analysons les réponses d'élèves de CM2 et Sixième confrontés à des problèmes de reconnaissance de situations de proportionnalité. Enfin nous apportons quelques pistes pour un enseignement effectif de cette notion.

Mots-clés. Proportionnalité, non-proportionnalité, linéarité, retour à l'unité.

Introduction

La proportionnalité est une notion mathématique centrale du secondaire et prend sa source dans l'enseignement primaire. Cette notion est inscrite dans le pilier 3 du Socle Commun des Connaissances et Compétences (2006) « *la proportionnalité : propriété de linéarité, représentation graphique, tableau de proportionnalité, « produit en croix » ou « règle de 3 », pourcentage, échelle »*. Elle apparaît dès les programmes du cycle 3 (voir BO 2008) sous la forme suivante « *Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité, en utilisant des procédures variées (dont la « règle de trois »)* ». Au collège, la proportionnalité est au programme de toutes les classes (BOHS 2004 et BOOS 2008). Le document « Ressources pour les classes de 6^{e}, 5^{e}, 4^{e} et 3^{e} : Proportionnalité » EDU (2005) donne précisément les attendus notionnels du collège et des pistes pour leur enseignement. En classe de Troisième, les fonctions linéaires sont abordées et le lien doit être fait avec la proportionnalité. Malgré cette présence constante dans les programmes scolaire, cette notion est loin d'être acquise par tous les élèves qui entrent en Seconde (Gille 2008). Ce constat interroge l'enseignement de cette notion et la littérature foisonne d'écrits forts intéressants sur le sujet. Les articles de Comin (2002), Pfaff (2003) ainsi que les ouvrages ERMEL (2001), Boisnard, Houdebine, Julo, Kerboeuf, Merri (1994) et Bonnet (2011) proposent une approche pertinente de la globalité de l'enseignement de la notion de proportionnalité sur l'école et le collège.

L'articulation CM2 – Sixième est un temps fort de l'apprentissage de la proportionnalité. Les élèves découvrent le modèle proportionnel par le biais d'activités en lien avec la « vie de tous les jours », mettent en œuvre différentes procédures (décrites dans les programmes) et étoffent peu à peu leurs compétences. D'abord considéré comme un outil mathématique, la proportionnalité est ensuite étudiée en tant qu'objet mathématique à part entière (la notion est décontextualisée). La modélisation d'une situation par la proportionnalité (allongement de ressort, échelles…) peut alors être considérée comme un retour de la notion au statut d'outil. Reconnaître une situation modélisable par la proportionnalité est une activité cruciale. Après avoir présenté le cadre dans lequel nous allons travailler, nous nous intéresserons aux raisonnements d'élèves de CM2 et de Sixième confrontés à des problèmes de reconnaissance de situations de proportionnalité. La multiplicité des procédures mises en place par les élèves illustre la richesse du thème et permet des débats et des argumentations sensées, mais c'est également une difficulté pour l'enseignant quand il s'agit d'uniformiser et d'institutionnaliser les pratiques. Nous proposerons dans la seconde partie de l'article une observation sur la continuité et les ruptures dans les principaux modèles de raisonnement des élèves entre le primaire et le collège en référence à l'article Simard (2012). Nous tenterons d'en déduire des pistes pour un enseignement cohérent de la proportionnalité.

1. Reconnaissance de situations de proportionnalité

Comme il est signalé dans les programmes 2005 du collège, les élèves doivent être confrontés à des situations qui relèvent de la proportionnalité et à d'autres qui n'en relèvent pas. L'objectif de la confrontation de ces types de situations de proportionnalité et de non proportionnalité est de créer du sens pour la notion elle-même. Un cadrage théorique du côté des champs conceptuels et de la théorie des schèmes (Vergnaud 1990) semble pertinent pour justifier cette confrontation. La reconnaissance de situations semble passer par la construction d'invariants qui sont les éléments centraux des schèmes qui structurent la prise d'information et l'organisation des conduites au regard d'une classe de problèmes. Ce cadre est compatible avec la théorie des situations didactiques développés dans Brousseau (1998), selon laquelle les connaissances représentent principalement des instruments qui permettent de contrôler les situations.
Après un bref retour sur la notion mathématique de proportionnalité (Simard 2012), nous présenterons les différents points théoriques sur lesquels nous nous sommes appuyés pour réaliser et analyser l'expérimentation que nous relaterons dans le chapitre suivant.

1.1. Théorie des proportions et linéarité

L'article publié précédemment (Simard 2012) vise à donner une définition rigoureuse de la proportionnalité, de la linéarité et de ses propriétés caractéristiques. De ces définitions découlent deux catégories de procédures. La première, basée sur la théorie des proportions, englobe les procédures suivantes : utilisation du rapport commun, retour à l'unité, règle de trois et produit en croix. La seconde, basée sur la linéarité, englobe les procédures qui font appel à l'utilisation de la propriété additive et de la propriété multiplicative. A l'intersection de ces deux catégories se trouve l'utilisation du coefficient de proportionnalité comme opérateur et l'utilisation de la fonction linéaire associée (dont on identifie le coefficient directeur). Enfin, de manière plus anecdotique on trouve la procédure graphique qui, si elle est justifiée, revient à une utilisation fine de la fonction linéaire associée.

1.2. Implicites des énoncés

Souvent, dans les énoncés d'exercices de proportionnalité, que ce soit à l'école élémentaire ou au collège, le modèle proportionnel est implicite. Il est lié au contexte.

> *Dans une boulangerie 3 baguettes coûtent 2 euros et 40 centimes d'euros. Combien coûtent 7 baguettes ?*

La proportionnalité relève d'un « savoir social » mais n'est pas explicité : dans une boulangerie, les baguettes sont vendues à l'unité et toutes au même prix. C'est cet argument qui justifie le modèle proportionnel mais qui n'est pas exprimé dans l'énoncé.
Pour essayer de lever ces implicites, les auteurs d'énoncés ont recours à certains mots clefs. Ces mots clefs renferment, finalement, à eux seuls l'idée de proportionnalité mais ils donnent des énoncés formatés qui induisent généralement le recours à la proportionnalité (cela devient des exercices de mathématique et non plus des exercices tirés de situations réelles). Voici un exemple tiré des évaluations CM2 de 2011 :

> *Si 10 objets identiques coûtent 22 euros, combien coûtent 15 de ces objets ?*

Le terme « identique » semble impliquer l'aspect proportionnel (sous entendu, ils sont vendus à l'unité, tous au même prix). D'autres termes sont utilisés fréquemment (prix au kilo, vendu à l'unité, chaque, chacune…).

1.3. Savoir social, situations idéales et anticipation

Les situations présentées aux élèves sont souvent issues du « réel », et à ce titre elles véhiculent un savoir social (connaissance commune qui dépasse le cadre scolaire) et un cadre idéal (modèle théorique immuable). Ce cadre idéal est dé-contextualisé, débarrassé des aspects pratiques, ce qui peut donner lieu à des ajustements risquant d'induire des incompréhensions lors de la re-contextualisation des résultats. Par exemple, le contexte d'une recette de cuisine est reconnu socialement comme un cadre de proportionnalité. Même si le terme « proportionnel » n'est pas toujours prononcé, on demande aux élèves de savoir que les quantités à prévoir pour 4 personnes sont le double des quantités à prévoir pour 2 personnes. Le « cadre idéal » est la proportionnalité. Par contre, tout cuisinier sait qu'il faut adapter en fonction de l'appétit des convives (ceci est d'autant plus vrai que le nombre de convives est important), ce qui implique que, dans la pratique, on sort du cadre de la proportionnalité. Le cadre d'un énoncé type « recette » se veut idéal, on supposera implicitement que tous les convives ont le même appétit… Le lecteur se référera à Houdement (1999 et 2003) pour des réflexions plus fines sur le cadre idéal des énoncés de problèmes (distance entre « réel » et « évoqué ») et sur le « rôle des savoirs sociaux » dans la résolution de problème.
Les mathématiques sont une aide à l'anticipation sans avoir recours uniquement à l'expérience. La proportionnalité, comme tout modèle mathématique, permet d'obtenir des résultats théoriques que l'expérience pourrait (ou ne pourrait pas) vérifier. Dans l'exemple suivant, il est difficile d'imaginer un retour au comptage manuel pour vérifier le résultat obtenu théoriquement. C'est en ce sens que l'on peut parler d'anticipation.

> *Un petit fagot de 30 spaghettis pèse 57 grammes. Combien y a-t-il de spaghettis dans un paquet 1 kilogramme ?*

Bien entendu, le terme « anticipation » peut avoir une connotation « prévoir l'avenir ». C'est cette connotation qui est en jeu dans la situation B :

> *Au cours du dernier match Youri a marqué 3 buts. Combien marquera-t-il de buts pendant les 5 prochains matchs ?*

Dans les deux exemples ci-dessus les événements initiaux (« masse de 30 spaghettis », « nombre de but par matchs ») n'ont pas le même statut. La masse de 30 spaghettis est considérée intuitivement comme invariante (tout paquet de 30 spaghettis pèse 57 grammes) alors que le nombre de buts par match n'est pas un invariant (d'un match à l'autre, le nombre de buts est variable). Malgré tout, la masse de tous les fagots de 30 spaghettis est « à peu près » 57 grammes.
La difficulté pointée ici réside dans le fait de calquer un modèle mathématique (cadre idéal) sur une situation réelle (cadre réel) interprétable et sujette à variation en fonction de nombreux paramètres. L'élève doit être capable de s'adapter et d'adapter son savoir théorique aux situations réelles, et de faire de « l'à peu près » proportionnel (par exemple arrondir 8,8 citrons pour 22 personnes à 9 citrons). Bien entendu, pour arriver à cette maîtrise, il doit pouvoir repérer raisonnablement les situations qui relèvent, ou non, de la proportionnalité. La seule évocation des contextes n'implique pas la proportionnalité et rien ne permet de décider rigoureusement du modèle théorique sous-jacent (à moins d'expliciter le contexte dans le moindre détail, et donc, de se trouver dans un cadre idéal). Pour autant, dans sa thèse, René de Cotret (1991) a observé que pour certains contextes, les élèves vont plus naturellement vers des procédures proportionnelles (elle définit « l'indice de proportionnalité » des contextes). Il est généralement plus facile de prouver qu'une situation ne relève pas de la proportionnalité par la mise en défaut des propriétés caractéristiques. C'est généralement le bon sens (critique du résultat, « raison ») qui permet de valider, ou non, le modèle mathématique sous-jacent. Le rôle de l'enseignant est aussi d'amener les élèves à prendre ce recul nécessaire devant les calculs pour en mesurer la pertinence (nous le verrons par exemple avec le problème 5).

1.4. Influence des relations interne et externe sur le choix des procédures

Dans une situation de proportionnalité liant deux grandeurs, la relation interne est celle qui lie les valeurs d'une même grandeur, la relation externe est celle qui lie les valeurs de grandeurs distinctes. Par exemple, dans le problème « *Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes. Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ? »,* la relation interne « ×4 » (ou « ÷4 ») est donnée par un rapport entre nombres de personnes, la relation externe « × 2,5 » (ou « ÷2,5 ») est donnée par le rapport entre le nombre de citrons et le nombre de personnes. Comme il est montré dans Levain (1998), si la relation interne est simple (cela peut être un rapport entier 2, 3, 10 etc., ou décimal 1,5), la procédure la plus efficace (et la plus naturelle) reposera sur l'utilisation des propriétés additive et/ou multiplicative. De même, si la relation externe est simple, la procédure la plus efficace (et la plus naturelle) reposera sur l'utilisation du coefficient de proportionnalité (ou le retour à l'unité). Si aucune relation n'est simple (on la dira « complexe », c'est-à-dire difficile à identifier par l'élève selon son niveau de connaissance) ou si les deux relations sont simples alors l'élève devra faire un choix. Cette précision pourra éclairer notre propos concernant la reconnaissance de situations de proportionnalité.

2. Présentation et analyse des problèmes proposés à des élèves

Une série de problèmes a été mise au point pour des élèves de primaire et de Sixième. Le but est d'observer leur prise d'initiative face à des problèmes de proportionnalité et de non-proportionnalité. Cette partie a donc trois objectifs. Le premier objectif est de repérer les procédures des élèves en s'appuyant sur les fondements mathématiques de la proportionnalité (Simard 2012). Le deuxième objectif est d'étudier la continuité et les ruptures entre le primaire et le début du collège concernant ces procédures. Enfin le dernier objectif est de préciser les obstacles générés par l'apprentissage de la notion. Chaque problème sera critiqué en référence au cadre théorique présenté dans le paragraphe précédent.

2.1 Les énoncés

Les exercices ont étés proposés à des élèves de CM1 qui n'ont pas encore vu la notion de proportionnalité, mais également à des élèves de CM2 et des élèves de Sixième (environ 40 élèves de CM1/CM2 et 150 élèves de 6[e]). La consigne est :

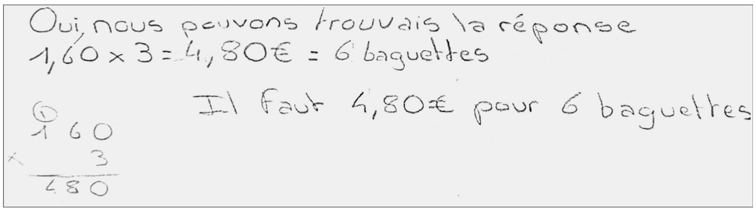
> « Voici plusieurs énoncés de problèmes. Certains énoncés ne te permettent pas de trouver la solution. Pour chaque problème tu préciseras si on peut trouver la réponse et tu expliqueras pourquoi on peut, ou on ne peut pas. »
>
> <u>*Problème 1*</u>*. Chez le boulanger, j'ai payé 1 euro et 60 centimes d'euros pour deux baguettes de pain. Quel est le prix à payer pour 6 baguettes ?*
>
> <u>*Problème 2*</u>*. Au cinéma une place pour enfant coûte 5 euros et une place pour adulte coûte 7 euros. Quel est le prix à payer pour 8 personnes ?*
>
> <u>*Problème 3*</u>*. Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes. Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?*
>
> <u>*Problème 4*</u>*. Le train roule à la vitesse moyenne de 120 km par heure. Combien de kilomètres le train parcourt-il en deux heures et demie ?*
>
> <u>*Problème 5*</u>*. Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres. Quelle sera sa taille à 10 ans ?*
>
> <u>*Problème 6*</u>*. Au cours du dernier match Youri a marqué 3 buts. Combien marquera-t-il de buts pendant les 5 prochains matchs ?*
>
> <u>*Problème 7*</u>*. Un cycliste se chronomètre sur différentes distances. Il obtient le tableau suivant ; la durée est-elle proportionnelle à la distance parcourue ? Justifie ta réponse.*

Distance (en kilomètres)	15	30	60
Durée (en minutes)	45	90	210

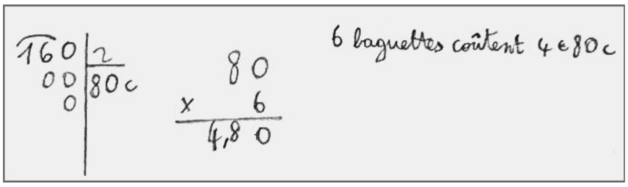
2.2. Analyse des problèmes et des réponses en fonction du niveau scolaire des élèves

<u>Problème 1</u>. *Chez le boulanger, j'ai payé 1 euro et 60 centimes d'euros pour deux baguettes de pain. Quel est le prix à payer pour 6 baguettes ?*

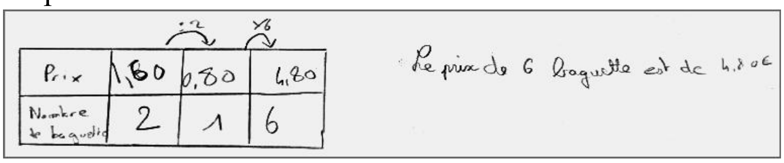
Ce problème propose une situation de prix à fort indice de proportionnalité (René de Cotret 1991). Le fait de pouvoir acheter les baguettes à l'unité est implicite (ce qui aurait tendance à influencer une procédure de type « retour à l'unité »). D'autre part la relation interne est simple (passage de 2 à 6 baguettes), tandis que la relation externe est complexe (prix à l'unité : 0,80 euros). Les procédures faisant appel à la linéarité (propriétés additive et multiplicative) sont prépondérantes pour ce problème chez les élèves du primaire et de 6^{e}. La procédure la plus représentée est l'utilisation de la propriété multiplicative (37% des réponses tous niveaux confondus) :



Par contre, le retour à l'unité (20% des réponses tous niveaux confondus) n'est quasiment présent que chez les élèves de 6° :



Ceci peut témoigner de l'influence des relations internes et externes (voir §1.4).
De manière plus anecdotique, mais symptomatique d'un état de fait, certains élèves de 6^{e} qui ont déjà rencontré la proportionnalité dans leur cursus scolaire résument le problème dans un tableau, comme dans l'exemple ci-dessous :



Il est important de noter que 43% des élèves interrogés (tous niveaux confondus) se trompent sur cet exercice. Hormis les erreurs de calcul dont nous ne parlerons pas ici, les principales erreurs portent sur l'interprétation et/ou compréhension de l'énoncé (réponse du type : $6 \times 1{,}6 = 9{,}6$ euros) et sur la persistance du modèle additif (« pour 4 baguettes de plus, on paye 4 euros de plus »).

<u>Problème 2</u>. *Au cinéma une place pour enfant coûte 5 euros et une place pour adulte coûte 7 euros. Quel est le prix à payer pour 8 personnes ?*

Le prix à payer en fonction du nombre d'enfants est une situation de proportionnalité (fort indice) tout comme le prix à payer en fonction du nombre d'adultes. Ces situations prises au cas par cas sont reconnues facilement par les élèves comme des situations de multiplication (« une place coûte 5 euros, combien coûtent 8 places ? »), ce qui est déjà une reconnaissance implicite d'un type de problème de proportionnalité (voir Levain (1998)). Par contre, lorsque l'on mélange les deux tarifs (adultes et enfants), la situation n'est plus une situation de proportionnalité car les prix unitaires sont différents. 75% des réponses observées (tous niveaux confondus) reprennent cet argument :

Non, parce que on ne sais pas combien il y a d'adultes et combien d'enfants.

Ce type de réponse, basé sur les prix unitaires, témoigne d'une bonne représentation du problème par les élèves. Les erreurs sont essentiellement basées sur le calcul d'un exemple (vu uniquement chez quelques élèves de primaire) :

enfants	adulte
5	7
+5	+7
+5	+7
+5	+7
20	28

20 + 28 = 48

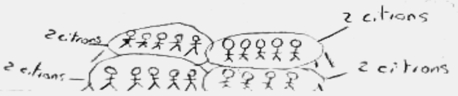
Le prix à payer pour 8 personnes enfant et adulte 48 euros

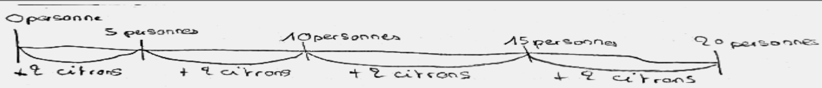
Problème 3. Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes. Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.4. la relation interne est simple (passage de 5 à 20 personnes), la relation externe est complexe (1 citron pour 2,5 personnes ou 2/5 de citron par personne, ce qui constitue un raisonnement plus difficile à contrôler). La linéarité semble donc privilégiée. Ce problème est majoritairement réussi (55% tous niveaux confondus). Tous les types de procédures se ramenant à l'utilisation des propriétés de linéarité (dessin, phrase, tableau…) sont utilisés par les élèves du primaire :

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ? Il faut 8 citrons pour 20 personnes.

j'ai fait 4 tables de 5 personnes et j'ai ajouter 2 citrons à une table. Puis j'ai aditionner le nombre de citrons.





2 + 2 + 2 + 2 = 8 citrons.

Il faut 8 citrons pour 20 personnes

$\times 2$, $\times 5$; 4, 4 ; 8, 20

2 citrons pour 5 personne
4 citrons pour 10 persone
6 citrons pour 15 persone
8 citrons pour 20 persone

il faut 8 oeufs pour 20 personnes

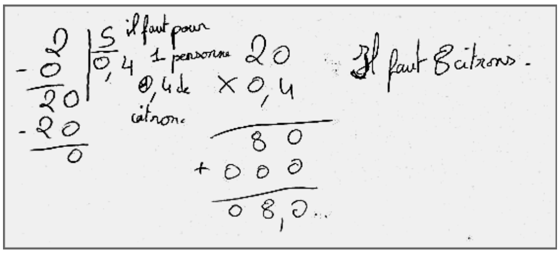
Dès que l'on passe à des élèves d'un niveau supérieur (CM2 ayant déjà parlé de proportionnalité ou 6^e^), les productions deviennent plus « archétypales » :

nombre citrons	2	8
nombre personnes	5	20

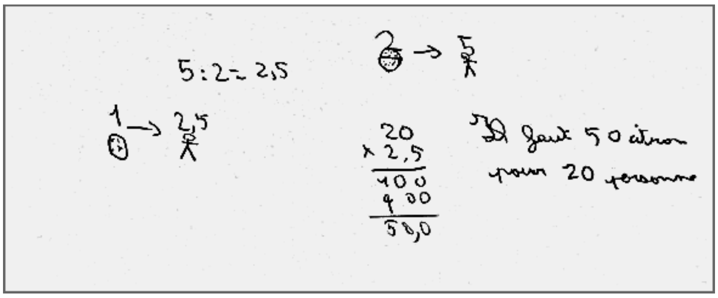
$\times 4$

Il faudra 8 citrons pour 20 personnes

On observe également des tentatives (plus ou moins réussies) de passage à l'unité (nombre de citron par personne, nombre de personnes par citron et règle de trois) :



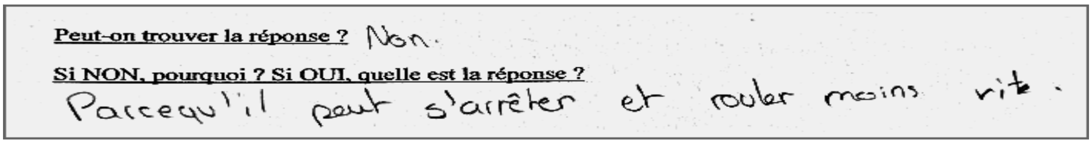
Dans l'exemple suivant, l'élève raisonne en deux temps. Il calcule d'abord le nombre personnes par citron (résultat correct : 2,5 personnes par citron). Mais, ensuite, il se trompe en multipliant par le nombre de personne (au lieu de diviser le nombre de personne par 2,5…ce qui est beaucoup plus compliqué à comprendre). L'élève utilise une procédure trop complexe et perd le fil de son raisonnement :



Hormis les erreurs de calcul, les erreurs les plus représentées touchent à l'incompréhension de la situation (traduite par l'utilisation « aléatoire » des nombres en jeu), surtout chez les élèves les plus jeunes.
Comme l'a signalé René de Cotret (1991), les élèves exploitent assez spontanément les rapports entiers dans les situations de type « recette » pour apporter des réponses utilisant la proportionnalité. Qu'ils soient conscients ou non d'utiliser des propriétés de proportionnalité pour répondre au problème, il semble naturel aux élèves d'utiliser ce modèle mathématique dans ce contexte. Lorsque les élèves n'ont pas encore vu la proportionnalité en cours, il leur suffit d'avoir une bonne représentation de la situation pour pouvoir conclure (leur raisonnement s'apparente à l'utilisation des propriétés de linéarité, ce qui est induit par l'énoncé). Lorsque les élèves ont déjà des notions de proportionnalité, ils reconnaissent facilement la situation et utilisent des compétences issues du cours (tableau, règle de trois…), ces procédures, plus « expertes » (au sens plus proche du modèle) ne sont pas forcément plus efficaces et peuvent parfois engendrer des erreurs.

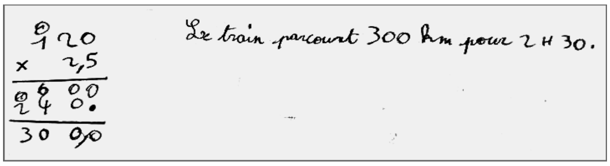
Problème 4. Le train roule à la vitesse moyenne de 120 km par heure. Combien de kilomètres le train parcourt-il en deux heures et demie ?

La situation « vitesse » est décrite par René de Cotret (1991) comme une situation à bon indice de proportionnalité mais, dans ce thème, la perception de la proportionnalité n'entraîne pas nécessairement la réussite. D'une part, les grandeurs en jeu dans un tel problème sont « continues » (toutes valeurs réelles positives) alors que dans les autres problèmes, elles sont « discrètes » (valeurs entières ou fractions simples), cette distinction engendre certainement une difficulté de représentation qu'il ne faut pas négliger. D'autre part, dans une situation de proportionnalité prototypique, deux grandeurs sont liées par un coefficient de proportionnalité, ce coefficient est constant et il est fixé par le contexte de l'énoncé. Par exemple le « prix au kilo » lie une quantité de produit au prix à payer. Dans un tel contexte, le prix au kilo (coefficient de proportionnalité) est fixe (dans l'implicite ou il n'y a pas de réduction en fonction de la quantité achetée), le produit est donné (des pommes, de la viande etc.) et seules deux grandeurs varient : le prix à payer et la quantité achetée. Le « prix au kilo » est une grandeur quotient relativement facile à gérer. Ceci n'est pas le cas dans une situation « vitesse ». En effet, dans de telles situation, la vitesse (coefficient de proportionnalité) lie distance et durée. Or les élèves sont habitués, dans la vie de tous les jours, à ce que ces trois grandeurs varient (la vitesse d'un véhicule, affichée au compteur, n'est pas une vitesse moyenne mais une vitesse instantanée). La notion même de vitesse « moyenne » est délicate à comprendre. La grandeur quotient « vitesse moyenne » est beaucoup plus complexe à gérer que la grandeur quotient « prix au kilo ». Ceci génère des incompréhensions comme en témoigne la réponse suivante :

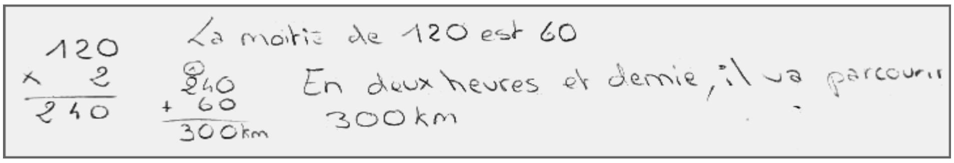


Dans ce problème 4, la relation de proportionnalité est donnée directement par la valeur unitaire (120km en 1 heure). La relation interne (passage de une heure à 2 heures et demi) et la relation externe (120km en une heure) sont complexes toutes les deux. Parmi les élèves du primaire observés, seuls deux d'entre eux donnent une réponse exacte à cet exercice (procédure basée sur la linéarité). Les élèves de 6[e], quand ils répondent, utilisent majoritairement l'une des deux procédures suivantes :

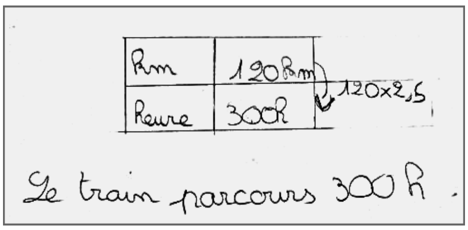
- utilisation implicite du retour à l'unité

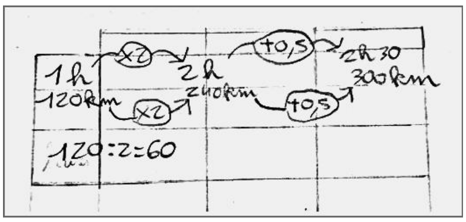


- utilisation implicite de la linéarité



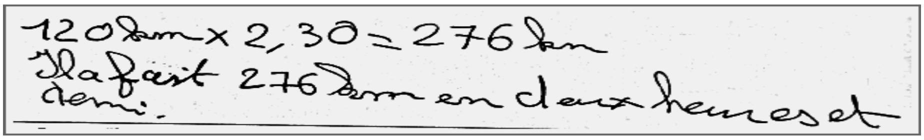
On retrouve ces procédures sous forme mixtes ou avec un tableau. Les élèves suivants reconnaissent le modèle proportionnel (vu en cours) et essayent de le transcrire sous forme d'un tableau de proportionnalité (cela met en image la complexité de l'apprentissage d'une technique : l'élève se sent obligé de « faire comme dans le cours » alors que sa démarche ne s'exprime pas de cette manière). Ceci peut être considéré comme un obstacle généré par l'apprentissage théorique de la notion.





L'erreur la plus répandue concerne le résultat 276 km. Elle provient de la transcription : 2

heures et 30 minutes égale 2,3 heures suivie du calcul 120×2,3 = 276. Pour autant, l'élève témoigne d'un des raisonnements attendus concernant le modèle mathématique du problème.

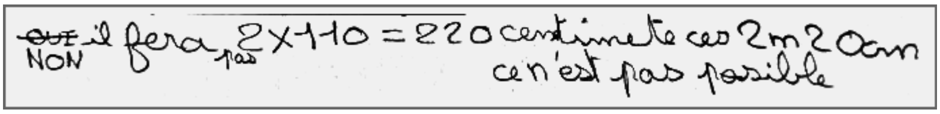

120 km x 2,30 = 276 km
Il a fait 276 km en deux heures et demi.

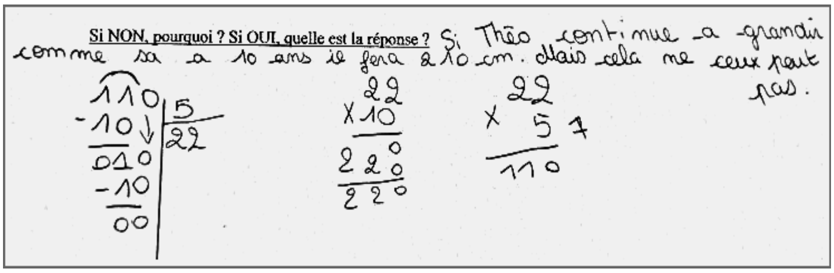
Problème 5. Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres. Quel sera sa taille à 10 ans ?

Dans l'opinion collective, la taille est une fonction croissante de l'âge, cette « connaissance » est généralement renforcée par des expressions telles que « tu grandis avec l'âge », « qu'est ce que tu as grandi !»…). Cette situation n'est pourtant pas une situation de proportionnalité. Pour le justifier, on peut se référer aux propriétés de linéarité : Théo devrait mesurer 2,20 m à 10 ans ce qui n'est pas vraiment réalisable, mais 4,40 m à 20 ans, ce n'est plus dans un domaine raisonnable…ces arguments tiennent plus de la critique du résultat théorique que des arguments strictement mathématiques (voir paragraphe 1.3.). Plus mathématiquement, taille et âge ne sont pas des grandeurs proportionnelles car à la naissance (0 an) un bébé ne mesure pas 0 cm !). Le retour à l'unité est également utilisé pour tenter de justifier (« on ne grandit pas tous les ans de la même mesure », « on ne grandit pas tous les jours pareil »…). Ces réponses témoignent d'une compréhension de la problématique sous-jacente (mathématiquement il s'agit de la distinction entre « fonction croissante » et « fonction linéaire »).

L'observation montre que les réponses sont quasiment les mêmes chez les élèves du primaire et de Sixième. Seuls certains élèves de Sixième répondent que ce n'est pas une situation de proportionnalité, mais cet exemple est souvent utilisé en cours comme contre-exemple. Il est cependant fort intéressant de regarder de plus près les réponses apportées.

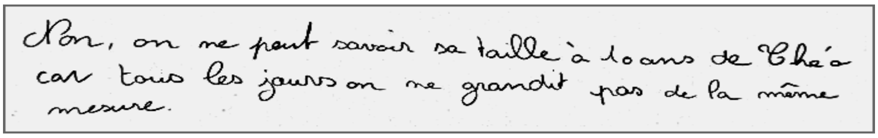
Les élèves suivants essayent d'appliquer le modèle proportionnel mais confrontent leurs résultats à la réalité…et concluent qu'on ne peut pas trouver la réponse ! (Utilisation de la propriété multiplicative en CM2 pour la première et utilisation du retour à l'unité en Sixième pour la Seconde).


~~oui~~ NON il fera pas 2x110 = 220 centimètres 2m20 cm
ce n'est pas possible


Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ? Si Théo continue a grandir comme sa a 10 ans il fera 2 10 cm. Mais cela ne ceux peut pas.

110 ÷ 5 = 22
22 x 10 = 220
22 x 5 = 110

Des élèves tentent d'expliquer en se ramenant à une unité de temps (croissance par an, par mois ou par jour) et en arguant qu'on ne croît pas toujours de la même façon. La plupart du temps ces élèves ont également répondu par la négative au problème précédent (vitesse moyenne du train), arguant que le train peut ralentir ou accélérer (problème avec les grandeurs quotient).


Non, on ne peut savoir sa taille à 10 ans de Théo car tous les jours on ne grandit pas de la même mesure.

D’autres justifications (liées au contexte réel) apparaissent souvent, ce qui interroge la pertinence des exercices « liés au réel » : dans cet exercice, l'application du modèle proportionnel conduit à un résultat peu vraisemblable, on sort du cadre mathématique pour conclure...alors pourquoi s'étonner que certains élèves sortent complètement du cadre mathématique ?

Non, on ne peut savoir sa taille à 10ans de Théo car tous les jours on ne grandit pas de la même mesure.

Non, car nous ne savons pas son avenir peut-être va-il avoir un problème médicale.

La réponse la plus répandue (tous niveaux confondus) est « 220 cm » (non sans rappeler l'âge du capitaine de Stella Baruk, 1985). Ceci témoigne d’une reconnaissance implicite d’un format d’énoncé correspondant à un problème de proportionnalité (obstacle généré par la répétition d'exercices prototypiques). Cette réponse est aussi répandue chez les élèves du primaire que chez les 6e observés. Il serait intéressant de reprendre cette question avec les élèves et de les faire discuter sur la pertinence de cette réponse (mathématiquement rien ne permet de dire que c'est faux...mais confronté au réel, qu'en est-il? Comment conclure ?).

Si NON, pourquoi ? Si OUI quelle est la réponse ?

Oui

$$\begin{array}{r} 110 \\ \times \quad 2 \\ \hline 220 \end{array}$$

Il ferra 220 centimètres

La situation est pertinente pour parler de proportionnalité car à l’évidence, la majorité des élèves comprennent qu’il y a un problème quand on essaye d’appliquer le modèle mathématique qu’ils sentent sous-jacent à l’ensemble des problèmes proposés.

<u>Problème 6</u>. *Au cours du dernier match Youri a marqué 3 buts. Combien marquera-t-il de buts pendant les 5 prochains matchs ?*

La situation n’est pas une situation de proportionnalité, mais comment l’expliquer ? Le retour à l’unité est privilégié par l’énoncé (nombre de buts en 1 match). Si l’élève considère que la situation relève du modèle proportionnel (plus par effet de contrat que par reconnaissance raisonnée) alors il indiquera 15 buts en 5 matchs (l’aspect calculatoire est très simple). S’il considère que cette situation ne relève pas du modèle proportionnel il dira « on ne peut pas répondre » sans forcément justifier (ou alors une justification du type « on ne peut rien dire sur le nombre de buts qu’il marquera dans les autres matchs… » ce qui utilise de manière implicite le retour à l’unité (le nombre de buts par match n’est pas garanti…). Bien entendu, comme dans toute situation « concrète » beaucoup d’élèves tenteront d’apporter des justifications « réelles » (ce qui peut déboucher sur des réponses plus ou moins inattendues mais éloignées de l’aspect strictement mathématique). Il est intéressant de noter qu'il n'y a pas de différence notoire entre les réponses des élèves de primaire et de 6e (les arguments, quand ils existent, sont identiques).
La réponse la plus représentative est la suivante:

Non, on ne sait pas car à tous les match Youri ne marque pas le même nombre de buts.

La réponse erronée la plus fréquente est une application directe de la propriété multiplicative qui témoigne de l'influence de la structure de l'énoncé. Cette réponse pose problème, en effet on ne fournit aucun moyen de savoir si elle est juste ou non (il est possible que Youri marque effectivement 15 buts). Á l'instar du problème 5, il serait intéressant de reprendre ce problème avec les élèves et de les faire discuter sur la pertinence de cette réponse (et en 7 matchs ? Et en 20 matchs ? Peut-on en être sûr ?...).

$3 \times 5 = 15$

oui Youri marquera 15 buts

Buts	3
prochains maths.	15

3×5

Youri marquera 15 Buts

Notons finalement cette réponse intermédiaire caractéristique de l'élève qui essaye d'appliquer le modèle proportionnel tout en doutant de la possibilité de l'appliquer à cette situation particulière :

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ? Si Youri continue à marqué 3 buts par match. Sa lui fera 15 buts pour 5 matchs. Mais on n'est pas sûr que Youri marquera toujours 3 buts dans les 5 matchs à venir.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times\ 3 \\ \hline 15 \end{array}$$

La majorité des élèves sondés ont répondu correctement à cet exercice, qu'ils aient eu un cours sur la proportionnalité ou non. Ceci semble être un bon indicateur de la conceptualisation des situations de proportionnalité. En effet, le problème est placé en sixième position dans la liste des problèmes qui relèvent tous plus ou moins du champ conceptuel de la proportionnalité. On aurait tendance à croire que les élèves reconnaissent le modèle dès le deuxième ou troisième problème et l'appliquent à tous les autres problèmes par effet de contrat (ce qui est peut être le cas pour une minorité d'entre eux qui répondent 15 buts). Pourtant, beaucoup remettent en doute ce modèle et n'hésitent pas à conclure qu'on ne peut pas trouver la réponse à ce sixième problème. Intuitivement ils sentent bien que le modèle proportionnel ne s'applique pas dans cet exemple.

Problème 7. Un cycliste se chronomètre sur différentes distances. Il obtient le tableau suivant :

Distance (en kilomètres)	15	30	60
Durée (en minutes)	45	90	210

La durée est-elle proportionnelle à la distance parcourue ? Justifie ta réponse.

Cet exercice fait explicitement référence au modèle proportionnel. Il s'agit maintenant de se référer à un cadre théorique établi. La question fait référence à l'objet mathématique « proportionnalité » alors que, jusqu'à présent, la proportionnalité intervenait en tant qu'outil. Pour répondre correctement à cette question l'élève doit avoir une certaine compréhension du modèle proportionnel[1]. D'autre part, ce problème propose l'introduction d'un troisième couple de donnée. René De Cotret (1991) a montré que « l'introduction d'un troisième couple amène la plupart des élèves à rechercher des régularités ou des invariants dans les problèmes. Ils cherchent à trouver comment les données numériques sont liées et, surtout, si le lien qu'ils auraient normalement exploité pour résoudre le problème reste cohérent avec le troisième couple. La recherche de régularités peut s'apparenter à la recherche d'un modèle permettant

1 Dans les classes qui n'avaient pas encore travaillé la proportionnalité les élèves ont eu recours au dictionnaire pour connaître la signification du mot « proportionnalité »

d'établir une relation satisfaisante entre les données ». Seuls trois élèves de CM2 ont répondu à ce problème, les réponses proposées sont issus d'élèves de Sixième.
Certains élèves utilisent les propriétés de linéarité : l'élève suivant confronte le tableau donné avec le cadre proportionnel (il fait un raisonnement par l'absurde).

Non, elle n'est pas proportionnelle car les deux dernière cases du haut font ×2 et les deux du bas ne font pas ×2.

si cela serais juste le tableau serais comme ça

×2 ×2

Distance (en kilomètre)	15	30	60
Durée (en minute)	45	90	180

×2 ×2

Le retour à l'unité est délicat à utiliser dans cet exemple. En effet, dans le cadre d'une distance parcourue pendant une durée donnée, le retour à l'unité exprime généralement la vitesse moyenne. Ici il s'agirait de comparer les vitesses moyennes des trois couples de données. Les vitesses moyennes sont généralement exprimées en km/h ou m/s mais rarement en km/min, or dans le contexte de l'énoncé c'est cette dernière unité quotient qui est privilégiée. Ceci représente une difficulté supplémentaire car la vitesse moyenne ne s'exprime pas facilement, celle-ci vaut (1/3) km/min dans les deux premières colonnes et 6/21 dans la dernière…la comparaison n'est pas simple si on ne sait pas que les fractions 1/3 et 6/21 représentent des nombres différents. Le second retour à l'unité est plus facile à utiliser dans ce contexte mais ne représente plus la vitesse moyenne mais le nombre minutes pour parcourir 1 km. Dans les deux premières colonnes, le cycliste met en moyenne 3 minutes par kilomètres. De là deux possibilités s'offrent à l'élève. Soit il calcule dans la dernière colonne le nombre de minutes par kilomètres : 21/6 qui est supérieur à 3 (difficile). Soit il fait un raisonnement par l'absurde : « si la situation était de proportionnalité, le cycliste mettrait 60×3 = 180 minutes pour parcourir 60 kilomètres ». Dans les copies, ce retour à l'unité est beaucoup utilisé mais sa signification (nombre de minutes par kilomètre) n'est jamais explicitée. L'élève l'utilise comme un facteur qui fait passer d'une ligne à l'autre (« on fait ×3 pour passer de la première ligne à la deuxième, sauf pour la troisième colonne »).

Non, car 15×3=45
30×3=90
60×3=180 donc ce n'est pas propotionnelle.

L'élève suivant compare les coefficients (3 pour les deux premières colonnes et 3,5 pour la troisième colonne).

Bah non car 15×3=45, 30×3=90 mais faut faire 60×3,5 pour avoir 210 pas comme les autres.

La procédure suivante est peu observée mais témoigne d'une compréhension fine de la règle de trois. « Si le cadre est proportionnel on peut appliquer la règle de trois » équivaut à « si on ne peut pas appliquer la règle de trois alors le cadre n'est pas proportionnel ».

Quand je fais 90 × 60 ÷ 30 sa ne fait pas 210
Non elle n'ai pas proport-onnel.

L'erreur la plus répandue est la suivante : l'élève ne s'intéresse qu'aux deux premières colonnes et conclut à la proportionnalité (ce qui témoigne déjà de la reconnaissance du modèle proportionnel).

> oui elle est proportionnelle car 15x2=30 et 45x2=90 Donc c'es proportionnelle .

La présentation sous forme de tableau renvoie également à l'image classique du tableau de proportionnalité ce qui peut induire une réponse affirmative. L'amalgame « tableau = proportionnalité » est un obstacle à ne pas négliger.

> Oui car c'est un tableau de proportionnalité

La diversité des réponses illustre la richesse de ce problème. En particulier, la présence d'un troisième couple de données et des rapports qui ne sont pas constants devraient déboucher sur des discussions très pertinentes entre élèves.

2.3. Conclusion de l'expérimentation

L'objectif de cette expérimentation était d'observer la réaction d'élèves face à des situations de proportionnalité et de non proportionnalité. Les élèves choisis sont issus de classes de CM1-CM2 et Sixième. Certains n'ont jamais entendu parler de proportionnalité et d'autres ont déjà vu cette notion en classe. Les situations proposées font référence à des contextes variés toujours liés à la vie quotidienne (achat de pain, recette, vitesse moyenne, foot, etc.) et restent dans le cadre de la recherche d'une quatrième proportionnelle. L'expérimentation a permis de mettre en relief différents constats.

- La multiplicité des procédures (additive – aidée au non par un dessin, multiplicative, passage à l'unité, règle de trois, coefficient de proportionnalité) illustre la richesse du thème des proportions. Les élèves ne se focalisent pas sur une procédure, ils peuvent changer d'outil d'un problème à l'autre. L'un des enjeux de l'enseignant est de les aider à choisir une procédure pertinente en fonction de l'énoncé.
- On observe clairement une différence entre les élèves de Primaire et ceux de Sixième. Les élèves de Sixième se réfèrent plus systématiquement à des procédures décrites dans leur cours, en particulier les dernières techniques étudiées (coefficient de proportionnalité, règle de trois). Ils schématisent souvent les situations à l'aide de tableau même si ce dernier n'est pas nécessaire dans le contexte présenté. Les procédures sont plus complexes techniquement mais pas toujours utilisées à bon escient. Un point délicat est mis en relief : l'utilisation prématurée et trop structurante du tableau de proportionnalité peut mener à des réponses erronées (voir problèmes 4, 6 et 7). Ce point a déjà signalé dans Brousseau (1995). Beaucoup d'élèves de Sixième assimilent « tableau » et « proportionnalité ».
- Même si les situations classiques (achat, recette) à fort indice de proportionnalité ne sont pas forcément évidentes à conceptualiser[2]. Beaucoup d'erreurs, y compris en Sixième, montrent que les élèves ont des difficultés à faire le lien entre le contexte et la question posée, ils n'ont pas de regard critique sur leur résultat. Les erreurs sont souvent issues d'un calcul unique (l'élève cherche à résoudre le problème avec une opération…mais laquelle choisir ?). A l'inverse, les réponses accompagnées d'un dessin sont généralement justes. Ceci nous incite à penser qu'une progression sur le thème de la proportionnalité qui donne la parole aux élèves tout en schématisant le plus possible peut s'avérer payante pour conceptualiser les situations. Attention, ici nous parlons de schéma en tant que condensé graphique de l'information

2 « Conceptualiser » est entendu dans le sens de « reconnaître un cadre mathématique (explicitement ou non) derrière une situation ou un contexte donnés ».

contenue dans un énoncé (que ce schéma soit un dessin représentatif ou non de la situation : voir problème 3). L'idée serait de donner aux élèves le moyen de se construire des images mentales lors de la lecture d'un énoncé.

• Concernant la reconnaissance de situation de proportionnalité proprement dite, nous pouvons apporter quelques conclusions. La consigne de l'expérimentation est « peut-on répondre à la question posée ? Si oui pourquoi ? Si non pourquoi ? ». Les élèves n'ont pas vraiment répondu à la deuxième question. En effet, lorsque la réponse est « oui on peut répondre à la question posée », la justification est absente mais remplacée par le calcul du résultat. Ce qui revient à dire, « oui, on peut répondre, car on répond ». Il faut alors étudier les procédures utilisées pour savoir pourquoi ils peuvent répondre. Ces procédures font appel aux propriétés et aux techniques de la proportionnalité (linéarité et retour à l'unité).

Aucun élève ne justifie en disant « oui, on peut répondre car les grandeurs en jeu sont proportionnelles » alors que certains d'entre eux justifient « non, on ne peut pas répondre car les grandeurs en jeu ne sont pas proportionnelles ». Dans le problème 7, il est aisé de conclure à la non proportionnalité en mettant en contradiction la troisième colonne du tableau face aux deux premières (intérêt du troisième couple de données). Par contre, dans les problèmes 2, 5 et 6 l'élève doit trouver des arguments pour pouvoir conclure à la non proportionnalité. Le contexte « réel » des problèmes 5 et 6 (âge/taille, buts/match) donne lieu à de nombreuses tentatives d'argumentation basées également sur le réel (« on ne grandit pas régulièrement », « on ne sait pas si Youri sera en forme et marquera », etc.). Derrière ces arguments se cache la perception de ce qui fait la proportionnalité, c'est-à-dire une valeur invariante et reproductible (généralement la valeur pour 1) ou le rapport constant. L'un des enjeux principaux de l'enseignement de la notion de proportionnalité est de reconnaître cet invariant.

3. Vers une progression *logique* de l'enseignement de la proportionnalité ?

Ce paragraphe est une ouverture sans prétention vers un enseignement « logique » de la proportionnalité. Il mériterait une mise à l'épreuve plus construite et pourrait être l'objet d'une étude plus approfondie. Bonnet (2011) propose une progression sur ce thème adaptée aux CM2 et très largement utilisable en Sixième. La complexification des contextes et des problèmes de proportionnalité est évidemment liée aux différents types de nombres mobilisables par les élèves (l'utilisation de fraction-quotient en sixième ouvre de nouvelles perspectives de résolution de problème basées, en particulier, sur le coefficient de proportionnalité).

3.1 En CE1-CE2 (Deuxième et troisième Primaire)

A ce niveau, la multiplication de deux entiers est en place et beaucoup d'énoncés de problèmes peuvent servir de prétexte à l'utilisation du terme « proportionnel » et à une discussion sur une question subsidiaire faisant intervenir des propriétés de proportionnalité. Par exemple :

> *Les écoliers français ont 24h de cours par semaine. Combien ont-ils d'heures de cours en 15 semaines ?*

Cet énoncé peut être accompagné à l'oral de la phrase suivante : *Le nombre d'heures de cours est proportionnel au nombre de semaines.* Il s'agit de rendre familier le terme « proportionnel » en l'utilisant à bon escient.

La discussion peut s'engager grâce à la question subsidiaire suivante : *Combien ont-ils d'heures de cours en 30 semaines ?*

L'idée est d'intégrer petit à petit le terme « proportionnel » et de commencer à travailler sur les propriétés de linéarité.

3.2 En CM1-CM2 (Quatrième-Cinquième Primaire)

C'est à ce moment que la proportionnalité fait son apparition dans les programmes. Il semble important de privilégier, dans un premier temps, des contextes qui permettent une schématisation de l'énoncé (exemple, le problème 3 « recette »). Les élèves peuvent dessiner l'histoire racontée dans l'énoncé. Petit à petit les dessins figuratifs (bonhommes, etc.) deviennent plus abstraits (traits, etc.) puis seuls les aspects numériques sont représentés (passage de traits ou points aux nombres). Plus tard, ces représentations peuvent conduire à l'élaboration de tableaux. Comme nous l'avons mentionné précédemment, il s'agit cependant de faire attention à l'introduction trop précoce de tableaux de proportionnalité pour ne pas faire l'amalgame « tableau = proportionnalité ». La présentation de tels tableaux devrait toujours être accompagnée de la description explicite de la situation (beaucoup d'ouvrages proposent des exercices où un tableau est donné, une ou deux cases sont vierges et l'élève doit remplir ces cases, le terme de proportionnalité étant exclu). Les lectures graphiques et les constructions de graphiques sont également une piste à suivre en lien avec les tableaux de proportionnalité, mais attention, un tableau présente un nombre fini de données alors qu'un graphique étend ces données au domaine du continu. Lever cet implicite ne relève pas du Primaire mais il peut être à l'origine d'obstacles à venir (graphique en bâton par exemple).

Les travaux de René de Cotret (1991) montrent que certains contextes (prix, recettes, etc.) semblent susciter plus naturellement que d'autres le modèle proportionnel ; il semble aussi que l'introduction d'un troisième couple de données permette à l'élève de rechercher ou de vérifier plus facilement des régularités et donc de « tester » la proportionnalité. Il est certainement pertinent de s'appuyer sur ces conclusions pour créer des énoncés. Il semble également important de donner la parole aux élèves, de confronter les différentes procédures (linéarité et passage à l'unité) et de les faire critiquer des situations ou la proportionnalité n'est pas le bon modèle. La reconnaissance de situation de proportionnalité est délicate, en effet les contextes issus du réel sont toujours soumis à discussion (le prix au kilo peut diminuer si la quantité augmente, Youri peut marquer 3 buts par matchs...)...sur quels arguments peut-on alors se baser pour « prouver » si telle ou telle situation relève, ou non, de la proportionnalité ? Les arguments seront souvent liés au contexte et au « bon sens » de l'élève et de l'enseignant. Comme on l'a vu avec le problème 7 et comme l'a signalé René de Cotret dans sa thèse (1991), l'introduction d'un troisième couple de données facilite le travail de modélisation. L'important est de travailler « raisonnablement » avec le maximum de vraisemblance (les contextes inconnus des élèves sont à appréhender avec attention). Les débats entre pairs ont également pour but de travailler sur les implicites des énoncés. Multiplier les exemples, varier les contextes, diversifier les situations, demander aux élèves de chercher par eux-mêmes dans leur entourage des situations modélisées par la proportionnalité...tout ce qui peut amener à discuter du modèle devrait être exploité.
D'un point de vue technique, les propriétés de linéarité et le retour à l'unité (règle de trois, sous la forme dictée de trois phrases avec calcul de la division qui donne la valeur pour un) semblent être à privilégier dans un premier temps. Il s'agit alors de faire attention aux données numériques. Pour l'utilisation du retour à l'unité, la division doit être exacte. Les rapports internes et externes doivent être pensés en terme de variables didactiques (voir paragraphe 1.4.) dans le but de faire évoluer les procédures. Comme nous l'avons rappelé (problème 3 paragraphe 2.2.), les rapports entiers semblent exploités assez naturellement par les élèves, il faut cependant faire attention à ne pas laisser les élèves s'enfermer dans ce cadre. La complexification des rapports numériques dans un même contexte est certainement à travailler.
La recherche de la procédure la plus efficace par débat avec les élèves peut certainement jouer un rôle important dans l'acquisition de l'autonomie face aux problèmes de proportionnalité. Le

but recherché est de ne pas enfermer l'élève dans une procédure type qu'il répétera sans la comprendre (le produit en croix est l'archétype de la procédure dénuée de sens qui supplante toute autre procédure).
Les agrandissements de figures géométriques sont également à exploiter mais une difficulté supplémentaire apparaît : les grandeurs proportionnelles sont généralement exprimées dans la même unité (exemple : 4 cm devient 7 cm) alors que les contextes usuels de proportionnalité mettent en relation des grandeurs différentes (exemple : des kilos de pomme et des euros). Les échelles peuvent être utilisées à partir de cartes ou de plan (passer du représentant au représenté ou inversement). Le calcul d'échelle est une activité délicate à laisser pour le collège.
Les changements d'unités peuvent être de bons contextes à exploiter si le coefficient de proportionnalité n'est pas une puissance de dix, sinon c'est la numération de position qui est plus clairement travaillée. Les contextes de vitesse moyenne et de pourcentage sont délicats à appréhender. La vitesse « moyenne » est une grandeur quotient difficile à gérer (comme on l'a vu dans le problème 4). Les pourcentages font intervenir un nouveau symbole (%) et un rapport aux fractions qui peut être trop prématuré.

3.3 Au collège

Le document « Ressources pour les classes de 6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, et 3^{e} du collège : proportionnalité au collège » EDU (2005) est une source d'informations et d'explications pertinentes.
En Sixième, tous les élèves n'ont pas eu le même enseignement en primaire. Certains d'entre eux n'ont malheureusement pas entendu parler de proportionnalité. Il semble donc important d'engager très tôt dans l'année une évaluation diagnostique concernant ce thème. Présenter de multiples contextes et privilégier la discussion entre pairs dans le but de faire un état des lieux des procédures mobilisables semble être le point de départ essentiel. Le tableau de proportionnalité devrait encore apparaître comme une aide à la formulation et non comme un fin en soi. Le terme « coefficient de proportionnalité » devrait apparaître assez tard et devrait répondre à un manque créé chez les élèves (dans un premier temps parler de « rapport constant » puis, plus tard, nommer ce rapport).
Les contextes de vitesse moyenne et de pourcentages peuvent être abordés de manière plus systématique. Les échelles (plans, cartes, photos, maquettes...) sont abordées mais le calcul général d'une échelle est à reporter aux classes suivantes.
L'idée principale est de s'assurer que les élèves maîtrisent en fin d'année les différentes procédures de base (linéarité, retour à l'unité, coefficient de proportionnalité), qu'ils soient capables de choisir la procédure la plus efficace, qu'ils puissent schématiser une situation par un tableau sans faire l'amalgame « tableau = proportionnalité » et enfin qu'ils puissent prouver qu'une situation ne satisfait pas aux critères de proportionnalité (rapport non constant ou « bon sens » si la situation est tirée du réel sans possibilité mathématique de discerner le vrai du faux).
Pour les autres classes du collège le document EDU (2005) est très précis. Le passage de l'étude de phénomènes proportionnels contextualisés (proportionnalité en tant qu'outil) à l'étude de la proportionnalité pour elle même (proportionnalité en tant qu'objet mathématique) pose de nouveaux problèmes qu'il s'agirait d'étudier soigneusement. La technique du produit en croix reste également un problème qui mériterait à lui seul une nouvelle réflexion.

Conclusion

L'étude de la notion de proportionnalité s'effectue sur le long terme, du cycle 3 à la fin du collège. Chaque niveau d'étude voit cette notion sous différents angles, mais pourtant même en Seconde les élèves semblent avoir des lacunes (voir Gille 2008). Il semble donc important de s'interroger sur la conceptualisation de la proportionnalité et ce, dès le plus jeune âge.

La première partie de l'article visait à clarifier les appuis théoriques de la construction d'énoncés de problème de proportionnalité. Le but est de confronter des élèves de primaire et de 6[e] à des situations modélisables ou non par la notion de proportionnalité. La suite de l'article s'appuie sur cette expérimentation pour viser trois objectifs. Le premier objectif est de repérer les procédures mobilisables par les élèves en s'appuyant sur les fondements mathématiques de la proportionnalité (Simard 2012). Le deuxième objectif est d'étudier la continuité et les ruptures entre le primaire et le collège concernant ces procédures. Enfin le dernier objectif est de préciser les obstacles générés par l'apprentissage lui-même de la notion. Les procédures basées sur les propriétés de linéarité ou de retour à l'unité se prolongent entre le primaire et le collège, mais les procédures de plus en plus complexes (tableaux, coefficient de proportionnalité) génèrent de nouveaux obstacles. Par exemple, confronté à une situation de type « recette », un élève de CM1 réussira grâce à une procédure basée sur une représentation schématique de la situation tandis qu'un élève de Sixième échouera sur le même problème en tentant de calculer le coefficient de proportionnalité. Les observations réalisées lors de cette expérimentation peuvent servir à l'élaboration d'une logique d'enseignement de la proportionnalité sur le cycle 3 et le début du collège. La dernière partie de l'article donne quelques pistes à ce sujet. L'idée est de baser largement l'apprentissage de la proportionnalité sur des contextes variés en insistant sur les propriétés de linéarité et de retour à l'unité. Ces deux techniques évoluant de front en fonction des contextes présentés (contextes à fort indice de proportionnalité). Le tableau de proportionnalité est alors considéré uniquement comme un outil pour pour ré-écrire l'énoncé et non pas comme une fin en soi (au moins jusqu'en fin de Sixième). Des situations proportionnelles et non-proportionnelles issues du réel sont discutées en classe, d'une part pour travailler sur les implicites et d'autre part pour faire ressortir les propriétés caractéristiques de la proportionnalité.

Bibliographie

Socle Commun des Connaissances et Compétences (2006) Le socle commun des connaissances et des compétences – décret n° 2006-830 du 11 juillet 2006.

BARUK S. (1985), *L'âge du capitaine, De l'erreur en mathématiques*, Seuil.

BOHS (2004), Bulletin Officiel Hors-Série n° 5 du 9 septembre 2004.

BOHS (2008) Bulletin Officiel Sors-Série n° 3 du 19 juin 2008.

BOISNARD D., HOUDEBINE J., JULO J., KERBOEUF M-P., MERRI M. (1994), *La proportionnalité et ses problèmes*, Hachette.

BONNET N. (2011), *La proportionnalité sans problème*, SCEREN.

BOOS (2008) Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008.

BROUSSEAU G. (1995), Les Mathématiques à l'école, APM.

BROUSSEAU G. (1988), *Théorie des Situations Didactiques*, La Pensée Sauvage.

COMIN E. (2002), L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège, *Recherche en didactique des mathématiques,* 22 (2.3), 135-182, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CNDP (2002) *Document d'application des programmes, Mathématiques cycle des approfon-dissements cycle 3*, CNDP.

EDU (2005) Ressources pour les classes de 6°, 5°, 4° et 3° du collège, Proportionnalité au collège, Eduscol.

ERMEL (2001), *Apprentissages mathématiques en 6°*, I .N.R.P. , Hatier.

GILLE E. (2008), Proportionnalité en Seconde … et apprentissage de la citoyenneté, *Bulletin de l'APME,* Num. 474. p. 11-19.

HERSANT M. (2005), La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui, *Repère – IREM* n°59, pp 5 à 41.

HOUDEMENT C. (1999), Le choix des problèmes pour la « résolution de problèmes », *Grand N* n°63, pp. 59 à 76.

HOUDEMENT C. (2003), La résolution de problème en question, *Grand N* n°71, pp. 7 à 23.

PFAFF N. (2003), Différencier par les procédures : un exemple pour la proportionnalité au cycle 3, *Grand N* n°71, pp. 49 à 59.

LEVAIN J.P. (1998), *Faire des maths autrement, Développement cognitif et proportionnalité*, L'Harmattan.

LEVAIN J.P., VERGNAUD G. (1994), Proportionnalité simple, proportionnalité multiple, *Grand N* n°56, pp. 55 à 66.

SCEREN (2010), *Le nombre au cycle 2*, SCEREN.

RENE DE COTRET S. (1991), *Étude de l'influence des variables indice de proportionnalité du thème et nombre de couples de données sur la reconnaissance, le traitement et la compréhension de problèmes de proportionnalité chez des élèves de 13-14 ans*, thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.

SIMARD A. (2012), Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique, *Petit x*, n°89, pp.51-62.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3.