DES SÉANCES ORDINAIRES COMPORTANT UNE DIMENSION HISTORIQUE : QUELS ENSEIGNEMENTS ?

Thomas BARRIER
Anne-Cécile MATHÉ
Thomas de VITTORI

Laboratoire de Mathématiques de Lens, Université d'Artois

Résumé. Dans cet article, nous abordons la question de l'analyse didactique de séances de classe utilisant des supports historiques ou des activités inspirées par l'histoire des mathématiques. Après un rapide état des lieux des enjeux, deux exemples de séances menées dans un collège sont analysées. Nous interrogeons d'abord les potentialités didactiques offertes par le recours à une dimension historique du point de vue des apprentissages mathématiques. Nous questionnons ensuite la nature des savoirs ou connaissances historiques susceptibles d'être convoqués en classe de mathématiques. Dans chacune de ces analyses, nous montrons que les deux champs (mathématiques et histoire) interagissent et rendent ces séances particulières tant pour les tâches et les apprentissages des élèves que pour les actions et les objectifs du professeur.

Mots-clés. Histoire des mathématiques, didactique des mathématiques, géométrie, numération, collège

Nous remercions chaleureusement Hervé Loeuille, professeur de mathématiques au collège collège Y. Coppens à Lannion, d'avoir rendu possible ce travail en nous autorisant à filmer ses classes.

Introduction

Le potentiel de l'histoire pour l'enseignement des mathématiques n'est plus aujourd'hui un sujet de débat. Tant pour la simple culture humaniste que pour la compréhension fine de certains résultats scientifiques, de nombreux auteurs ont mis en évidence l'intérêt de l'introduction d'une perspective historique en classe ou en formation. Dès les années 1990, les enquêtes menées par Tournès (1993) auprès de professeurs de mathématiques montrent que ces derniers s'accordent généralement sur le fait que « le recours à l'histoire permet d'obtenir une meilleure attention et une meilleure motivation » des élèves (ibid, p. 153). L'auteur souligne aussi « qu'une formation, même modeste, en histoire des mathématiques, peut changer la représentation que l'enseignant se fait de sa discipline » (ibid, p. 152). Pour les élèves, « l'enjeu d'une perspective historique est tout autant de faire mieux comprendre l'activité mathématique, que de les y intéresser. » (Barbin 1997, p. 25). Initiée par quelques enseignants et chercheurs passionnés (dans le cadre des IREM par exemple pour la France), cette mobilisation de l'histoire dans les classes de mathématiques a maintenant trouvé une expression institutionnelle dans un grand nombre de pays. Des ouvrages comme Fauvel & Van Maanen (2002) ou Katz & Tzanakis (2011) fournissent des états des lieux des pratiques dans le monde, lesquelles sont généralement sous-tendues par les mêmes réflexions sur l'intérêt de l'histoire des mathématiques pour l'enseignement. En France, des références à l'histoire des sciences sont récemment apparues dans les programmes scolaires du secondaire, en particulier en mathématiques. Les programmes du collège de 2008 mentionnent que « certains problèmes peuvent prendre appui sur des éléments empruntés à l'histoire des mathématiques. » Les anciens programmes de première S de 2000 comportaient un paragraphe entier sur l'épistémologie et l'histoire des mathématiques, où les enseignants étaient invités à faire prendre conscience à leurs élèves que « les mathématiques sont une discipline vivante, fruit du labeur et du génie de nombreux individus ». Ces programmes affirmaient également que « connaître au moins le nom de quelques-uns d'entre eux et la période à laquelle ils ont vécu fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique ». Les programmes suivants (2010 et 2011) confirment cette tendance : les élèves de sections scientifiques peuvent se voir présenter des « textes historiques » afin de les aider « à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts ». Au niveau de la formation des enseignants, le cahier des charges encadrant la masterisation (2007) faisait mention de l'importance pour tout professeur de collège et lycée de savoir situer « sa ou ses disciplines, à travers son histoire, ses enjeux épistémologiques, et les débats qui la traversent ». Dans de nombreuses universités, cette demande s'est traduite par la mise en place d'unités d'enseignement sur l'histoire des disciplines scientifiques. On trouvera un état des lieux assez complet dans Guedj (2006).

En quelques décennies, la pratique de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement est donc devenue relativement courante et reconnue sur le plan institutionnel. Qu'en est-il, au niveau de la recherche universitaire, de la compréhension des liens qu'entretiennent approches historiques et apprentissages mathématiques ? À l'échelle internationale, les spécialistes de l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement s'accordent sur le double constat suivant : la littérature scientifique fourmille d'exemples pertinents d'approches historiques, mais ce qui les rend pertinents dépasse rarement les considérations subjectives. Les arguments avancés sont par ailleurs d'une grande variété, que ce soit sur le comment ou le pourquoi de cette utilisation (Jankvist 2009a). Ce type de constat a engendré depuis plusieurs années un intérêt croissant pour des études empiriques de type didactique sur les pratiques en classe ou en formation. Dès 2004, Siu et Tzanakis affirmaient que des études empiriques sur l'efficacité de l'usage de l'histoire étaient un passage obligé pour l'avancée de la recherche.

L'enthousiasme est là mais de multiples difficultés sont rapidement apparues. Jankvist (2009a, pp. 69-70) pointe, par exemple, le problème de la définition d'une notion d'efficacité pour de telles pratiques. Selon lui, la distinction entre deux formes d'utilisation de l'histoire (comme objectif d'apprentissage ou comme outil d'apprentissage) entraîne le besoin de distinguer deux mesures d'efficacité différentes. Après deux études de cas, il conclut finalement que les études empiriques sur l'utilisation de l'histoire des sciences en classe doivent prendre en compte les deux aspects. La situation est donc complexe, y compris sur le plan empirique. On trouvera une recension critique de diverses approches méthodologiques dans Guillemette (2011).

D'une façon générale, les différentes études portant sur l'utilisation de l'histoire en classe de mathématiques se sont le plus souvent centrées soit sur les apprentissages mathématiques (études relevant de la didactique des mathématiques) soit sur le choix de documents à proposer aux élèves (études généralement proches de recherches en histoire des mathématiques). Dans notre recherche, il nous a semblé important d'essayer de saisir les interactions entre les aspects mathématiques et historiques puisqu'ils se retrouvent de fait réunis dans les séances qui nous intéressent. Or, ce genre de travaux se heurte au fait qu'une analyse de séances mêlant histoire et mathématiques n'entre pas naturellement dans les cadres théoriques didactiques habituels. Des outils permettant d'identifier et d'analyser la nature du travail historique mené en classe et son impact sur l'activité mathématique des élèves restent selon nous à construire. Pour s'engager dans ce travail, il semblait important de joindre des compétences multiples. Au sein du Laboratoire de Mathématiques de Lens (LML), la présence d'historiens et de didacticiens des mathématiques a permis de construire un groupe de travail autour de ce thème[1]. Selon nous, l'analyse de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe et en formation nécessite la prise en compte des deux champs de

1 Il s'agit du projet EDU-HM (Études didactiques sur l'Utilisation de l'Histoire des Mathématiques en classe et en formation) subventionné dans le cadre du financement régional pour le développement de la recherche « Projets émergents » Nord-Pas de Calais.

connaissances (mathématiques et histoire) et de leurs spécificités. Notre travail s'organise autour de plusieurs questions. D'une part, dans quelle mesure la dimension historique des séances auxquelles nous nous intéressons contribue-t-elle au fonctionnement des situations et aux apprentissages mathématiques ? D'autre part, quels sont les savoirs historiques visés par l'enseignant ? Et dans quelle mesure des connaissances relevant de l'histoire des mathématiques émergent-elles à travers l'expérience d'activités contextualisées ?

Dans cet article, nous souhaitons rendre compte de premiers éléments d'analyse de séances de classe ordinaire, en appui sur un recueil de vidéos. L'approche qui est la nôtre privilégie une lecture pragmatique des séances en puisant, au besoin, les concepts didactiques qui s'avèrent éclairants. Le corpus sur lequel reposent ces analyses a été recueilli dans diverses classes de collège d'un même enseignant entre 2007 et 2011. Cet enseignant ne se considère pas comme un spécialiste en histoire des mathématiques, ses connaissances dans ce domaine relèvent principalement d'une culture personnelle. Dans un entretien réalisé en 2007, celui-ci se présente comme un autodidacte ayant glané ses connaissances en histoire des mathématiques au fil de ses lectures de magazines de vulgarisation scientifique. Lorsqu'on évoque avec lui la question du choix d'intégrer l'histoire des mathématiques à son enseignement, il fait en premier lieu référence à des rencontres :

> H : En faisant des stages de formation continue, j'ai eu la chance de rencontrer des formateurs qui étaient assez férus d'histoire des maths. J'ai commencé comme ça à récolter des petits bouts d'activités, des petits supports, des petits textes etc. J'en parlais en classe mais c'était un peu éparse, ce n'était pas structuré, c'était de la fantaisie, voilà.

À la suite de ce premier contact avec l'histoire des mathématiques et son usage en classe, ce qui n'était qu'une simple fantaisie a pris une place de plus en plus importante comme réponse à une demande institutionnelle :

> H : Vers 1999-2000, Ségolène Royale avait amené la lecture en classe. Et donc, j'ai eu à faire faire de la lecture. Je ne savais pas trop ce que j'allais leur faire lire et je me suis dit : après tout, on va prendre des extraits d'ouvrages parlant d'histoire des mathématiques sur des sujets qu'on étudie en classe. Les premiers textes que j'ai fait lire c'était sur les numérations égyptiennes. C'était intéressant.

L'introduction d'une perspective historique dans ses cours est donc issue de rencontres, d'un certain goût pour cette approche et d'un contexte institutionnel favorable. La systématisation de ces pratiques résulte quant à elle du constat d'une motivation particulière des élèves pour ce type de travail :

> H : Les enfants finalement accrochaient bien, et puis ils reconnectaient le texte à des activités qu'on avait pu faire. Et donc je me suis dit : puisque ça à l'air de leur plaire, je vais essayer de systématiser.

Un point sur lequel il nous paraît important d'insister est le fait que l'enseignant n'est ni historien, ni didacticien des mathématiques. Les séances que nous avons filmées n'ont pas été préparées en amont par un groupe de travail ou en vue d'une expérimentation. Elles s'inscrivent toutes dans le cadre des pratiques quotidiennes de cet enseignant et c'est pourquoi nous les qualifions de séances ordinaires, dans le sens noble du terme. Elles portent sur des domaines variés : polygones et constructions géométriques en sixième (deux séances, 2007 et 2011), numération en sixième (une séance, 2011), modélisation et mesure de grandeurs en quatrième (une séance, 2011), résolution de problèmes en troisième (trois séances, 2011).

Cet article est structuré en deux parties. Dans la première, nous proposons une analyse du potentiel didactique d'une séance du corpus, principalement, mais pas seulement, du point de vue des savoirs mathématiques en jeu. Le contexte historico-mathématique est celui du tracé au sol d'un carré « à la manière des mathématiciens indiens ». Dans la seconde partie, nous élargissons l'analyse en interrogeant la nature du travail historique des élèves induit par les pratiques de cet enseignant. Là aussi, nous nous appuierons sur une étude de cas. La séance analysée traite de divers systèmes de numération. Dans les deux cas, le niveau concerné est la classe de sixième. Ces deux parties sont relativement autonomes et sont écrites de manière à rendre possible des lectures indépendantes, en fonction de l'intérêt du lecteur. Cependant, si l'accent est mis dans un cas sur les enjeux mathématiques et dans l'autre sur les enjeux historiques, il s'agit bien des deux faces d'une seule et même médaille.

1. Des tracés à la façon des sulbasutras indiens : les effets didactiques du jeu sur les instruments

Nous questionnons dans cette partie les effets didactiques de la présence d'une dimension historique dans une séance de mathématiques. Dans les séances de notre corpus, cette dimension historique intervient selon des modalités diverses (cf. §2.1.). Chacune de ces modalités contribue de manière spécifique à déterminer les contraintes didactiques qui vont peser sur le jeu des élèves. Nous avons procédé sur le mode de l'étude de cas, sans visée généralisatrice. Notre choix s'est porté sur une activité de construction faisant intervenir des instruments dont la présence est justifiée par la mise en situation historique. Nous avons choisi de nous concentrer sur la question des instruments puisqu'il s'agit d'une variable didactique fondamentale des situations de construction, de reproduction ou de restauration de figures (Offre et al., 2006 ; Keskessa et al., 2007 ; Perrin-Glorian et al., 2012). Notons que la nature « historique » des instruments ne leur est pas intrinsèque, une corde ou un bâton n'est pas en soi un instrument historique. Ils sont historiques dans la mesure où ils renvoient explicitement à une pratique mathématique historiquement située. Dans le corpus que nous avons étudié, ces instruments « historiques » sont présents dans deux séances, se déroulant toutes deux à l'extérieur. La première séance concerne la mesure de grandeurs inaccessibles par différents moyens (usage de la croix du bûcheron, du reflet ou du bâton de Gerbert). Ce type de séance étant probablement mieux connue[2], nous nous concentrons ici sur la seconde. Celle-ci porte sur le tracé au sol et à la craie d'un carré à l'aide d'une corde par une méthode empruntée à des textes indiens anciens, les Sulbasutras.

1.1. Description de la tâche

Les Sulbasutras sont des textes décrivant des techniques pour la construction de formes géométriques à l'aide d'un piquet et d'une corde. Leur finalité est la construction d'autels sacrificiels. La séance à laquelle nous nous intéressons est d'une durée d'un peu moins d'une heure et se déroule dans la cour du collège. Il s'agit d'une classe de sixième. L'enseignant a prévu un polycopié intitulé « Les tendeurs de cordes ». Dans une première partie, le polycopié évoque les mathématiciens indiens, qui auraient travaillé « sur les problèmes de construction géométrique ». Le contexte est décrit en six phrases accompagnées d'une illustration représentant une activité rituelle indienne. Les pratiques évoquées ne sont pas datées. Cette rapide inscription socio-historique de l'activité est complétée d'une question visant une comparaison avec les mathématiques grecques (cf. Annexe 1). Une part importante de la contextualisation historique est assurée pendant la séance par une introduction dialoguée de l'enseignant (cf. §1.2). La deuxième partie du polycopié présente l'activité plus proprement mathématique proposée aux élèves. Il s'agit de la description d'une méthode de construction du carré à la manière des Sulbasutras. Le texte se présente comme une traduction en langage actuel du texte original. Nous remettons à plus loin la discussion concernant cette « didactification » de la méthode indienne et sa pertinence au regard des savoirs historiques en jeu (cf. §1.6). Nous nous centrons pour le moment sur la dimension historique comme outil pour les apprentissages mathématiques (Jankvist, 2009b). Nous reproduisons ci-après le texte du programme de construction :

2 On trouvera des exemples de ce type d'activités sur la page suivante (consultée le 03/07/2012) : http://www.math.uqam.ca/~charbon/MAT7222/WEBCT7222_04/CoursHistEnseignem.html

Voici la méthode utilisée pour construire un carré à l'aide d'une corde. Il a été traduit en langage actuel. Lis bien le texte, tu vas devoir construire un carré en suivant cette méthode.

- *Tendre une corde de la longueur correspondant au côté du carré qu'on veut construire.*
- *Marquer au sol ses extrémités O et E et son milieu I.*
- *Tracer le cercle de diamètre [OE] et les cercles de rayon [OE].*
- *Ces deux grands cercles se coupent en U et en V.*
- *Tendre une corde entre U et V.*
- *Marque N et S ses intersections avec le petit cercle.*
- *Les points U, N, I, S et V sont alignés dans cet ordre.*
- *Trace les cercles de centres respectifs E, O, N et S dont le rayon mesure la moitié de EO.*
- *Ces quatre cercles se recoupent deux à deux en A, B, C et D.*
- *Ces quatre points sont les sommets du carré.*

En suivant ces instructions, construis un carré à l'aide du matériel qui t'as été donné.

Notons qu'il s'agit d'instructions exclusivement procédurales (ce qui n'est pas rare dans un contexte historique). En ce sens, la consigne est fidèle à la contextualisation : l'approche est algorithmique, la validation de la méthode repose sur la construction effective du carré (Racine, 2007). Les propriétés mathématiques des objets géométriques en jeu – milieu, cercle, carré... – sont donc essentiellement susceptibles d'intervenir dans le contexte pragmatique de la construction à moins que l'enseignant ne prenne en charge la justification de la validité de cette suite d'instructions, du point de vue de l'enjeu de la tâche (construire un carré). La figure géométrique visée par cette construction est la suivante :

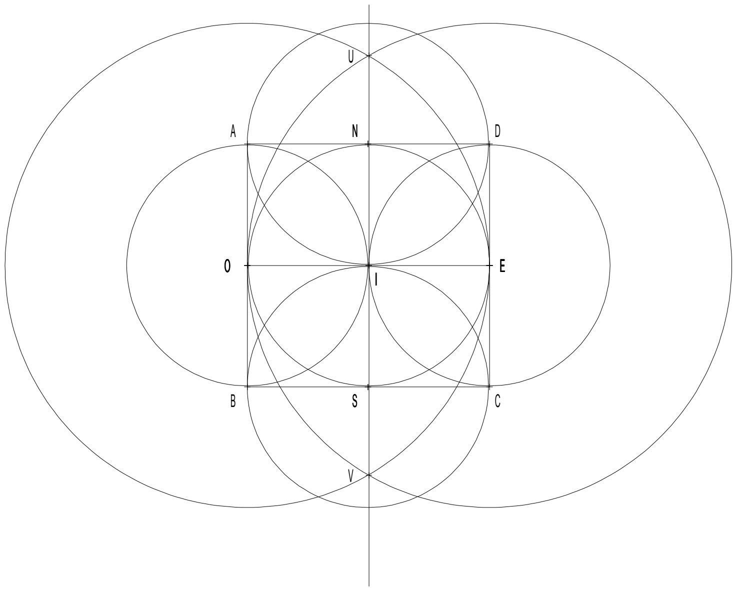

Figure 1. la construction géométrique visée

1.2. Inscription historico-culturelle et dévolution

Pour cette séance, il était exclu de filmer l'ensemble des élèves, ceux-ci étant dispersés dans la cour. Hormis lors de la phase collective de mise en place de la situation pour laquelle il a été possible d'avoir le groupe entier dans le champ de la caméra, les vidéos ne réalisent que des zooms sur plusieurs groupes d'élèves. Nous nous sommes par ailleurs attachés à filmer les interactions entre les élèves et l'enseignant, lorsque celui-ci passait dans les groupes. Les analyses qui suivent s'appuient sur des transcriptions de dialogues entre élèves et entre élèves et enseignant. Nous décrirons dans ce paragraphe la phase collective de la dévolution. L'enseignant a ensuite distribué le matériel (corde, craie et fiche polycopiée) aux élèves.

Ceux-ci se sont répartis dans la cour, par groupe de trois ou quatre, avec pour consigne de lire la partie de contextualisation de la fiche puis de réaliser le tracé au sol. La séance s'est terminée par une reprise de l'activité dans l'espace de la feuille, en revenant aux instruments usuels, règle graduée et compas.
La dimension historique est présente dans cette séance à travers l'inscription de l'activité proposée dans une pratique sociale contextualisée, un « jeu épistémique source » au sens de Sensevy (2011) : des tracés à vocation religieuse de figures géométriques à l'aide de cordes et de piquets. Au cours de cette séance, cette dimension est principalement portée par le discours de l'enseignant, plus que par le polycopié fourni aux élèves. Elle semble fonctionner comme un levier que l'enseignant actionne pour favoriser la dévolution. Dans l'extrait qui suit, l'enseignant est désigné par la lettre *H*, les élèves indifféremment par la lettre *E* :

H : Allez on écoute un petit peu. Alors aujourd'hui ce que je vous propose comme travail, c'est euh, c'est de faire des constructions comme le faisaient autrefois les mathématiciens indiens. On déjà parlé un peu des mathématiques indiennes ?

Es (deux voix) : Ouais.

H : À quelle occasion on a rencontré les mathématiques indiennes ?

E : Pour le calcul/

E : Pour les pierres/

E : Pour la géométrie

H : Oui, pour la géométrie. Et puis en ? Pour les nombres tu disais...

E : Oui.

Es (plusieurs élèves) : Pour les nombres avec des pierres.

H : Non mais pas tous en même temps sinon je n'entendrai rien. Oui ?

E : Les pierres.

H : Les pierres ?

E : Pour les mayas.

H : Ah, c'est pas les indiens ça.

E : Oui, avec des petits paniers...

H : Quand je parle des indiens, je parle des mathématiciens indiens habitants de l'Inde. Je parle pas...

E : Ah ! Il avaient écrit dans un livre ou quelque part que... Comment ils faisaient pour construire leurs temples.

H : Oui. Très bien, très bien, effectivement. On a vu les constructions... On se souvient du nom de, de ces textes ?

Cet extrait nous semble susceptible d'illustrer plusieurs caractéristiques des phases de dévolution de notre corpus. D'abord l'enseignant mène les échanges, il pose les questions, sélectionne les réponses sur lesquelles il veut rebondir, quitte à en reprendre certaines formulées à voix basse et que nous n'entendons pas (« pour les nombres tu disais »), organise les prises de paroles, etc. De leur coté, les élèves, tout du moins celles et ceux qui s'expriment, proposent des réponses, par association thématique ou simple écho. Il ne semble pas y avoir d'exigence forte de validité, les réponses sont à la fois foisonnantes et parfois peu pertinentes. Cette phase de dévolution de l'activité va durer un peu moins de trois minutes. Il aura été collectivement question des mathématiciens indiens et de leur livre expliquant comment construire les temples, de la numération des mayas, de celle de aztèques, des chiffres arabes ou plutôt arabo-indiens, de construction à la règle et au compas chez les mathématiciens grecs et à la corde pour les indiens. Si la plupart des idées sont amenées par les élèves, les échanges sont fortement guidés et l'enseignant semble ne pas hésiter à jouer sur des effets de contrat pour assurer l'avancé du dialogue, quitte à réduire a minima les enjeux de savoirs :

H : Non pas les chiffres entiers

[Quelques secondes passent]

E : Ah oui les chiffres euh...

E (un autre, à voix basse) : Naturel

H : Des chiffres arabes

E (collectif) : [Approuvent]

H : Et en fait on les doit pas aux...

E : Arabes

H : Oui mais ce sont aux mathématiciens...

E (collectif) : Indiens

Il y a là une différence importante avec la manière dont l'enseignant aborde les apprentissages mathématiques avec les élèves dans la suite de la séance (il semble accorder une plus grande importance au fait que les élèves procèdent de leur propre initiative). Cette différence d'approche semble pouvoir se comprendre par le choix de posture adoptée par l'enseignant, qui se positionne avant tout comme enseignant de mathématiques. La dimension historique est ici prioritairement un outil contribuant à la dévolution de l'activité mathématique. Les savoirs historiques sont mobilisés de manière déclarative, les questions qui les visent reposent sur un milieu pauvre puisqu'il s'agit seulement d'avoir recours à la mémoire. Quoi qu'il en soit, l'enseignant installe par ce moyen un arrière plan particulier dans lequel il invite les élèves à se situer. Le langage historique met en place un contexte spécifique et partagé. Plutôt que de construire des connaissances historiques, l'enjeu semble être celui d'une mise en place dialogique de la position d'élève dans le jeu d'apprentissage (Sensevy 2011), et les élèves s'y inscrivent de fait.

1.3. Potentialités didactiques de l'usage d'instruments à caractère historique

Comme pour « les mathématiciens indiens », les élèves ne disposent dans cette activité que d'une craie et d'une corde. Nous interrogeons donc, dans l'analyse *a priori,* qui suit, le potentiel de la corde comme instrument de tracé géométrique.
La corde peut, d'une part, être un instrument de comparaison ou de report de longueurs, à l'image du compas, à ceci près que ce qui est reporté ou comparé dans le cas du compas est plutôt un écartement entre deux points qu'une longueur de segment. La corde peut également servir à fractionner des longueurs. D'autre part, la corde peut être un instrument de tracé de lignes droites ou servir à contrôler des alignements. Ces fonctionnalités nécessitent un travail corde tendue, ce qui constitue une contrainte supplémentaire par rapport à l'approche des longueurs ou de l'alignement à l'aide d'une règle graduée. Enfin, la corde peut bien sûr être un instrument de tracé de cercles (ou d'arcs de cercle). Ce type de tracé nécessite une décision sur la longueur de corde à utiliser et sur le centre autour duquel réaliser le tracé. Le maintien d'une des extrémités en un point fixe pendant la rotation peut engendrer des difficultés, à l'image du maintien de la pointe lors d'un tracé au compas, tout comme le positionnement de la craie toujours à la même distance de cette première extrémité. Le tracé d'un cercle à la corde nécessite aussi de garder la corde tendue tout au long du tracé. Notons que parmi tous ces usages de la corde, seul le report de longueur semble avoir une existence institutionnelle, notamment à l'occasion du travail sur la concept de longueur en cycle 2 de l'école primaire. Les élèves sont donc susceptibles de l'avoir déjà pratiquée, ce qui est beaucoup moins probable pour les autres usages. Ces usages entretiennent des relations spécifiques avec les propriétés mathématiques des objets à construire. Nous illustrons cette remarque à partir de deux exemples qui nous serviront par la suite dans l'analyse *a posteriori* d'extraits du film de classe : le tracé d'un cercle et la construction du milieu d'un segment.

Le compas est l'instrument quasi exclusif du tracé des cercles en classe. Une fois l'écartement des branches fixé, la propriété d'équidistance des points du cercle, ou de la ligne, au centre est prise en charge par la rigidité de l'instrument lui-même. Dans le contexte du tracé à la corde, cette propriété est étroitement associée avec le fait de maintenir la corde tendue et les extrémités à une distance constante tout au long du tracé. Elle est physiquement vécue par celui ou celle qui réalise le tracé, elle doit être perçue pour que ce tracé puisse être envisagé. Ainsi, une maîtrise du tracé au compas ne garantit pas une conceptualisation approfondie de l'objet, ni même une conception du cercle exprimable en termes de distance au centre (Artigue & Robinet, 1982, p. 58 et 63). Il est même possible que cet usage dominant rende problématiques les tâches de tracé de cercle avec d'autres instruments, comme c'est le cas dans la situation étudiée. Le jeu sur les instruments pourrait être un levier qui, en renouvelant le questionnement pratique au niveau du tracé, autorise une nouvelle approche de l'objet géométrique « cercle » et de ses propriétés. On peut tout au moins faire l'hypothèse que l'introduction dans le milieu des élèves d'un instrument non usuel de tracé, comme la corde, peut être un moyen de révéler des confusions entre capacité de tracé et conceptualisation de l'objet (Artigue & Robinet, 1982, p. 9). Nous y reviendrons.

Passons au deuxième exemple. À l'école primaire, comme au début du collège, la construction du milieu d'un segment préalablement tracé passe le plus souvent par la mesure à la règle graduée. On place alors le milieu à mi-mesure des extrémités, toujours à partir de la même règle, qui en général n'est pas déplacée. Les questions d'alignement sont absorbées par l'usage de la règle, qui est à la fois un instrument de mesure et de gestion des alignements, le deuxième aspect étant complètement naturalisé et par conséquent masqué. La corde est également à la fois un instrument de fractionnement de longueur et de contrôle d'alignement mais la situation est différente quant aux propriétés mises en jeu en pratique, d'autant plus que le programme de construction ne demande pas explicitement de tracer le segment considéré. Plusieurs procédures paraissent envisageables :

P1. La première commence par le tracé au sol du segment et le codage de ses extrémités. Elle se poursuit en prenant la corde et en la pliant en deux parties égales. Le milieu est obtenu par un report de longueur. Dans ce cas, la propriété d'alignement du milieu d'un segment avec chacune des extrémités du segment n'intervient pas plus explicitement que dans la procédure à la règle puisque la question de l'alignement est absorbée par le tracé du segment qui est effectué indépendamment de la construction du milieu.

P2. La seconde consiste à étendre la corde sur le sol de manière à ce qu'elle soit rectiligne, à en marquer les extrémités puis à la plier en deux en ne manipulant qu'une seule des ses deux moitiés, l'autre moitié restant exactement à la même place. Le milieu est alors placé à la nouvelle extrémité obtenue. Théoriquement, cette procédure ne fait pas intervenir la question de l'alignement mais la question se pose d'un point de vue pratique, puisque la manipulation d'une seule moitié de corde sans que l'autre moitié ne bouge est délicate.

P3. La troisième prend explicitement en compte la propriété d'alignement. Elle débute en plaçant la corde au sol et en en marquant les extrémités comme en P2. La corde est ensuite pliée en deux parts égales et cette nouvelle longueur est utilisée pour tracer un arc de cercle de centre une des deux extrémités du segment. Le milieu est obtenu en recherchant le point de cet arc de cercle aligné avec les extrémités marquées (en traçant ou non le segment).

Comme on le voit, dans le cas où le segment n'est pas préalablement tracé au sol, les procédures de construction du milieu d'un segment sont susceptibles de faire intervenir une propriété d'alignement qui, dans le cas d'un construction à la règle graduée, est absorbée par l'usage de l'instrument. Il y a donc dans ce cas, comme dans celui du tracé du cercle à la corde un potentiel didactique spécifique. La présence dans le milieu didactique d'instruments non usuels, en l'occurrence issus de pratiques historiquement situées, rend envisageable l'émergence de connaissances géométriques reposant sur des propriétés qui, dans des contextes plus classiques, ont moins de chance d'être mobilisées par les élèves. Ces activités peuvent conduire à la formulation et l'institutionnalisation de ces propriétés et ainsi constituer un lieu d'enrichissement du rapport des élèves aux objets géométriques en jeu.
Signalons pour terminer ces éléments d'analyse *a priori* le faible potentiel rétroactif du milieu didactique. Comme nous venons de le décrire, diverses connaissances peuvent potentiellement organiser le jeu des élèves. Leurs procédures peuvent conduire à des constructions géométriques plus ou moins satisfaisantes du point de vue du savoir mathématique. Aux difficultés liées à la manipulation des instruments s'ajoutent d'une part le fait que l'activité se situe dans l'espace de la cour, un méso-espace pour lequel les repères spatiaux des élèves sont moins efficaces (Berthelot & Salin, 2000-2001), et d'autre part, le fait que la formulation de la consigne laisse à la charge des élèves une partie importante de l'organisation pragmatique de la construction. On peut alors se demander ce qui pourrait venir mettre en défaut une stratégie mathématiquement peu satisfaisante, légitimer une

connaissance plutôt qu'une autre, etc. Au niveau de l'activité de construction, les rétroactions potentielles du milieu semblent essentiellement réduites à des perceptions sur les tracés, perceptions peu fiables dans le méso-espace. On peut alors penser que l'enseignant va être amener à jouer un rôle important pour impulser des prises de recul, pour organiser les mises en commun et valider les stratégies mises en œuvre.

1.4. Constructions du milieu du segment [OE] (ou de la corde...)

Dans la suite, nous avons choisi de nous concentrer sur les dialogues des groupes concernant la construction du milieu du segment [*OE*], puis dans un deuxième temps sur ceux relatifs à la construction du cercle de diamètre [*OE*]. Voici les échanges d'un premier groupe de trois élèves (E1, E2 et E3) concernant la construction du milieu (la corde est posée au sol) :

E1 : Attends, attends faut regarder ce qu'il y a...
[Lecture du poly]
Marquer au sol ses extrémités *E*, *O*...
E1: Alors déjà... Mets *E*
[E2 code le point *E*]
E1 : Et là *O*... [à E2] passe la craie
E2 : Ben E3 passe
E1 : Après faut prendre ça...
[E1 plie la corde en deux.]
E3 : On traçait pas [inaudible]
E1 : Non ils disent pas de le tracer.
[E1 place le point I]
E1 : Qu'est-ce qu'ils disent après ?
E2 : Euh... Tracer le cercle de diamètre [*OE*] et les cercles de rayon [OE] [lecture du poly]
H : Bien, dites-moi, vous avez trouvé le milieu ?
E (ensemble) : Oui
H : Comment vous vous y êtes prises ?
E [ensemble] : Euh...
E2 : Ben en fait on a plié la corde.
H : Vous avez plié la corde bon c'est une bonne idée, fallait plier la corde
[H va vers un autre groupe]

Jusque là, le segment [*OE*] n'a pas été tracé par les élèves. Leur procédure semble pouvoir être rapprochée de la procédure P2 décrite plus haut. Plus précisément, pour plier la corde, E1 s'est saisi d'une main de l'extrémité placée en *O* avant de la ramener sur l'autre extrémité *E*. Aucune autre contrainte n'a été exercée sur la corde pendant le mouvement si bien que l'on peut avoir des doutes sur la précision de la construction. Il faut aussi remarquer que les élèves ont mis en place quelque chose que l'on peut interpréter comme un processus de contrôle puisque, après avoir matérialisé sur le sol le milieu et codé celui-ci par la lettre *I*, les élèves, par l'intermédiaire de E1, ont réinstallé la corde en position initiale, c'est-à-dire corde tendue, entre les points *E* et *O*. Cela explique certainement pourquoi H n'approfondit pas la question dans ce groupe, alors qu'il le fera avec un autre dans un cas similaire. Rien ne permet de dire qu'il s'agit là d'un processus conscient, on ne trouve d'ailleurs pas de trace langagière de cette action dans les échanges entre élèves. Il s'agit probablement simplement de l'effet d'une certaine lecture du programme de construction qui consiste à marquer les extrémités et le milieu *de la corde*, en cohérence avec l'absence de tracé du segment. Quoiqu'il en soit le fait que l'alignement ait été dématérialisé puis « rematérialisé » aura au moins permis de donner à voir l'alignement du point milieu avec les extrémités du segment.

Un deuxième groupe est composé des élèves F1, F2 et F3. Les trois points *O*, *E* et *I* sont placés sur le sol. Ils sont désignés d'une croix et codés par leur lettre respective. Le segment [*OE*] n'est pas tracé et les trois points *O*, *E* et *I* ne semblent d'ailleurs pas alignés. L'extrait commence par une intervention de l'enseignant portant sur la procédure utilisée par le groupe et sur d'éventuels moyens de contrôler la fiabilité de la construction. F1 « montre » alors la manière dont le point *I* vient d'être construit. Il commence par rejoindre les deux extrémités de la corde en joignant ses deux mains pour montrer ostensiblement la demie longueur obtenue. Ceci montre que le groupe perçoit bien les contraintes de longueur sur la construction du milieu du segment. Il pose ensuite une partie de la corde au sol. Une extrémité est placée en

O, une autre reste dans la main de F1 et la corde est disposée de manière à passer par *O* et par *I* (mais elle ne passe pas par *E*). Il rabat alors l'extrémité tenue vers le point *O*, sans que d'autres contraintes ne s'exercent sur la corde. Il semble donc que ce groupe ait utilisé la procédure P2, de manière plus ou moins aboutie. Les interactions se poursuivent ainsi :

H : Non, non mais... on a un moyen de vérifier que c'est bien le milieu ?

F1 : Ah ben oui

H : Qu'est-ce qu'on pourrait faire ?

F1 : Un trait.

H : Un trait ?

F2 : [Inaudible]

H : Vérifiez bien là... comment, comment vous avez positionné votre ficelle pour vérifier que le point c'est le milieu ?

[Pause]

H : Comment vous allez vous y prendre ?

F3 : On la met/ [F3 pointe son doigt vers *O*]

F1 : On la met là/

H : Donc on met une extrémité là et puis l'autre/

[F1 met une extrémité de la corde en *O*]

F3 : On la plie

H : Ouais et puis l'autre ? ben il faut vous mettre...

F1 : On la plie comme ça

[F1 reproduit la procédure décrite plus haut]

H : Ah oui mais ça correspond pas à ce que je veux ça

On peut supposer que H vise la procédure de contrôle qui consiste à utiliser la corde comme instrument de vérification des alignements. Les élèves, eux, semblent se concentrer essentiellement sur les contraintes de distance, comme il le ferait s'ils utilisaient une règle graduée. L'incompréhension peut se lire dans la forme des interactions langagières. Par exemple lorsque H dit « et puis *l'autre*/ » puis reprend ensuite « ouais et puis *l'autre* ? », il semble attendre comme réponse quelque chose comme un adverbe de lieu précisant où placer la deuxième extrémité de la corde, sur la forme langagière présentée à travers l'expression « on met une extrémité *là* », qui reprenait déjà les expressions de F1 « on la met » (suivie d'une indication du doigt ») et « on la met *là* ». En d'autres termes, l'enseignant entend compléter dans le langage la faiblesse des rétroactions du milieu des élèves. Pour autant, les élèves ne parviennent pas à s'appuyer sur les indices langagiers que l'enseignant a voulu utiliser, ils ne reconnaissent pas la forme spécifique du jeu de langage qu'il essaye de leur faire jouer. Leurs réponses sont de l'ordre de l'action – plier la corde d'une certaine manière – plutôt que de l'ordre d'un lieu. La technique langagière mise en œuvre par l'enseignant peut se comprendre comme une tentative d'aide aux élèves pour faire émerger le fait qu'un objet particulier, le point *E*, mérite d'être pris en considération.

Une analyse logique des concepts en jeu permet d'être plus précis sur ce qui est en jeu dans ces interactions. Le concept de milieu peut se comprendre de plusieurs manières, soit comme une relation binaire d'un point à un objet (par exemple un objet-segment), soit comme une relation ternaire entre trois points. Dans le cas de la relation binaire, nous avons affaire à deux objets de nature différente. Ce point de vue est celui de nombreux jeux de langage extra-mathématiques mobilisant le terme milieu (le milieu de la nuit, du chemin, de *la corde*, etc.). Dans le contexte de la relation binaire, il n'y a pas de médiation par les extrémités dans la référence à l'objet dont on considère le milieu. Cette approche s'accorde par exemple avec la consigne, confuse à ce niveau, qui demande de marquer le milieu de la corde. La thématique de l'alignement s'exprime alors par la relation d'appartenance du milieu à l'objet, elle semble ici moins fondamentale que la contrainte portant sur les longueurs pour la caractérisation du milieu. D'ailleurs, le milieu de la corde reste le milieu de la corde, que celle-ci soit ou non maintenue tendue ! Une des difficultés de cette conceptualisation binaire du concept de milieu est que le lien de modélisation géométrique entre l'objet physique corde et l'objet théorique segment est susceptible d'être perdu (il ne fonctionne que lorsque la corde est tendue). On peut enfin remarquer que le recours classique à la règle graduée pour construire la milieu d'un segment s'accorde avec cette approche binaire puisqu'il s'agit de placer le milieu sur l'objet. Dans le second cas, on dira qu'un point M est le milieu de [AB], le segment étant désigné par ses extrémités. L'approche binaire n'est pas loin mais une relation ternaire est nécessaire pour rendre compte des trois objets M, A et B et pour les relier. Dans la tâche analysée, ce point de vue ponctuel nécessite la prise en compte simultanée du milieu I et des extrémités O et E. Il semble que l'action de l'enseignant dans la fin de l'extrait (« donc on met une extrémité à et puis *l'autre/* », « Ouais et puis *l'autre* ») vise à mettre en jeu l'extrémité E, de manière à rendre disponible le point de vue ternaire sur le concept de milieu, comme référence d'un adverbe de lieu. Cette analyse sera confirmée par la suite (cf. extrait suivant). Au final, l'incompréhension conduit l'enseignant à écarter artificiellement la stratégie de ce groupe. Il décide alors d'introduire lui-même le troisième point nécessaire au basculement dans le registre ponctuel :

[H pose son index sur le point E]

H : Oui mais ici, là, par rapport à ce point-là, y a un moyen de contrôler que votre point tel qu'il est placé ce sera bien le milieu, le milieu de votre segment ?

F3 : Ben on trace euh...

H : On trace ?

F3 : Ben on trace euh... la ficelle.

H : Oui on va tracer et alors mais comment on va faire pour tracer ? qu'est-ce qu'il faudrait faire ?

[quelques secondes de silence]

H : Y en a pas un qui voit comment on pourrait tracer ?

F3 : [Inaudible, voix très basse]

F1 : J'ai une idée mais je sais pas si c'est bon de toute façon, si c'est pas bon... alors déjà on trace un trait et après avec la corde euh...

Ce nouvel extrait met en évidence la difficulté des élèves à se saisir de la corde comme d'un instrument de géométrie permettant des tracés rectilignes. La dernière assertion de F1 est révélatrice, il évoque successivement le tracé d'un trait puis l'usage de la corde. On peut supposer que cette difficulté est associée à la prise en compte de la possibilité d'un travail corde tendue, dont nous avons souligné l'importance dans l'analyse *a priori* (§1.3). La suite des interactions confirmera le caractère problématique de la tâche de tracé rectiligne pour ce groupe d'élèves. Jusque là, la corde avait été posée de manière approximativement rectiligne sur le sol mais sans qu'une tension particulière ne soit exercée à ses extrémités. L'enseignant prend alors en charge un part plus importante du problème. Il utilise le langage pour mettre en jeu simultanément les trois points dont il souhaite mettre en question l'alignement et explicite le fait qu'une relation spécifique doit les lier :

H : Si votre point c'est le milieu, comment est-ce qu'ils doivent être ces trois points-là ?

F (ensemble) : Ben euh...

F1 : Sur la même droite

H : Sur la même droite bon alors on a un moyen de contrôler qu'ils sont bien sur la même droite vos trois points ? qu'est-ce qu'on peut faire ?

F1 : Ah non, il sont comme ça !

H : Ah comment, comment on peut contrôler alors comment on peut être sûr de le placer alors ?

[pause]

F2 : Tracer des cercles

H : Non [...] Vous voyez pas comment on peut vérifier que les points sont alignés ?

5. F3 : Ben non

H : Bon votre travail ça va être... alors vous me trouvez le moyen, vous cherchez, vous vous débrouillez, vous me trouvez le moyen de vérifier que vos trois points sont bien alignés, voilà [H s'en va voir un autre groupe]

Ce passage marque un changement de regard sur le segment et son milieu (Duval & Godin, 2005), d'une prise en compte exclusive des lignes et des longueurs vers une perception des points, perception porteuse d'un possible questionnement sur leur alignement. F1 se rend d'ailleurs compte que les trois points présents ne sont pas alignés et que la construction est incorrecte (« Ah non, ils sont comme ça ! »). Leur tâche a néanmoins été sensiblement modifiée depuis la question initiale qui visait à trouver un moyen pour contrôler que le point

construit était bien le milieu du segment, l'enseignant en ayant assumé une bonne part.
Les difficultés rencontrées ici par les élèves peuvent être mises en relation avec les éléments présentés dans l'analyse *a priori* (§ 1.3) concernant l'usage très fréquent en classe de la règle graduée pour la construction du milieu d'un segment. Comme nous l'avons souligné, l'usage de la règle graduée incorpore en pratique la question de l'alignement des points, qui n'a donc probablement que peu l'occasion d'être abordée. L'usage de la règle graduée semble d'ailleurs plutôt favoriser le point de vue des longueurs (de leurs mesures) et des lignes (dont elle est un instrument de tracé) que nous avons associé plus haut au point de vue « relation binaire » sur le concept géométrique de milieu. Cette difficulté conceptuelle est renforcée par le fait que les élèves ne perçoivent pas spontanément la corde comme un instrument géométrique susceptible de réaliser des tracés rectilignes ou de contrôler des alignements. Elle est toujours persistante à la fin de de l'extrait précédent. Cela n'est pas particulièrement étonnant, d'une part parce que le domaine de pertinence de cet outil est essentiellement le méso-espace, un espace qu'ils fréquentent peu dans le contexte des tracés géométriques et d'autre part par ce que l'on peut penser que la corde a aujourd'hui perdu de sa prégnance pour travailler le rectiligne (nous disposons de plus d'outils, fiables et durables). Si l'usage de la corde permet l'émergence de la question de l'alignement dans la construction géométrique d'un milieu (ou de son contrôle), elle n'en fournit pas pour autant de manière immédiate la solution. Ici, la problématique mathématique résonne de manière intéressante avec la problématique historique puisque ce qu'il manque aux élèves pour mener à bien leur tâche relève spécifiquement des techniques « indiennes » d'utilisation de la corde : comment les indiens utilisaient-ils la corde ? Il y a comme un retournement des rapports entre connaissances mathématiques et connaissances historiques. La contextualisation historique a tout d'abord servi à l'enseignant pour faire la dévolution de la tâche mathématique. En retour, c'est la tâche mathématique qui en appelle à la contextualisation historique.
Nous terminons ces analyses sur la construction du milieu du segment à l'aide de la corde en évoquant rapidement le travail d'un troisième groupe. Dans les deux groupes précédents, l'idée que le milieu d'un segment devait le partager en deux longueurs égales a été d'emblée prise en compte par les élèves. Cela n'a pas été le cas dans un troisième groupe, composé des élèves G1, G2 et G3 :

H : D'accord... Alors ici là qu'est-ce que vous avez pris comme longueur de corde ?

G1 : Ben on a pris ça

G2 : La moitié

H : La moitié comme t'as fait pour avoir la moitié

G1 : Non pas la moitié [inaudible] plus petite que l'autre.

H :Plus petite d'accord alors ça c'est [inaudible] on a deux moitiés de cordes c'est ça ?

G1 : Ouais ben... euh

H : Là y a deux moitiés ?

G1 : Oui mais c'est pas les mêmes

H : C'est pas les mêmes y a deux moitiés mais c'est pas les mêmes/

G3 : Faut que ce soit

H : C'est possible ça d'avoir deux moitiés qui sont pas les mêmes ?

G3 : Ben non faut que ce soit...

Ici, le terme de « moitié » a été appréhendé dans sa signification courante, laquelle ne suppose pas nécessairement un partage précis. En l'absence de la procédure mécanisée usuelle portant sur les mesures, les élèves ont pris approximativement le « milieu » de la corde sans chercher à se donner de moyens techniques permettant de situer l'action dans le champ des mathématiques par l'intermédiaire d'un travail sur les longueurs. L'enseignant intervient alors pour replacer l'activité dans son arrière plan mathématique à travers une question rhétorique. La construction à la corde nécessite (et permet) de renouveler le regard porté sur le concept de milieu en passant du contexte numérique des mesures à celui du contexte des longueurs et en rendant nécessaire la prise en compte de l'alignement du milieu aux extrémités du segment.

1.5. Le tracé du cercle

Nous suivons dans cette dernière partie le travail d'un quatrième groupe, composé des élèves C1, C2 et C3. L'extrait commence alors que deux diamètres du cercle sont tracés au sol. Il s'agit du segment [*OE*] et d'un autre, qui lui semble perpendiculaire. Nous n'avons pas d'éléments expérimentaux qui pourraient nous renseigner plus avant sur les raisons qui ont conduit ce groupe à tracer ce deuxième diamètre. On peut néanmoins faire l'hypothèse qu'il s'agit pour eux d'un support supplémentaire en vue du tracé du cercle, associé à une conception fragmentaire du cercle privilégiant les directions horizontale et verticale (Artigue & Robinet 1982, p. 19 et p. 61)[3]. Ces deux diamètres étant construits, les élèves se demandent alors comme procéder pour le tracé du cercle (dans un premier temps, la caméra est focalisée sur la construction, il est très difficile d'identifier les intervenants (désignés par la lettre C) :

C : Et comment veux-tu qu'on trace le cercle ?

C : Ben tu fais un rond comme [inaudible]

C : Ben tu fais un rond normal parce qu'après on a pas de compas donc...

C : À la main ?

C : Ben oui, ben je pense que c'est comme ça.

C2 : Je peux faire ?

C1 : Ah non non attends attends

[C1 joint par des lignes courbes les quatre extrémités des segments, à main levée. H arrive auprès du groupe]

En l'absence de l'instrument usuel, les élèves ne parviennent pas spontanément à se situer dans le contexte mathématique. Ils proposent alors de faire « un rond » et même un « rond normal », c'est-à-dire un rond qui ne soit pas celui des mathématiques et le tracé à la main s'en trouve justifié. Le point de vue adopté sur le cercle semble ici être celui d'une forme arrondie, dont ils reconnaissent l'allure générale. Au niveau de l'analyse logique, cela se traduit par la mise en œuvre d'une caractérisation portant sur les propriétés d'un objet-surface, éventuellement bordé par une ligne à courbure constante, plutôt que d'une caractérisation portant sur des relations binaires de distance entre un objet-centre ponctuel et des objets-points. Cet extrait se termine par l'arrivée de l'enseignant. Ses interventions peuvent se comprendre comme des tentatives pour (re)positionner les élèves dans le contexte des mathématiques, pour les accompagner dans l'expression de leurs préoccupations pratiques à travers un questionnement mathématique portant sur les propriétés des objets en jeu et les instruments.

H : Eh eh qu'est-ce que vous me faites jeunes gens ?

C1 : C'est pas un cercle ça

H : Qu'est-ce que tu fais là ?

C2 : On doit faire un cercle

H : Vous faites un cercle ?

C3 : Oui

H (dubitatif) : Ouais

C1 : C'est pas un cercle ça

H : C'est quoi un cercle ? Qu'est-ce que c'est qu'un cercle ?

C3 : Ben euh

C1 : Ben c'est un...

C2 : Un cercle

C1 : [rire] C'est un cercle euh... Y a un diamètre et euh

C2 : Et un rayon [inaudible]

H : On essaye de revenir, on essaye de revenir aux sources. Si je vous dis qu'est-ce que c'est que le cercle de centre *O* et de rayon trois centimètres ?

C1 : Ben c'est un cercle

H : Le cercle de centre *O* et de rayon trois centimètres. [pause]

H : La définition c'est du cours qu'il faut connaître sinon, tu vois on est bloqué quand on connaît pas le cours... Est donc formé par quoi ?[pause]

3 Remarquons à ce propos que la traduction scientifique du sulbasutra (cf. 1.5) évoque aussi l'existence d'un second diamètre au cercle : « Le second diamètre est obtenu des points d'intersection de ces deux ». Si le premier est construit horizontal, selon une direction « est-ouest », ce second sera vertical, selon une direction « nord-sud ».

Ce mouvement d'arrière-plan que l'enseignant cherche à provoquer trouve son impulsion dans les questions « c'est quoi un cercle ? qu'est-ce qu'un cercle ? » Ces questions ne visent pas seulement ou pas prioritairement à obtenir en réponse une définition du cercle. Il s'agit de « voir » le cercle comme il est d'usage de le faire dans le contexte mathématique scolaire. Bien que tautologiques, certaines réponses avancées par C2 (« Un cercle ») et C1 (« C'est un cercle euh... » ; « Ben c'est un cercle ») contribuent à l'inscription des pratiques dans le contexte souhaité. Ces interactions langagières marquent un mouvement de posture qui se trouve confirmé par des réponses postérieures introduisent des termes spécifiques du vocabulaire mathématique (diamètre et rayon). L'enseignant poursuit alors par une formule typique de la syntaxe mathématique associée au concept de cercle : le-cercle-de-centre-*X*-et-de-rayon-*Y*. À l'image de l'usage du pronom « me » évoqué plus haut, l'expression « si je vous dis » est significative du jeu de rôle que l'enseignant entend jouer avec les élèves. Elle insiste sur le caractère didactique du jeu d'apprentissage, H s'exprime en tant qu'enseignant de mathématiques, il attend en retour une réponse qui soit issue du contexte scolaire. Du côté des savoirs, on imagine ici que l'enseignant vise la définition dominante du cercle dans l'institution, c'est-à-dire le cercle comme ensemble de points situés à une même distance d'un point donné.

Comme nous l'avons déjà dit, cette approche est porteuse d'une propriété naturalisée par l'usage du compas dans les situations ordinaires de tracé. D'autre part, elle se distingue de la caractérisation spontanée adoptée jusqu'ici par les élèves qui semblait plus reposer sur la propriété de courbure constante. Dans la pratique, le passage d'une conception à l'autre ne va pas de soi (Artigue & Robinet, p. 49), d'autant plus lorsqu'elles sollicitent des regards différents sur les figures (Duval & Godin, 2005). La caractérisation par la courbure repose sur une vision en termes de lignes quand la caractérisation par l'équidistance au centre repose sur une vision en termes de points. La dernière intervention de l'enseignant dans l'extrait ci-dessus peut se comprendre comme une invitation à mettre en correspondance la manière de *voir* (« est donc formé par quoi ») et la manière de *dire* (« le cercle de centre *O* et de rayon trois centimètres »). La suite des interactions complétera ce tableau en associant la question du *voir* et du *dire*, mais aussi du *faire*.

H : Par quoi est formé un cercle ? Quelle est la particularité de tous les points qui sont situés sur un cercle ?

C1 : Euh euh ils sont euh

H : Oui

C1 : Ils sont de même distance

H : Ils sont tous à la même distance de quoi ?

C1 : Ben de... ben du milieu

H : Voilà du centre du cercle/

C1 [sur une temporalité très proche] : Du centre du cercle

H : Ils sont tous à la même distance du centre du cercle. Alors est-ce que tu penses que tel que tu t'y es pris tous les points que tu as essayé de nous tracer là, sont à la même distance de celui-ci [H pointe le centre du cercle] ?

C1 : Non

H : Donc comment avec le matériel/

C1 : Ah

H : Que je viens de te donner tu vas pouvoir/

C1 : La corde, il faut la, faut la comme ça et tu traces au fur et à mesure... Et après tu relies

C3 : Ouais, du centre

H : Bon, il faut utiliser la corde alors voilà

L'enseignant est à nouveau amené à prendre en charge lui-même l'introduction des objets nécessaires à la formulation de la propriété qu'il vise, c'est lui qui introduit dans le milieu des élèves « les points qui sont situés sur un cercle ». On peut remarquer que l'usage de cette dernière expression, plutôt que par exemple *les points du cercle*, laisse un certain espace pour que les deux conceptions du cercle décrites plus haut cohabitent. L'expression met en avant les points tout en ménageant l'approche globale du cercle privilégiant les lignes. Le

questionnement de l'enseignant a pour effet une thématisation des points du cercle dans les répliques de C1, lequel se trouve alors en position d'investir le point de vue ponctuel sur le cercle. L'enseignant évoque ensuite « une particularité » des points et C1 rebondit en précisant cette particularité par l'emploi du terme de distance, qui est un terme de relation binaire (à deux arguments).
Il reste alors à préciser quel est le deuxième argument de la relation, ce que l'enseignant et C1 font dans un même mouvement. L'enseignant reprend alors les différents éléments introduits pour les confronter à la procédure de tracé utilisée par les élèves. Il y a cette fois une rupture plus marquée quant au regard particulier qui se construit avec le discours. Celui-ci évoque « les points que tu [C1] as essayé de nous tracer là » alors que le tracé de C1 était un tracé de ligne, selon la conception par la courbure que nous lui avons attribuée. La tâche des élèves va alors consister à utiliser la corde pour produire un tracé qui s'appuie sur la nouvelle caractérisation mise au jour.
La fin de l'extrait témoigne, à nouveau, que cela ne va pas de soi. Lorsque C1 dit qu'il faut positionner la corde « comme ça », elle pointe de l'index d'une main le centre du cercle et de l'autre, elle pointe un point du cercle. Elle semble donc utiliser une vision en termes de points mais ce point de vue ponctuel est dans un premier temps associé exclusivement à un usage de la corde comme instrument de report d'écartement entre points. Ce constat est confirmé par les gestes accompagnant l'expression « tu traces au fur et à mesure ». En même temps qu'elle prononce ces mots, C1 réalise six mouvements identifiant autant de points du cercle, « et après tu relies » est accompagné d'un mouvement circulaire du poignet.
On peut douter du fait que ce mouvement vise à ce moment une utilisation de la corde comme instrument de tracé de cercle. L'approche globale du cercle comme ligne semble rester fortement associée à la propriété de courbure constante et au tracé à la main. L'approche ponctuelle du cercle à travers les relations de distance entre points et centre, impulsée par l'enseignant, a semble-t-il contribué à rendre disponible la corde comme instrument de report de longueur ou plutôt d'écartement entre points, avec une certaine cohérence logique. Néanmoins, l'articulation des différents points de vue est délicate et ces extraits montrent une certaine difficulté pour les élèves à s'approprier la corde dans sa fonction historique de tracé. À nouveau, on voit s'opérer un renversement déjà évoqué lors de la construction du milieu puisque le travail essentiellement mathématique jusqu'ici va conduire les élèves à se questionner sur l'usage de la corde. On voit bien qu'une réflexion de nature épistémologique sur les pratiques des constructeurs d'autels indiens est à ce moment de la séance à portée de main.
À la suite de cet extrait, le groupe d'élèves change de place dans la cour pour recommencer une construction. Nous n'avons pas de données permettant d'analyser cette nouvelle phase si ce n'est qu'au final, la production est visiblement correcte et que la corde semble avoir été utilisée comme outil de tracé de ligne. Quoi qu'il en soit, l'usage de la corde a contribué à mettre au cœur de l'activité la question de l'articulation entre les diverses approches du cercle. Il s'agit selon nous d'un résultat intéressant mettant en évidence le potentiel de la variation sur les instruments dans la construction du concept de cercle[4].

1.6. Conclusion et ouverture

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés, à partir d'une étude de cas, aux effets didactiques de l'introduction d'une dimension historique dans l'enseignement des mathématiques. Plus précisément, nous avons analysé les effets de l'utilisation d'un instrument historique, la corde, dont la présence est justifiée auprès des élèves par l'intermédiaire d'une contextualisation sociale et historique, sur les procédures de tracés géométriques d'élèves de

4 Bloch & Osel (2010) rendent compte d'une approche concordante dans le cadre d'une expérimentation mettant en jeu plusieurs instruments en CM1, dont une corde.

sixième. Il s'agissait pour les élèves de tracer un carré à la craie sur le sol de la cours, un carré à la manière des Sulbasutras indiens. L'usage de la corde comme instrument de tracé de ligne et de cercle a permis de faire émerger un certain nombre de questions qui ne seraient probablement pas apparues dans les pratiques instrumentées usuelles de tracé à l'aide de la règle graduée et du compas. Par exemple, la construction à la corde du milieu d'un segment dont seules les extrémités sont marquées nécessite une prise en considération d'une relation d'alignement. Cette relation d'alignement est prise en charge par les propriétés physiques de l'instrument lors d'une construction à la règle. Du côté du tracé du cercle, l'usage de la corde remet en jeu ce qui est absorbée par le maintien autonome de l'écartement des branches avec le compas, contribuant ainsi à une conceptualisation plus complète du cercle. La complexité accrue dans le tracé par l'usage de cet instrument historique ouvre un espace pour la problématisation de savoirs mathématiques. Nous ne savons pas précisément si l'enseignant a exploité ou non ces éléments, la séance se terminant de façon abrupte avec le retentissement de la sonnerie. Nos données ne nous permettent pas de dire s'il y eu ou non par la suite une institutionnalisation des éléments de savoirs que nous avons pu voir émerger dans le travail des groupes (et si la contextualisation historique y joue un rôle).

Du point de vue de notre question de recherche, l'essentiel à retenir est l'existence d'un certain potentiel didactique pour les séances comportant une dimension historique mettant en jeu des instruments non usuels. D'un autre côté, les analyses précédentes ont aussi montré qu'un va-et-vient entre le travail mathématique et le questionnement épistémologique était envisageable au cours de ces séances. À plusieurs moments, un travail de nature mathématique a conduit les élèves à se poser la question des usages de la corde comme instrument géométrique. Cette question nous paraît particulièrement intéressante dans sa dimension épistémologique. Il nous semble important de remarquer que, sur cet aspect, la qualité de la contextualisation épistémologique et la qualité du travail mathématique vont de pair.

Comme nous le soulignons dans l'introduction de ce texte, un de nos postulats dans ce travail est celui de l'intérêt d'une prise en charge conjointe des deux champs de connaissances, les mathématiques et leur histoire. La suite de l'article abordera plus spécifiquement le thème des savoirs historiques en jeu dans notre corpus. Avant cela, il nous a paru intéressant de revenir brièvement sur la séance analysée du point de vue de la didactique des mathématiques selon ce nouveau point de vue. La méthode reprise par l'enseignant est issue des Sulbasutras de Baudyayana qui auraient été écrits entre le 5^{e} et le 3^{e} siècle avant notre ère (Keller 2000, p. 116). Signalons sur ce sujet précis un ouvrage d'histoire, à paraître, comportant une traduction et des commentaires sur l'extrait qui nous intéresse et plus largement sur le texte dont il est issu (Delire, à paraître, pp. 75-77 et pp. 217-220). Nous proposons ci-dessous une comparaison entre la formulation du programme de construction proposé aux élèves et une traduction scientifique du texte original[5] :

> Si l'on veut un carré, une méthode est de prendre une corde de longueur égale au carré donné, faire des nœuds aux deux extrémités et une marque en son milieu. On trace la ligne et on plante un piquet en son milieu. On fixe les deux nœuds au piquet et on trace un cercle avec la marque. Deux piquets sont plantés aux deux extrémités du diamètre. Un nœud étant fixé à l'est, on trace un cercle avec l'autre ; la même chose à l'ouest. Le second diamètre est obtenu des points d'intersection de ces deux ; on plante deux piquets aux deux extrémités du diamètre. Avec deux nœuds fixés à l'est, on trace un cercle avec la marque ; on fait la même chose au sud, à l'ouest et au nord. Les points d'intersection donnent le carré.

Bien sûr, les deux « traductions » du texte original ont des objectifs très différents et le contexte du travail dans l'espace de la cour rend évidemment impossible de planter des

5 Nous reprenons celle utilisée par Keller (2000) ou Racine (2007).

piquets dans le sol. Il nous semble néanmoins intéressant de les comparer pour mieux identifier les spécificités de la tâche des élèves, les points de convergence et les écarts avec les pratiques socio-historiques sources.

On peut tout d'abord remarquer que le texte didactique ne demande pas explicitement de tracer le segment initial [OE], alors que celui de la traduction scientifique le fait (ou plutôt il sollicite un tracé de ligne). Dans le texte à destination des élèves, il s'agit de marquer les extrémités d'une corde posée au sol et d'en coder le milieu. Nous avons vu dans les analyses didactiques précédentes que la question de la matérialisation du segment était importante du point de vue des procédures de construction du milieu du segment, de la prise en compte ou non de la thématique de l'alignement des extrémités du segment et de son milieu. Il semble donc que les conditions de l'émergence des questions portant sur l'alignement soient le produit d'un processus de transposition à la classe de la ressource historique, reposant sur des choix didactiques (conscients ou non), plutôt que l'expression d'une nécessité intrinsèque à la ressource. Nous nous intéressons maintenant à la formulation des textes. Le programme de construction proposé aux élèves fait appel à la fois à un vocabulaire que nous pourrions qualifier de pratique, évoquant des objets matériels (« tendre une corde », « marquer au sol »), et à un vocabulaire plus théorique visant des objets géométriques (« milieu », « côté du carré »). À d'autres moments, le texte didactique s'inscrit plus explicitement dans le contexte de la géométrie théorique, notamment à travers le recours à des termes comme « rayon », « sommets » ou à l'expression « deux à deux ». Ce vocabulaire est absent de la traduction scientifique du texte qui reste davantage dans un contexte pratique (« faire des noeuds », « plante un piquet », etc.). Une autre distinction frappante concerne l'utilisation du codage des points par des lettres dans le texte utilisé en classe. Ce codage et les expressions associées (« dans cet ordre », « respectifs ») semblent se substituer à l'utilisation des piquets et aux instructions instrumentales explicites, ordonnées dans le temps et orientées dans l'espace dans la traduction scientifique. Par exemple, la traduction précise de tracer « un cercle avec la marque » après avoir planté un « piquet en son milieu », deux nœuds étant attachés à ce piquet. Le tracé des cercles ayant pour centre les extrémités du segment vient ensuite, avec des précisions sur l'ordre et l'orientation (on commencera par fixer un nœud « à l'est », avant de faire « la même chose à l'ouest »). Il n'est alors pas nécessaire d'utiliser de codage comme le fait le texte didactique lorsqu'il évoque le tracé des trois cercles précédents dans un seule et même phrase « tracer le cercle de diamètre [OE] et les cercles de rayon [OE] »[6] puisqu'au moment du tracé du premier cercle, un seul un piquet est disponible. Dans le même ordre d'idée, l'expression « de centres respectifs » trouve sa contrepartie dans la traduction sous forme d'un passage successif par les piquets placés aux différents points cardinaux. La tâche proposées aux élèves diffère de celle décrite dans le texte original dans la mesure où les élèves sont amenés à naviguer entre les aspects pratiques du travail, qui sont en partie inhabituels, et le contexte de la géométrie théorique. Il leur faut reconstruire une temporalité parfois absente ou implicite dans le « programme de construction » qui leur est proposé. Il leur faut aussi mettre en relation les objets mathématiques usuels qui sont évoqués par l'intermédiaire du vocabulaire de la géométrie théorique (par exemple le cercle) et les instruments dont ils disposent dans le contexte de la géométrie pratique (la corde). Cet aspect pragmatique est assez explicitement pris en charge par la traduction, il est à la charge des élèves dans le contexte de la classe. Nous avons fait de ce dernier point un élément central de l'analyse du potentiel didactique de la séance concernant le concept de cercle. À nouveau, il apparaît que ce potentiel doit plus à des décisions didactiques qu'à la ressource historique elle-même. Il semble ainsi que les conditions didactiques de la construction des savoirs mathématiques dans ce type de séances à dimension historique soient le produit conjoint de contraintes issues de l'exploitation des ressources historiques et de décisions didactiques qui peuvent parfois aller à

6 Cette remarque vaut indépendamment du fait que la lettre *I* apparaisse ou non dans la formulation.

l'encontre de l'authenticité du rapport des élèves aux savoirs historiques en jeu. Pour autant, nous nous garderons bien d'opposer l'authenticité épistémologique et la pertinence du travail mathématique.
Les analyses qui précèdent ont aussi mis en évidence comment le questionnement mathématique (notamment issu de la « didactification » de la méthode indienne) pouvait en retour être générateur d'une réflexion épistémologique tout à fait intéressante. Un enjeu majeur pour ce type de séance est justement que l'enseignant soit en mesure de faire interagir efficacement les enjeux mathématiques et épistémologiques. Ce constat invite à opérer un changement d'approche pour prendre davantage en considération les savoirs historiques comme objet d'apprentissage, et le lien nécessaire avec les savoirs mathématiques scolaires des élèves.

2. Quelle histoire ? Quels savoirs historiques ?

Avant d'entrer dans une analyse des contenus historiques de certaines séances, il convient de préciser ce que nous entendrons sous les termes histoire et dimension historique. Dans le contexte du cours de mathématiques, comme dans la vie de tous les jours, les connaissances sur le passé nous proviennent certes de nos propres souvenirs, mais aussi et surtout d'autres informations que nous avons apprises. Ces connaissances sont de différentes natures et suivant leur provenance, elles nous informent de manière plus ou moins fiable sur ce qui s'est produit. Il est généralement admis que l'essence ultime de l'information sur le passé est à chercher chez les historiens et donc dans l'histoire. De quoi parle l'histoire ? Si l'on se réfère à la simple culture scolaire commune à tout un chacun, l'histoire est un champ de connaissances dans lequel on trouvera des dates, des noms, des événements, etc.
Comme le souligne Prost (1996, p. 55) :

> S'il est une conviction bien ancrée dans l'opinion publique, c'est qu'en histoire il y a des faits et qu'il faut les savoir. [...] D'honnêtes gens qui ignorent si Marignan fut une victoire ou une défaite, et quels en étaient les enjeux, s'indignent que les élèves en ignorent la date. Pour le grand public, l'histoire se réduit souvent à un squelette constitué de faits datés : révocation de l'édit de Nantes 1685, Commune de Paris 1871, découverte de l'Amérique 1492, etc. [...] On touche ici sans doute la différence majeure entre l'enseignement et la recherche, entre l'histoire qui s'expose didactiquement et celle qui s'élabore. Dans l'enseignement, les faits sont tout faits. Dans la recherche, il faut les faire.

Comme discipline universitaire, et donc comme champ de recherche, l'histoire est avant tout une méthode, une manière d'interroger le passé. L'historien, seul ou en équipe, produit des résultats cherchant à rendre compte d'événements passés. Ces connaissances font l'objet d'une communication, le plus souvent à l'écrit au travers de livres et le citoyen, ou l'élève, en est uniquement l'utilisateur final. Présentée de cette manière, l'histoire peut sembler absolue, c'est-à-dire qu'elle tend à apparaître comme une forme de vérité plus ou moins définitivement acquises. Cette vision est souvent celle que l'on trouvera dans les travaux de didactique s'intéressant à la place de l'histoire des sciences dans l'enseignement. Selon nous, et afin d'entrer dans une analyse plus fine des contenus à l'œuvre dans notre corpus d'étude, il convient de dépasser cette posture naïve face à l'histoire. Comme toute activité visant à produire des connaissances, l'histoire a sa propre histoire. Ce qui est accepté comme historique à une période donnée peut être remis en cause à une autre et ce qui était un fait selon une certaine approche peut se voir disqualifié selon une autre. Il n'y a pas une histoire, mais des histoires qui s'inscrivent généralement dans les cultures et modes de rationalités de leur temps : des méthodes différentes produisent des histoires différentes. L'histoire des sciences n'échappe pas à cette règle. Ainsi se fait-elle parfois littéraire et apologétique lorsqu'elle ne retient que de grands événements ou personnages (éventuellement proche du

mythe ou de la légende), positiviste lorsqu'elle se veut science exacte du passé, sociale lorsqu'elle jette son regard sur les interactions entre les hommes, etc. Comme pour l'histoire générale, il est important de noter que ces variations de méthodes n'enlèvent rien à la rationalité de la démarche. Excepté dans le cas des légendes ou romans historiques, l'historien cherche avant tout à prouver à travers des arguments inscrits dans un schéma déductif.
L'enseignant qui évoque l'histoire dans son cours de mathématiques puise dans l'ensemble des sources qu'il a à sa disposition. Une difficulté importante pour le non-spécialiste consiste alors à identifier précisément les origines méthodologiques multiples qui ont pu permettre la mise en place des résultats qui sont exploités. Fruits d'une culture presque exclusivement personnelle, il est dès lors probable que les éléments d'histoire que l'on peut rencontrer lors d'une séance de mathématiques soient très variés tant dans leur contenu que leur nature. Concernant cette nature des connaissances historiques, il s'ajoute une particularité liée à l'objet même de l'histoire des sciences. Les sciences sont hautement rationnelles et leur histoire tend aussi à rendre compte de l'évolution des concepts mis en œuvre en leur sein. Comme l'explique Morange (2008, pp. 18-19) à propos de sa propre pratique d'historien de la biologie :

> Le rôle que nous donnons à l'histoire des sciences est également épistémologique et philosophique. L'histoire telle que nous la concevons est une histoire des idées, des concepts et des modèles, donc à la fois une histoire et une philosophie des sciences telles qu'elles ont été conçues dans la tradition française du XXe siècle, d'Alexandre Koyré à Georges Canguilhem.

S'il s'agit là du projet, tous les moyens sont bons pour atteindre ce but. Morange ajoute que le temps de la pensée unique en histoire et philosophie des sciences est révolu et que la sociologie y a toute sa place : « Elle y est naturellement incluse, puisque la forme dominante de l'histoire des sciences est aujourd'hui l'histoire sociale » (ibid, p. 19). Fille de l'histoire générale, l'histoire des sciences, et plus particulièrement celles des mathématiques qui nous occupe, ne doit pas être vue comme uniforme. Elle comporte des dimensions multiples liées à la manière dont elle a été produite. Au niveau de la recherche universitaire, la lecture des sommaires des derniers numéros de la Revue d'Histoire de Mathématiques montrent toute la richesse des approches dans le domaine. On y trouvera des études biographiques comportant ou non une dimension sociale, « Self-portraits with Évariste Galois (and the shadow of Camille Jordan) », « Évariste Galois and the Social Time of Mathematics » ou encore « Opposition to the Boycott of German Mathematics in the Early 1920s », des lectures épistémologiques « Le *De Linearum* de MacLaurin : entre Newton et Poncelet » ou « Louis Poinsot et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois ? », des contenus très proches des mathématiques elles-mêmes « Notations de nombres et pratiques de calcul en Mésopotamie » et des innovations méthodologiques dans « La fonction inaugurale de *La Géométrie* de Descartes ». Cette diversité se retrouve aussi dans le domaine de la vulgarisation dont on peut penser qu'il est plus accessible aux enseignants de mathématiques. Une simple recherche avec le mot histoire dans le site Images des Mathématiques[7] par exemple donne à lire des articles sur des méthodes mathématiques « Autour des équations de Navier-Stokes », des biographies et études sociales, « Perspective, géométrie et esthétique chez Lambert », « Otto Neugebauer (1899 – 1990) — Un mathématicien, historien, philologue, bâtisseur et militant anti-nazi » ou « Rôles des figures dans la production et la transmission des mathématiques », et des approches épistémologiques « Un concept mathématique, trois notions : Les groupes au XIXe siècle chez Galois, Cayley, Dedekind ». Pour l'analyse des séances en classe de notre corpus, c'est donc toute cette richesse de contenus que nous souhaitons prendre en compte car elle est représentative non seulement de l'histoire comme domaine universitaire mais surtout du type de connaissances que l'enseignant

7 http://images.math.cnrs.fr

et les élèves peuvent rencontrer.

Ces précisions données, nous allons maintenant décrire comment l'histoire intervient dans les séances de notre corpus. Pour ne pas surcharger le texte, nous nous limiterons à la présentation de deux séances que nous trouvons exemplaires, pour la première (§2.2), de la richesse des interactions entre mathématiques et histoire au sein d'une même activité et, pour la seconde (§2.3), de la manière dont les élèves mobilisent des connaissances historiques réellement acquises.

2.1. Lieu de l'histoire dans les séances

L'ensemble des séances filmées en 2007 et 2011 montrent une assez grande richesse quant au lieu (c'est-à-dire la simple réponse à la question « où ? ») de la dimension historique dans la séance. Nous pouvons distinguer quatre genres différents :

1. extrait d'un texte ancien (source)
2. texte introductif ou notice biographique dans les fiches élèves (contexte)
3. discours de l'enseignant (« histoire à écouter »)
4. l'activité en elle-même (« histoire à vivre »)

Les points 1 et 2 constituent à la fois une sorte d'évidence pour qui évoque l'introduction d'une perspective historique dans une séance et une forme d'adaptation des pratiques des historiens des sciences. La présence de citations de mathématiciens anciens, sous leur forme originale ou à partir de traductions scientifiques, est la trace la plus visible d'une perspective historique dans les séances. Dans la pratique, ces citations sont souvent accompagnés dans les fiches élèves de phrases ou de paragraphes introductifs visant à donner un aperçu du contexte des documents proposés. Ces deux premiers points ont fait l'objet d'assez nombreux travaux dont les productions des IREM[8] sont une bonne illustration. Plus rarement, d'autres supports que les textes sont aussi utilisés comme nous le verrons plus loin avec l'exemple d'une gravure avec l'allégorie de Reish. L'analyse des vidéos des séances de notre corpus montre que ces deux premiers aspects sont complétés par deux autres. Le troisième point relève de l'enseignant. Durant les séances, nous avons pu remarquer la présence de temps où le professeur prend lui-même en charge des contenus relatifs à l'histoire. Il peut s'agir de moment de dialogue avec la classe mais aussi de phases de monologue pendant lequel l'enseignant raconte, explique, etc. Une partie de son discours est une redite de ce qui se trouve sur les fiches élèves, mais une autre vient compléter ce qui est écrit. L'enseignant s'appuie sur ces temps pour réorganiser les connaissances historiques qui ont émergées et pour établir des liens avec la discipline et son évolution. Ce processus de « reconstruction » au cours duquel il raconte son histoire des mathématiques est important (un exemple est analysé dans de Vittori, 2012). Les séances à dimension historique présentent toujours de manière plus ou moins explicite des éléments éparses d'apprentissages épistémologiques. Du point de vue des élèves, ce processus permet de les réunir et de les mettre en cohérence. Le dernier point quant au lieu de l'histoire en classe concerne la mise en œuvre des activités. Sur nos vidéos, il apparaît que les différentes tâches proposées aux élèves recèlent souvent en elles-mêmes une dimension historique. Cet aspect est plus ou moins visible selon les séances, mais il est assez clair lors des séances en extérieur. Dans les deux séances sur la mesure des grandeurs inaccessibles et sur le tracé du carré avec des cordes (cf. première partie), l'usage des instruments et outils constitue une histoire « à vivre » au sens où les techniques mathématiques en jeu sont justifiées d'un point de vue historique. Remarquons que ce n'est pas toujours le cas et qu'il arrive que les tâches proposées au élèves soient abordées de manière totalement anhistorique, y compris lorsqu'elles sont accompagnées d'une contextualisation socio-historique. Faire des mathématiques « comme les anciens » est aussi

8 Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

selon nous une forme d'apprentissage de l'histoire. Cette approche pédagogique n'est pas forcément très courante en mathématiques où le travail sur des textes domine, mais dans d'autres champs scientifiques, faire vivre d'anciens usages est un type de travail reconnu. On peut par exemple penser à la réplication d'expériences en physique avec reconstitution des contraintes d'époques (cf. Heering & Wittje, 2011).

2.2. Un exemple de jeu sur les savoirs historiques

Les connaissances historiques précises qui sont mises en jeu par l'enseignant sont généralement assez difficiles à cerner. Elles restent en effet le plus souvent implicites et leur identification est rendue particulièrement délicate tant par le fait qu'elles sont propres à chaque enseignant que parce qu'elles ne font l'objet d'aucune demande institutionnelle détaillée. Nous avons cependant dans notre corpus des temps où transparaît clairement la volonté de l'enseignant de transmettre des connaissances historiques. Les premières phases de dévolution sont par exemple assez souvent utilisées pour accueillir un discours de type historique. Le paragraphe 1.2 de la première partie donne une idée assez représentative de ces temps de mises en route des activités, commun à quasiment toutes les séances. Nous avons choisi ici de nous intéresser aux contenus historiques travaillés en classe à partir d'une séance très particulière au cours de laquelle l'enseignant propose à ses élèves de sixième de faire un bilan de leurs connaissances sur les systèmes de numération. Pendant l'année, cette classe a rencontré plusieurs fois des systèmes de numération exotiques. Les hiéroglyphes égyptiens et la numération aztèque ont été particulièrement étudiés. La séance de bilan s'organise en deux temps à partir d'une fiche comportant six questions (cf annexe 2). Les élèves sont répartis en petits groupes durant toute l'heure. Dans une première partie de la séance, chaque groupe tente de répondre de mémoire aux questions de la fiche. Ensuite, après une première synthèse au tableau des éléments dont ils se sont souvenus, les élèves sont invités à consulter leur cahier de cours pour compléter les manques. Cette deuxième phase constitue l'objectif transversal principal de la séance qui vise à montrer aux élèves l'importance du cahier comme ressource. Pour cette séance, la caméra est fixe, elle est placée à proximité du bureau de l'enseignant. Cette position offre l'avantage de pouvoir suivre aisément le professeur et les différents échanges dans la classe mais ne donne que difficilement accès au travail effectif des élèves ou des groupes. Les analyses qui suivent portent donc sur des échanges en classe entière.

La séance est présentée par sa dimension historique. L'enseignant explique les enjeux :

> H : Voilà... alors aujourd'hui on va retravailler un petit peu sur euh, sur les nombres, sur l'histoire des nombres, l'écriture des nombres. Et puis... on va essayer de faire un petit bilan de ce que vous aurez retenu depuis le début de l'année, on en a parlé assez régulièrement et euh, on va, je vais vous laisser d'abord dans un premier temps chercher en groupe pour voir ce qui vous reste. Puis après on fera un petit bilan. Puis ensuite on relancera l'activité.

Dans cette première phase, le travail s'effectue en groupe sur la fiche-questionnaire et sans le cahier. L'enseignant passe auprès des différents groupes et encourage les élèves : « c'est bien, il faut chercher, il y a des choses qui reviennent, c'est bien ». Après cinq minutes de recherche, une synthèse est faite pour la première question (Question 1 : Connais-tu des méthodes utilisées par nos très lointains ancêtres ?). Elle porte sur les systèmes de « numération » très anciens reposant sur des représentations analogiques des quantités, au sens de la construction de collections équipotentes de signes standard, par exemple une marque, un boule d'argile etc. Les élèves proposent volontiers leurs réponses et c'est le professeur qui tranche quant à la pertinence de ce qui est dit. La forme de travail est annoncée : il s'agit d'un remue-méninge. Nous proposons un extrait des échanges entre l'enseignant et les élèves ci-dessous :

> H : Bon des cailloux dans des boules d'argiles [H écrit la réponse au tableau] des cailloux dans des boules d'argile. Ça c'était pour la première/ Est-ce que quelqu'un

a trouvé autre chose, se souvenait de d'autres idées ? [E3 lève la main] Oui ?

E3 : Avec des nœuds sur des cordes.

H : Des nœuds sur des cordes [H écrit la réponse au tableau] des nœuds sur des cordes, des nœuds avec des cordes, voilà. [un autre élève du même groupe lève la main] Euh... un autre groupe que j'aurais pas entendu... avoir trouvé autre chose... ici là qu'est-ce que vous m'avez retrouvé ? Le premier groupe [H désigne un groupe ne s'étant pas encore exprimé], vous aviez retrouvé la même chose, bon. T'as autre chose E1 ?

E1 : Avec des bâtons

H : Avec des bâtons, des bâtons, des bâtons c'est-à-dire ?

E : [inaudible]

H : Des traits, ah oui, des traits

Après une deuxième phase de recherche toujours soutenue par des encouragements du type « Oui il y avait ce genre de dessins... Ah ouais c'est pas mal ça... », une deuxième synthèse est lancée. Cette fois, ce sont les systèmes de numérations reposant sur l'usage de différents symboles qui sont interrogés. Voici une partie des échanges relatifs à la question 2 (« Connais-tu des systèmes anciens d'écriture des nombres ? ») :

H : Y avait quoi ?

E12 : Des points

H : Des points, oui y avait des points

Es (en même temps que H) : La plume

H : Le point, la plume

E13 (même groupe que E12) : Des sacoches

Es : Un escargot

H : Y avait une p'tite sacoche ouais

E13 : Y a y a le tourbillon

Es : Une sacoche, une fleur, ...

H : Alors c'était pas une fleur

Es : Des spirales, un tourbillon, ...

H : Alors on mélange pas tout

E13 : Un épi de maïs !

H : Alors pas tous en même temps sinon j'entendrai rien. On m'a dit le point le point c'est pour euh quelle numération aztèque ou égyptienne ?

Es : Aztèques

H : C'est les aztèques, le point bon qu'est-ce que vous m'avez proposé d'autre... j'ai entendu tout à l'heure ?

Es : La sacoche

H : La sacoche, la petite bourse c'était chez qui ça?

Es : Les aztèques

H : D'accord

[Les réponses sont alors résumées sur deux colonnes au tableau]

Dans cette première partie de séance, le jeu sur la validation des réponses devient le moteur de l'activité. Cette dynamique est alors utilisée pour toute la suite des échanges. Une fois les symboles retrouvés, il reste à leur rechercher une traduction dans notre propre système décimal de numération. Toujours volontaires, les élèves proposent des valeurs. Les nombres 1 et 10 viennent naturellement et après relance du professeur, les élèves proposent d'autres bases : les bases 5 et 100 (mauvaises réponses) puis la base 20 (réponse attendue). Seules les valeurs des premiers symboles sont inscrites au tableau, les autres sont laissées en suspens. Cette étape, qui va servir de transition, est en fait intégralement créée par le professeur qui choisit de ne pas relever certaines bonnes réponses. L'enseignant provoque ainsi une attente et donc en quelque sorte, le besoin pour la seconde étape du travail. Les élèves prennent alors leur cahier de cours pour trouver les informations manquantes.

Durant toutes la séance, les élèves répondent assez spontanément et lancent toutes sortes de valeurs lorsqu'on les interroge sur la signification des symboles. Il y a là une part du contrat habituel de la classe car l'enseignant travaille assez régulièrement sur le fait de ne pas rester bloquer devant une question et sur l'importance des méthodes par essais-erreurs. Pour cette séance centrée sur des connaissances mathématico-historiques, l'absence d'enjeu institutionnel fort joue peut-être aussi dans le choix de cette modalité de travail qui semble privilégier l'expression des élèves au détriment parfois des contraintes de pertinence ou de validité des réponses. La première partie de la séance est un exercice de mémoire. La tâche des élèves est de faire des propositions de réponses sur la base de leurs souvenirs. Ils n'ont aucun autre repère que ce que dit le professeur, que ce soit pour construire leurs réponses ou pour les valider. Pour autant, la séance est dynamique et plusieurs élèves s'expriment. Le jeu du professeur consiste alors à organiser la phase de validation, à sélectionner et mettre en avant certaines réponses. Ce processus lui permet d'identifier et de stabiliser des contenus historiques en les distinguant des faux souvenirs et des propositions fantaisistes (qui sont plutôt nombreuses dans ce contexte). Responsable du temps didactique, l'enseignant décide à un moment d'interrompre son jeu de questionnement et de sélection. Après avoir relevé l'absence de consensus sur les valeurs de divers symboles (et noté en conséquence plusieurs points d'interrogation au tableau), il lance la phase de recherche dans les cahiers. Dans la séance qui vient d'être partiellement décrite (voir la fiche complète en annexe), le travail des élèves porte sur les systèmes de numération. Il nous a paru intéressant de tenter d'en préciser les différents enjeux de connaissances, mathématiques et historiques, afin d'essayer de mieux identifier ce qui est abordé dans la séance. Qu'est-ce que connaître un système de numération ? Est-ce :

1. être en mesure de dire à quelle époque il a été utilisé ?
2. être capable de le situer dans une ère culturelle et/ou géographique ?
3. connaître le contexte de son invention et/ou développement ?
4. pouvoir donner la graphie des symboles utilisés ?
5. connaître la valeur des symboles ?
6. être capable de dire dans quelle base on travaille ?
7. connaître la nature « au sens actuel » des nombres en jeu ?
8. connaître les règles de syntaxe (position, zéro, additif, multiplicatif, …) ?
9. pouvoir passer d'un système au nôtre et/ou réciproquement ?

Ces premiers points sont généralement présents dans les situations proposées aux élèves et étudiants (bien que non nécessairement simultanément). Pour accentuer la dimension historique, nous pourrions ajouter un point 10 : savoir travailler dans le système sans référence au nôtre.

Différents systèmes de numération sont rencontrés par les élèves, parfois dès l'école primaire, combinant intrinsèquement des aspects principalement mathématiques (points 5, 6, 7, 8 et 9) et des dimensions épistémologico-historiques et culturelles (1, 2, 3, 4, et 10 ; mais aussi 9). La distinction mathématique/historique n'est évidemment pas stricte et certains glissements sont incontournables car comme il s'agit de fragments d'histoire des mathématiques, ils contiennent, par essence, des mathématiques. Dans la séance ci-dessus, conformément à la consigne donnée, les élèves réinvestissent en premier lieu la dimension historique (cf. les deux extraits précédents). Ensuite seulement, l'enseignant va impulser des basculements vers des aspects plus mathématiques. Si l'on considère spécifiquement la question de l'attribution des valeurs aux différents symboles retrouvés, ce basculement s'opère à peu près au milieu des échanges par l'intermédiaire d'un questionnement sur les valeurs relatives des différents symboles d'un même système de numération. L'enseignant prépare ainsi une révision de la notion de base. La question de la nature positionnelle ou non des systèmes interviendra un peu plus loin dans la séance. Ce changement d'enjeu se double aussi d'une accélération du temps didactique. Pour parvenir à ses objectifs, l'enseignant interrompt la tâche des élèves qui étaient alors occupés à rechercher dans leur cahier des informations relatives à la valeur des symboles. Pour le système égyptien, les bonnes réponses 1, 10, 100 sont rapidement écrites au tableau. L'identification de la base 10 ne pose pas de problème et l'opération « multiplier par 10 » pour passer d'un symbole à l'autre à l'autre est rapidement donnée. La tâche suivante consiste en l'écriture du nombre 457 dans les deux systèmes, ce qui doit permettre de discuter ensuite des forces et faiblesses de chacun. Dans la fiche d'activité, la sixième et dernière question invite explicitement les élèves à donner leur perception de la pertinence des différents systèmes de numération revus au cours de la séance et à pointer les différences avec le nôtre. Partant des commentaires mathématiques, la visée devient alors épistémologique et porte sur l'intérêt en mathématiques des méthodes les plus performantes. Malheureusement, la fin de la séance intervient avant que cette dernière question de synthèse n'ait pu être traitée.

Sur ce simple exemple de travail autour des systèmes de numération, nous constatons que l'activité des allers-retours entre une approche culturelle et le travail mathématique. Dans cette séance, les dimensions culturelles sont d'abord utilisées pour entrer dans un travail principalement. Ce dernier, lié à l'objet historique devait amener à la comparaison des systèmes et donc, en retour, à l'introduction de nouvelles connaissances épistémologiques créant ainsi une dynamique dans les passages d'un champ de connaissance à l'autre.

2.3. Discussion autour de l'allégorie de l'arithmétique de Gregor Reisch (gravure du 16e siècle)

Comme il nous l'a affirmé lors d'entretiens, l'enseignant avait pour objectif principal que les élèves sachent que les mathématiques ne se sont pas créées spontanément par hasard, mais qu'il y a des contingences internes et externes qui permettent d'expliquer certains développements. Dans le passage qui va suivre, c'est avant tout des aspects épistémologiques qu'il cherche à faire saisir aux élèves. Il s'agit d'un extrait de la même séance que celle du paragraphe précédent. L'activité intervient dans la deuxième partie au cours de laquelle les élèves consultent leur cahier. En lien avec la numération romaine, les élèves viennent de retrouver une gravure représentant une allégorie de l'arithmétique. L'enseignant demande alors aux élèves de décrire cette image et de dire ce qu'elle leur évoque.

Figure 2. Gregor Reisch, Margarita philosophica. Freiburg : Johann Schott, env. 1503

Il engage et anime alors un débat entre élèves vers une interprétation partagée de ce document ancien. L'enjeu d'apprentissage, qui ne transparaît qu'à la fin dans le discours du professeur, est purement épistémologico-historique : il s'agit de comprendre que l'usage d'un même système de numération pour représenter les nombres et calculer avec eux constitue une avancée pour les pratiques mathématiques.

H : Quand vous, vous écrivez les nombres et que vous faites des opérations. Qu'est-ce qui... y a une différence ou pas ? Dans votre façon d'écrire les nombres et votre façon de calculer ?

[Les élèves sont perdus]

E5 : Ils écrivaient gros

H : Ils écrivaient gros ?!? [rire] Ben, le système d'écriture des nombres nous permet de faire des calculs. C'est-à-dire que quand je vais écrire mon opération, j'écris 357 multiplié par 12, ça me pose aucun problème, les nombres qui sont écrits pour faire mon opération sont écrits avec le même système que quand lorsque j'écris les nombres. Tandis que les égyptiens, euh pardon les romains, avaient une méthode pour compter et une méthode pour écrire et les deux elles étaient pas compatibles. D'accord ? Ils ne comptaient pas avec les nombres tels qu'ils étaient écrits, y avait deux systèmes et ils étaient incompatibles et donc ça a posé de gros problèmes. D'accord, voilà. Allez, on continue !

Attardons-nous un instant sur la nature de cette activité. La tâche des élèves consistait jusqu'ici à rechercher, parmi des savoirs préalablement institutionnalisés, des informations sur la manière de calculer des romains, sans autre véritable enjeu que celui de participer au jeu de questions-réponses animé par l'enseignant. L'activité des élèves et la place qui leur est donnée nous paraissent ici fondamentalement différentes. Il ne s'agit en effet plus de mobiliser des savoirs mais de faire émerger ceux-ci de la lecture et l'interprétation d'une source historique. Le travail de l'élève change alors radicalement de nature, pour se rapprocher, dans une certaine mesure, d'une partie de ce que pourrait être le travail d'un historien. Risquons nous à un parallèle. Si la tâche était mathématique, le travail des élèves relèverait d'une situation de type résolution de problème où les connaissances mathématiques apparaîtraient comme l'outil permettant la résolution. Ici, la question est historique : que nous apprend ce document sur l'évolution des connaissances mathématiques ? Cette situation interroge selon nous l'existence d'un outil de type épistémologico-historique qui, par analogie au cas des problèmes mathématiques, permettrait la lecture et l'interprétation. Cette allégorie de l'arithmétique représente l'expression, à un moment donné, de certains changements dans les mathématiques ; la déchiffrer nécessite la convocation de divers savoirs épistémologiques et historiques. Dans ses différentes classes, l'enseignant utilise souvent cette gravure et il engage les élèves dans l'activité sans difficulté. La dévolution de la tâche, comme très souvent dans ce type de séances, repose essentiellement sur la dimension exotique du support. Les élèves mettent ensuite en œuvre diverses connaissances pour proposer des interprétations de la gravure. On entend par exemple des expressions comme « chiffres indo-arabes », « boulier », « abaque ». Toutefois, ne pouvant s'appuyer que sur leurs connaissances antérieures des systèmes de numérations telles qu'elles sont apparues dans le début de cette séance et sur les réactions du professeur, ils ne sont pas en mesure de construire la connaissance historique visée comme réponse à la situation. La convocation d'outils d'analyse classiques de didactique des mathématiques nous conduirait à dire que le milieu de cette situation n'offre aucune possibilité de rétroaction. Pour faire avancer l'activité des élèves, l'enseignant se voit donc contraint de pallier ces lacunes de la situation en jouant sur des effets de contrat, à travers la formulation de questions et la validation des propositions des élèves. L'enseignant perçoit rapidement l'impossibilité pour les élèves de faire émerger par eux-mêmes les savoirs épistémologico-historiques visés. Il formule alors la question suivante : « quand vous vous écrivez les nombres et que vous faites des opérations. Qu'est-ce qui... y a une différence ou pas ? » puis, en l'absence de réactions pertinentes, il précise le problème en l'explicitant sur un cas concret « quand je vais écrire mon opération j'écris 357 multiplié par 12 … » réduisant ainsi la tâche qui était au départ de type synthétique à une étude locale et guidée. Pour les élèves, ceci n'est toutefois pas suffisant. D'un mode constructif, l'enseignant bascule alors vers un mode transmissif. Il donne la synthèse attendue et ne s'étend pas sur les explications. Alors qu'il y avait semble-t-il au départ une intention didactique manifeste, l'enseignant passe à une phase où, finalement, l'information prime.

Cette tentative de lecture de l'activité mériterait probablement d'être approfondie, mais elle permet déjà en l'état de pointer quelques difficultés liées aux spécificités des connaissances historiques. Nous l'avons précisé en introduction, l'histoire est une construction rationnelle visant à rendre compte du passé. Pour pouvoir reproduire cette construction, il faut posséder les éléments qui l'ont permise mais aussi les questions qui l'animent. Dans l'exemple ci-dessus, on constate aisément que les élèves n'ont pas les outils nécessaires à l'émergence des savoirs visés par l'enseignant par simple interaction avec le milieu qui leur est proposé. Leurs connaissances historiques sont insuffisantes et le milieu n'offre que très peu de possibilités de rétroactions exploitables. Il serait peut-être possible de repenser cette activité en créant d'autres conditions qui permettraient aux élèves de s'approcher davantage de la réponse souhaitée. Par exemple, on pourrait utiliser l'idée exploitée par l'enseignant et faire expérimenter, sur des calculs explicites, la pertinence ou non de l'utilisation de différents systèmes. On pourrait aussi donner d'autres documents, des sources primaires ou secondaires, qui permettraient d'ouvrir des pistes d'interprétation. Dans le premier cas, l'activité mathématique aiderait à construire la connaissance historique, dans le second, la méthode quitte sensiblement le champ du cours de mathématiques pour s'approcher de celui du cours d'histoire. Selon la sensibilité de l'enseignant, différents choix seraient possibles et justifiables. Dans la perspective de l'analyse de cette séance, notre question n'est pas tant de savoir comment améliorer la situation, mais bien de cerner en quoi la construction de connaissances épistémologiques ou historiques peut être délicate de par les spécificités des contenus en jeu. L'interprétation traditionnelle de la gravure de Gregor Reisch repose sur de nombreuses connaissances historiques. Certes, la dimension épistémologico-mathématique évoquée par l'enseignant est importante, mais l'acceptation définitive du système indo-arabe résulte tout autant des besoins liés à l'essor du commerce ou des luttes avec les religieux défenseurs de l'ancien système. L'histoire des mathématiques est complexe, multi-forme et admet des fondements épistémologiques radicalement différents de ceux des mathématiques. La didactique des mathématiques repose sur une modélisation des savoirs en termes d'outils permettant de se confronter efficacement à des situations. L'étude de l'extrait de séance sur l'allégorie de l'arithmétique interroge, selon nous, la pertinence de la mobilisation des outils de la didactique des mathématiques, et en particulier de ceux de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998) avec laquelle nous sommes plus familiers, dans ce nouveau contexte.

2.4. Conclusion et ouverture (2)

Dans les passages qui viennent d'être décrits, on constate que les savoirs historiques ne sont pas ou peu problématisés. Généralement, dans les séances que nous avons analysées, il ne s'agit pas de construire des connaissances historiques en tant qu'elles seraient historiques. Par exemple, il n'y a pas d'information sur la manière dont ont été construites ces connaissances, sur les méthodes historiques employées et la relativité des connaissances, ou encore sur l'importance des sources et leur existence ou non. L'objectif n'est pas là car, en quelque sorte, il s'agit d'histoire des mathématiques "pour" les élèves, à visée didactique et digérée par l'enseignant. En soit, rien de grave car comme le précise Keller (2001 p. 30) : « jouer avec la documentation pour "faire des maths" n'a rien de condamnable, à condition de ne pas prendre un tel délassement pour une analyse historique ». Dans la séance de bilan avec les élèves de sixième de notre corpus, il est intéressant de remarquer que, bien que l'enjeu soit relativement faible, les élèves s'impliquent volontiers et la séance « fonctionne ». Il semble donc que l'approche historique parle d'une autre manière aux élèves, qu'elle ait, comme le disait l'historien Marc Bloch, un certain attrait :

> Certes, même si l'histoire devait être jugée incapable d'autres services, il resterait à faire valoir, en sa faveur, qu'elle est distrayante. Ou, pour être plus exact — car chacun cherche ses distractions où il lui plaît — qu'elle paraît telle, incontestablement, à un grand nombre d'hommes. (Bloch, 1949, p. xi)

Dans une séance de classe ordinaire, il semble bien que cet aspect soit important et contribue à l'implication des élèves. Ajoutons qu'en dépit d'une forme d'apprentissage non usuelle pour un cours de mathématiques, les élèves fixent et sont capables de réinvestir un nombre important de connaissances de nature historique au sens large. Chaque fois que l'enseignant questionne ses élèves sur des éléments historiques, ceux-ci répondent souvent de façon pertinente, ou au moins, cherche à le faire. Cet enseignant a, depuis plusieurs années, multiplié les interventions d'éléments historiques dans ses cours. Ainsi, tout chapitre et sur chaque niveau du collège comprend soit une page d'introduction historico-culturelle soit des activités inspirées par des problèmes anciens. Les vidéos de notre corpus ayant été réalisées au mois de mai, on constate une véritable habitude des élèves dans ce champ de connaissances qui vient s'intégrer au cours de mathématiques traditionnel.

Conclusion

Sur le plan didactique, une séance ordinaire comprenant une dimension historique ne se laisse pas facilement saisir. En classe, l'enseignant est seul face à ses élèves et c'est à lui que revient la responsabilité de ce double apprentissage et la gestion de deux épistémologies bien distinctes. Pour celui qui n'en aurait pas fait le choix, cette situation en elle-même peut devenir un obstacle et explique peut-être la réticence de certains enseignants à s'y risquer (cf. le paradoxe du double champ dans de Vittori, 2012). Mais lorsqu'un professeur s'engage dans ce type de séance, il y a indéniablement une richesse de pratiques qui mérite qu'on s'y attarde.

Dans notre projet, l'un des points de départ théoriques est la prise en considération des mathématiques et de leur histoire comme des savoirs intriqués et complémentaires. Dans cet article, nous avons tout d'abord essayé d'étudier comment la mise en œuvre d'une dimension historique dans un cours de mathématiques pouvait agir sur les les pratiques des élèves et leurs apprentissages mathématiques. L'analyse didactique de la « séances des cordes », élaborée par adaptation d'une ancienne méthode indienne de construction de carré à l'aide d'une corde et d'un piquet, a permis de mettre en évidence les potentialités didactiques offertes par ce type de pratique géométrique. La modification des instruments utilisés induite par cette contextualisation, associée à une possible réflexion d'ordre épistémologique, rend possible un questionnement riche sur les objets géométriques sous-jacents et leurs propriétés.

Par ailleurs, dès lors que l'on considère l'histoire comme un objet d'apprentissage, des éléments remarquables sur le plan didactique apparaissent également. Pour l'exemple de la séance bilan sixième, le contrat entre le professeur et les élèves relativement à ce champ ne semble pas se confondre complètement avec celui à l'œuvre lorsqu'il s'agit de mathématiques. Il y a indéniablement une spécificité des contenus historiques en classe dont nous pensons que l'analyse didactique peut rendre compte. Ce dernier point ouvre de nouvelles pistes de recherche. Si les processus d'enseignement et d'apprentissage visant des savoirs mathématiques peuvent être étudiés avec des outils d'analyse ayant fait leurs preuves dans le champ de la didactique des mathématiques les processus de construction de connaissances historiques, en classe de mathématiques, nécessitent sans doute une autre approche, notamment parce qu'elle repose sur des fondements épistémologiques radicalement différents. Comment penser des situations d'apprentissage visant des connaissances historiques en classe de mathématiques ? De quels outils disposons-nous pour analyser leur dynamique et les apprentissages qu'elles permettent ? Ce texte rend compte d'une recherche qui débute et ces questions sont pour nous très largement ouvertes.

Références

ARTIGUE M. et ROBINET J. (1982) Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 3 n° 2, pp. 5-64.

BARBIN E. (1997) Histoire et enseignement des mathématiques : Pourquoi ? Comment ?

Bulletin AMQ, vol. XXXVII n°1 , pp. 20-25.

BERTHELOT R. et SALIN M.-H. (2000-2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. *Petit x*, n°56, pp. 5-34.

BLOCH M. (1949) *Apologie pour l'histoire ou le métier d'historien*. Paris : Armand Colin.

BLOCH I. et OSEL C. (2010) L'apprentissage de la géométrie à l'école primaire : analyse d'un progression centrée sur les problèmes spatio-géométriques et leurs représentations. In Commission Inter-IREM COPIRELEM (Ed.), *Actes du XXXVIème colloque COPIRELEM. Auch 2009. L'enseignement des mathématiques à l'école : où est le problème ? (Cédérom)*. Paris : ARPEME.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

DELIRE J.-M. (à paraître) *Les mathématiques de l'autel védique : Le Baudhayana Sulbasutra et son commentaire Sulbadipika*.

DE VITTORI T. (2012) History in mathematics teaching: current problems and new proposals, *Almagest*, vol. III n°1, pp. 62-77.

DUVAL R. et GODIN M. (2005) Les changements de regards nécessaires sur les figures. *Grand N*, n°76, pp. 7-27.

FAUVEL J. et VAN MAANEN J. (éds) (2002) *History of Mathematics in Education – The ICMI Study.* Dordrecht-Boston-London : Kluwer Academic Publishers.

GUEDJ M. (dir) (2006) Histoire des sciences : formations et recherches en IUFM. *Tréma*, n°26.

GUILLEMETTE D. (2011) L'histoire dans l'enseignement des mathématiques : sur la méthodologie de recherche. *Petit x*, n°86, pp. 5-26.

HEERING P. et WITTJE R. (éds) (2011) *Learning by Doing. Experiments and Instruments in the History of Science Teaching*. Stuttgart : Franz Steiner Verlag.

JANKVIST U.T. (2009a) On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Relime*, vol. 12 n°1, pp. 67-101.

JANKVIST U.T. (2009b) A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, vol.71 n°3, pp. 235-261.

KATZ V. et TZANAKIS C. (éds) (2012) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*. Mathematical Association of America.

KELLER O. (2000). La géométrie des Sulbasutras. Exemple de géométrie rituelle de l'Inde védique : l'agrandissement de l'autel en forme de faucon. *Repères-IREM,* n°40 pp. 115 - 124.

KELLER O. (2001) Préhistoire de la géométrie : le problème des sources. Texte disponible sur le site de l'IREM de la Réunion (consulté le 23/07/2012) : http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/IMG/pdf/Keller_prehistoire_geometrie.pdf

KESKESSA B., PERRIN-GLORIAN M.-J. et DELPLACE J.-R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N*, n°79, pp.33-60.

MORANGE M. (2008) *À quoi sert l'histoire des sciences ?* Versailles : Quae.

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.-J. et VERBAERE O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N*, n°77, pp.7-34

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C. et LECLERC R. (à paraître en 2012) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM,* n°89.

PROST A. (1996) *Douze leçons sur l'histoire*. Paris : Seuil.

RACINE M.-N. (2007) Géométries, différentes manières de les enseigner. In Barbin E. & Bénard D. (Eds.) *Histoire et enseignement des mathématiques. Rigueurs, Erreurs, Raisonnements* (pp. 175-199). Lyon : INRP.

SENSEVY G. (2011). *Le sens du savoir*. *Eléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : De Boeck.

SIU, M.-K. et TZANAKIS C. (2004) History of Mathematics in Classroom Teaching – Appetizer?, Main Course? Or Dessert? *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 3 n°1-2, pp. v-x.

TOURNES D. (1993) Place de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants du secondaire. *Expressions*, n°3, pp.145-159.

Annexe 1. <u>Les tendeurs de cordes</u>

Les mathématiciens indiens ont travaillé sur les problèmes de construction géométrique.

Ils ont décrit des méthodes pour transformer un carré en un rectangle de même aire ou pour transformer un rectangle en un carré de même aire.

On trouve aussi des tentatives pour transformer un cercle en carré de même aire.

<u>Question</u> : Les mathématiciens grecs ont aussi étudié cette dernière situation, à la règle non graduée et au compas. Comment a-t-on appelé par la suite ce problème ?

Ces constructions étaient très précises et avaient souvent un but religieux.

Ils utilisaient des grandes cordes pour faire des figures au sol, qui servaient ensuite à construire des temples pour prier les dieux.

Les descriptions de ces méthodes se trouvent dans des textes sacrés appelés Sulbasutras.

Annexe 2. <u>Du comptage à l'écriture des nombres</u>

Quand les hommes eurent envie de compter ce qu'il y avait autour d'eux (des hommes , des bêtes, des choses), ils durent aussi trouver des moyens pour conserver le résultat. Le principe était de faire une marque pour chaque chose : une chose comptée, une marque, une autre chose comptée, une autre marque !

<u>Question 1</u> : Connais-tu des méthodes utilisées par nos très lointains ancêtres ?

Plus tard, environ 4 000 ans avant J.C. , les hommes eurent l'idée d'écrire.
Ils inventèrent alors des méthodes pour pouvoir aussi écrire les résultats de leurs comptages.
<u>Question 2</u> : Connais-tu des systèmes anciens d'écriture des nombres ?
<u>Question 3</u> : Peux-tu écrire le nombre 457 en utilisant deux de ces écritures ?
<u>Question 4</u> : Comment les romains faisaient-ils pour compter ?
<u>Question 5</u> : D'où viennent les chiffres que nous utilisons aujourd'hui ?
<u>Question 6</u> : Quelles différences peux-tu faire entre notre système d'écriture des nombres et celui des Égyptiens, des Aztèques ou des Romains ?