RECONNAISSANCE DE SITUATIONS DE PROPORTIONNALITÉ EN CM2-SIXIÈME

Arnaud SIMARD

IUFM de Franche-Comté

La proportionnalité est une notion mathématique centrale dans l'enseignement obligatoire français. Cette notion est inscrite dans le pilier 3 du socle commun des connaissances et compétences[1] : « *La proportionnalité : propriété de linéarité, représentation graphique, tableau de proportionnalité, « produit en croix » ou « règle de 3 », pourcentage, échelle* ». Elle apparaît dès les programmes du cycle 3[2] sous la forme suivante : « *Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité, en utilisant des procédures variées (dont la « règle de trois »)* ». Bien entendu, cette notion est travaillée dans les classes de cycle 2 lors des problèmes d'échange et des problèmes de calcul (multiplication et division). Au collège, la proportionnalité est au programme de toutes les classes[3] sous les références suivantes (Bulletin Officiel hors-série n° 5 du 9 septembre 2004). Le document « Ressources pour les classes de 6ème, 5ème, 4ème et 3ème : Proportionnalité »[4] apporte un éclairage tout à fait intéressant sur le sujet au niveau du collège. Enfin, en classe de 3ème, les fonctions linéaires sont abordées, et le lien doit être fait avec la proportionnalité.

La proportionnalité est un modèle mathématique qui permet d'éclairer et de traiter de problèmes relavant de différents contextes de la vie de tous les jours (monnaie, soldes, recettes…) mais également différents domaines d'études scientifiques ou non (sciences économiques et sociales, géographie...). À ce titre, son étude est précieuse et sa maîtrise au sortir de l'école obligatoire est essentielle pour les futurs citoyens.

---

[1] *Le socle commun des connaissances et des compétences* – décret n° 2006-830 du 11 juillet 2006.

[2] Bulletin Officiel hors-série n° 3 du 19 juin 2008.

[3] Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008.

[4] *Ressources pour les classes de 6ème, 5ème, 4ème et 3ème du collège, Proportionnalité au collège*, http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/4/doc_acc_clg_proportionnalite_109174.pdf. Eduscol, 2005.

Grand N n° 90, 2012, pp. 49 à 67

Beaucoup d'écrits ont déjà été réalisés sur l'apprentissage de la proportionnalité, aussi bien d'un point de vue mathématique (Boisnard, 1994), pédagogique ou didactique (ERMEL, 2001 ; Pfaff, 2003 ; Comin, 2003, par exemple) mais aussi psychologique (Levain, 1994 et 1998, par exemple).

Même si l'apprentissage de la proportionnalité se fait sur un temps long, puisqu'elle débute au primaire et se prolonge au collège, on a constaté que cette notion est loin d'être acquise par tous les élèves qui entrent en seconde (Gille, 2008).

Le but de cet article est d'analyser un point particulier de l'apprentissage de la proportionnalité qui est la reconnaissance des situations de proportionnalité (ce qui peut être le premier pas vers la modélisation) à l'école élémentaire et au début du collège. Bien que beaucoup de contextes physiques (relevés de mesures) permettent d'aborder la notion de proportionnalité, dans cet article, nous limiterons notre intérêt à des contextes proches de la vie de tous les jours. Le lecteur intéressé pourra se référer à l'article de Coppé (1996) pour une approche tout à fait intéressante sur ce sujet, réalisée lors d'un stage de formation continue de professeurs d'école.

Pour illustrer la question de la modélisation de situations par la proportionnalité, voici deux problèmes dits concrets :

> **Problème A** : Dans la recette du poulet au citron, il faut 2 citrons pour 5 personnes. Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?
>
> **Problème B** : Au cours du dernier match, Youri a marqué 3 buts. Combien marquera-t-il de buts pendant les 5 prochains matchs ?

Intuitivement, le problème A relève du modèle proportionnel alors que le problème B n'en relève pas. Pour s'en persuader, les arguments usuels sont les suivants :

- Pour le problème A :

> « Si on multiplie le nombre de personnes dans une recette, on multiplie d'autant les quantités » ;
>
> « Si on connaît les quantités pour 5 personnes, on peut connaître les quantités pour une personne et ainsi connaître les quantités pour n'importe quel nombre de personnes ».

Ces arguments sous-entendent qu'on considère que chaque personne mange la même portion de citron (ce qui est loin d'être évident mais raisonnable).

- Pour le problème B :

> « Comme on ne peut pas savoir le nombre de buts que Youri marquera dans les prochains matchs, on ne peut pas conclure » ;
>
> « Ce n'est pas parce que Youri a marqué 3 buts au dernier match qu'il en marquera 3 à tous les matchs ».

D'autre part, ces énoncés peuvent être confrontés à la réalité de leur contexte. Ainsi, pour le problème A, si le modèle proportionnel est reconnu, que peut-on répondre à la question suivante : « Combien faudra-t-il de citrons pour 22 personnes ? ». La réponse mathématique est « $2 \times 22 / 5 = 8{,}8$ citrons » et dans les faits réels, il est évident que l'on prendra 9 citrons pour 22 personnes. La situation reste-t-elle régie par le modèle proportionnel ?

De la même manière, pour le problème B, si l'on suit effectivement la saison de football de Youri et que ce dernier marque effectivement 3 buts par matchs pendant 5 matchs consécutifs (ce qui serait très surprenant, mais réalisable), peut-on toujours dire que le problème B ne relève pas du modèle proportionnel ?

Ainsi, comment être sûr de nos intuitions concernant la proportionnalité ? Quels arguments peut-on proposer pour confirmer ou infirmer ces intuitions ? Comment les élèves (de l'école et du collège) réagissent-ils face à ce type d'exercices ? Les jeunes élèves ont-ils une perception intuitive du modèle proportionnel (acquise par, ce que nous pourrions appeler, « fréquentation sociale ») ?

Nous allons tenter d'éclairer différents points de vue pour aider à répondre à ces questions. La première partie de l'article donnera les bases théoriques nécessaires à la compréhension de la notion de proportionnalité en termes de « théorie des proportions » et en termes de « fonctions linéaires ». Ceci permet de justifier mathématiquement les techniques induites par les programmes. Dans la seconde partie, nous analyserons précisément l'intérêt des fonctions linéaires dans la description des situations de proportionnalité. Enfin, nous aborderons la reconnaissance de situations de proportionnalité par des élèves. Ce travail prendra appui sur une expérimentation menée en cycle 3 et 6ème mêlant des situations de proportionnalité et des situations de non proportionnalité.

Quelques éléments d'analyse mathématique de la proportionnalité

Voici succinctement deux approches théoriques de la proportionnalité. Le but de cette mise au point est multiple. Il s'agit, d'une part, de préciser les aspects théoriques de la proportionnalité en les resituant dans une perspective historique de leur enseignement. D'autre part, il s'agit de se donner une base de vocabulaire et un ensemble d'outils mathématiques nécessaires à l'analyse des productions d'élèves qui sera proposée dans la suite de l'article.

Nous choisissons de définir les situations de proportionnalité à partir des suites numériques finies. Cette définition de la proportionnalité a été donnée par Philippe et Dauchy dans leur cours de 1920 sur la « Théorie des proportions ». Le point clef de cette définition est donné par le rapport constant entre deux suites de nombres.

> **Définition :** Deux suites de nombres qui se correspondent un à un sont proportionnelles lorsque les rapports de deux nombres correspondants sont égaux.

Nous avons choisi cette définition comme base de la proportionnalité car elle correspond, selon nous, à la plupart des contextes présentés à l'école et au collège. Bien entendu, la théorie des proportions n'a de sens que lorsque les rapports (correspondance entre écritures fractionnaires et quotient) ont été étudiés (programme de 6ème / 5ème). Dans une situation de proportionnalité décrite par cette théorie, le rapport commun entre les nombres qui se correspondent est appelé coefficient de proportionnalité.

L'étude des programmes de l'école élémentaire montre que l'on est passé d'un enseignement de la proportionnalité basé sur la *théorie des proportions* à un enseignement basé sur la *linéarité*[5]. Jusque dans les années 1970, on enseignait

[5] On se référera à l'article très documenté de Hersant (2005) pour de plus amples renseignements sur l'étude des programmes concernant la proportionnalité depuis 1887.

les « problèmes de règle de trois », les « rapports de proportions », ainsi que les quantités « directement ou inversement proportionnelles ». L'utilisation du terme « proportionnalité » ainsi que le vocabulaire lié (« coefficient de proportionnalité », « suites proportionnelles », « tableau de proportionnalité ») et surtout les « fonctions linéaires » arrivent avec les mathématiques modernes en 1970. Brousseau (1995) montre comment l'enseignement de la proportionnalité a subi les différentes réformes des années 1970 à 1990. Après avoir insisté sur un enseignement global de la proportionnalité basé sur la linéarité, les programmes se sont vidés de l'architecture théorique conceptuelle des fonctions linéaires pour ne retenir qu'une part du vocabulaire associé, ainsi que la présentation sous forme de tableaux de valeurs (les « tableaux de proportionnalité » dont l'utilisation non raisonnée peut s'avérer catastrophique).

Revenons maintenant plus en détail sur la notion de fonction linéaire.

Une fonction réelle de la variable réelle f est dite linéaire lorsqu'elle est du type $f(x) = ax$, où a est un nombre réel appelé coefficient directeur de la fonction (la fonction f associe à tout réel x une image notée $f(x)$ de valeur $a \times x$).

Si l'on se donne une situation de proportionnalité (définie par la théorie des proportions), le rapport commun (coefficient de proportionnalité) nous permet de définir une fonction linéaire dont le coefficient directeur est ce rapport commun. Cette fonction linéaire modélise la situation. Réciproquement, la donnée d'une fonction linéaire permet la construction de deux suites proportionnelles (ces deux suites coïncident avec un tableau de valeurs de la fonction linéaire). Les situations de proportionnalité ayant le même coefficient de proportionnalité relèvent de la même fonction linéaire (le contexte n'est qu'un « habillage » de la situation). La « linéarité » est un modèle mathématique qui permet donc de décrire précisément les situations de proportionnalité.

Les deux modèles « théorie des proportions » et « linéarité » permettent de décrire les mêmes situations. La seule différence réside dans le champ d'action de ces théories. La théorie des proportions est adaptée au cadre discret (seulement une famille finie de valeurs), alors que la linéarité prolonge la théorie des proportions au cadre continu (fonction de la variable réelle). On peut illustrer cette petite distinction en comparant les deux problèmes suivants (nous les nommerons dorénavant « situations ») :

> **Situation A** : Dans la recette du poulet au citron, il faut 2 citrons pour 5 personnes. Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Dans cette situation, la variable « nombre de personnes » est un nombre entier, alors que dans la situation suivante :

> **Situation A'**: Sur ce plan, 2 cm représentent 5 km. Par quelle distance représente-t-on une distance de 20 km ?

la variable « nombre de km » est un nombre réel non forcément entier (on peut très bien se demander quelle est la circonférence sur le plan d'une parcelle circulaire de rayon 1 km).

Les situations A et A' relèvent toutes les deux de la fonction linéaire définie par $f(x) = \frac{2}{5}x$.

Les deux modèles théoriques « théories des proportions » et « linéarité » ne sont pas enseignés pour eux-mêmes à l'école élémentaire. Pour autant, la plupart des techniques issues de ces deux théories peuvent être adaptées à l'école élémentaire et ce, dès la classe de CP.

La théorie des proportions insiste sur le rapport de deux termes se correspondant. Ce rapport (le coefficient de proportionnalité) est également la *valeur de l'unité* (ou encore ce qui est appelé *valeur d'une part* dans le cadre des divisions partitions[6]). Cette théorie débouche naturellement sur la technique du produit en croix ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implique $ad = bc$) dont la *règle de trois* est une expression contextualisée : en effet, le produit en croix est une technique développée dans le cadre numérique (nombres sans unité) et la règle de trois est une technique développée dans le cadre des nombres avec unité, c'est-à-dire liée à un contexte et correspond à une comptine en trois temps bien connue[7]. Ainsi, on associera les techniques dites du *retour à l'unité (calcul de la valeur de l'unité)* et la technique de *la règle de trois* avec la théorie des proportions.

Comme nous le verrons dans la suite de cet article, les fonctions linéaires sont caractérisées par deux propriétés. La propriété additive $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et la propriété multiplicative $f(k \times x) = k \times f(x)$. Ces deux propriétés sont utilisées de façon implicite dans les procédures de résolution des problèmes de proportionnalité à l'école et au collège. On associera les propriétés additive et multiplicative avec la linéarité (nous parlerons également de relation de linéarité, additive ou multiplicative).

Les raisonnements empiriques usuels pour reconnaître ou calculer une situation de proportionnalité sont-ils valides mathématiquement ?

Tout cours d'analyse (Duffetel, 1997, par exemple) de licence de mathématique propose une démonstration du résultat classique suivant :

> **Théorème 1** : Les seules fonctions f, réelles de la variable réelle, continues qui vérifient la propriété « Pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ » sont les fonctions linéaires. (En d'autres termes : les fonctions linéaires sont les seules fonctions (continues) pour lesquelles l'image de la somme de deux nombres est égale à la somme des images de ces nombres).

Ce théorème signifie que la propriété additive est une caractérisation des fonctions linéaires.

Les fonctions linéaires vérifient également une seconde propriété que l'on retrouve très souvent en pratique de résolution de problème de proportionnalité : la propriété multiplicative.

On dit d'une fonction f qu'elle vérifie la propriété multiplicative lorsque pour tout couple de réels x et y, on a $f(xy) = xf(y)$[8]. S'il est aisé de montrer que toute fonction linéaire vérifie la propriété multiplicative, il est un peu moins simple de prouver que la propriété additive

---

[6] *Le nombre au cycle 2*, SCEREN, 2010.

[7] Par exemple : « Si je connais le nombre pour 5, pour un, j'en aurais 5 fois moins et pour 8 j'en aurais 8 fois plus. »

[8] La propriété multiplicative s'appelle également la propriété d'homogénéité ou propriété scalaire.

et la propriété multiplicative sont équivalentes. Nous donnons en annexe 1 une preuve du théorème suivant :

> **Théorème 2** : Soit f une fonction continue. La fonction f vérifie la propriété additive si, et seulement si, elle vérifie la propriété multiplicative.

Dans la première partie nous avons montré qu'il y a équivalence entre situation de proportionnalité et fonction linéaire. Dans la seconde partie nous avons montré, d'une part, que les fonctions linéaires sont les seules fonctions continues qui vérifient la propriété additive. Enfin, nous avons vu que les propriétés additive et multiplicative sont équivalentes (lorsque l'on se limite aux fonctions continues). Tout ceci nous permet de conclure sur la justification des raisonnements empiriques de reconnaissance de situation de proportionnalité.

Dans l'introduction, nous avons présenté deux problèmes A et B dont nous cherchions à savoir s'ils relevaient du modèle proportionnel. Les arguments classiques pour trancher sont généralement relatifs aux propriétés additive, multiplicative ou au passage à l'unité. Ces arguments sont effectivement valables, mais ne sont pas toujours correctement énoncés. Par exemple, dans une situation du type « recette de cuisine» (situation A), les deux arguments classiques concernant cette situation sont les suivants :

> **Argument 1** : « Si on multiplie le nombre de personnes dans une recette, on multiplie d'autant les quantités » ;
>
> **Argument 2** : « Si on connaît les quantités pour 5 personnes, on peut connaître les quantités pour une personne et ainsi connaître les quantités pour n'importe quel nombre de personnes ».

L'argument 1 est relatif à la propriété multiplicative. Cet argument est valable car on sait que, si la situation est modélisée par une fonction (continue) qui vérifie la propriété multiplicative, alors elle est modélisée par une fonction linéaire (théorèmes 1 et 2). C'est donc bien une situation de proportionnalité. Il y a beaucoup d'implicites dans le seul argument 1. Ces implicites sont les suivants :

- la situation peut se modéliser par une fonction ;
- cette fonction est continue ;
- la multiplication envisagée ne se réduit pas aux nombres entiers, mais à tous réels.

L'argument 2 est relatif au passage à l'unité. Cet argument est également pertinent, mais il cache également les implicites cités par l'argument 1. En effet, dire que l'on peut connaître les quantités pour une personne (quand on les connaît pour 5) est déjà une application de la propriété multiplicative (on divise tout par 5)…

Ainsi, on vient de montrer que les arguments « intuitifs » pour prouver qu'une situation relève du modèle proportionnel se justifient mathématiquement (la situation peut être modélisée par la notion de « proportionnalité » car elle vérifie les « propriétés de proportionnalité » qui sont caractéristiques des fonctions linéaires).

Ces mêmes arguments seront nettement plus convaincants pour montrer qu'une situation ne relève pas du modèle proportionnel. En effet, il suffit d'utiliser les contraposées (mettre en défaut une propriété de la proportionnalité pour pouvoir conclure). La contraposée la plus utilisée est la suivante « Si on ne peut pas utiliser la propriété additive ou multiplicative, alors la situation n'est pas proportionnelle » qui est la contraposée de l'implication « Si la situation est proportionnelle, alors on peut utiliser la propriété additive ou multiplicative ».

Nous allons maintenant utiliser ces rappels théoriques pour commenter des problèmes de reconnaissance de situations de proportionnalité.

Reconnaissance de situations de proportionnalité

Comme il est signalé dans les programmes 2005 du collège, les élèves doivent être confrontés à des situations qui relèvent de la proportionnalité et à des situations qui ne relèvent pas de la proportionnalité. Cette indication figurait dans les documents d'application des programmes 2002[9] de l'école élémentaire mais a disparu dans les programmes 2008[10]. Pourtant l'objectif de la confrontation de ces types de situations de proportionnalité et de non proportionnalité est de créer du sens pour la notion elle-même. Un cadrage théorique du côté des champs conceptuels et de la théorie des schèmes (Vergnaud, 1990) semble pertinent. La reconnaissance de situations semble passer par la construction, par le sujet, d'invariants qui sont les éléments centraux des schèmes qui structurent la prise d'information et l'organisation des conduites au regard d'une classe de problèmes.

Nous allons maintenant envisager comment à partir d'un problème, les élèves peuvent décider d'utiliser le modèle proportionnel, puis quelles procédures ils utilisent.

Implicites des énoncés

La plupart du temps, dans les énoncés d'exercices de proportionnalité, que ce soit à l'école élémentaire ou au collège, le modèle proportionnel est implicite. Il est lié au contexte.

> **Exemple** : Dans une boulangerie, 3 baguettes coûtent 2 euros et 40 centimes d'euros. Combien coûtent 7 baguettes ?

Le modèle mathématique sous-jacent est implicite, il relève d'un savoir social : dans une boulangerie, les baguettes sont vendues à l'unité et toutes au même prix (ce qui n'est pas toujours le cas : par exemple, pour 3 baguettes achetées, la 4$^{\text{ème}}$ peut être gratuite). C'est cet argument qui justifie le modèle proportionnel, mais il n'est pas exprimé dans l'énoncé. Pour lever les implicites de l'énoncé, il faudrait préciser comme suit :

> **Exemple** : Dans une boulangerie, toutes les baguettes coûtent le même prix. Le client précédent achète 3 baguettes pour 2,40 euros. Quelle somme devra-t-on payer pour 7 baguettes ?

Pour essayer de lever ces implicites, les auteurs d'énoncés d'exercices de proportionnalité ont recours à certains mots-clefs. Ces mots-clefs renferment à eux seuls l'idée de proportionnalité, mais ils donnent des énoncés formatés qui induisent généralement le recours à la proportionnalité (cela devient des exercices de mathématiques et non plus des exercices tirés de situations réelles). Voici un exemple tiré des évaluations CM2 de 2011 :

---

[9] Document d'application des programmes, Mathématiques cycle des approfondissements cycle 3, CNDP, juillet 2002.

[10] Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008.

Exemple : Si 10 objets identiques coûtent 22 euros, combien coûtent 15 de ces objets ?

Le terme « identique » implique l'aspect proportionnel. D'autres termes sont utilisés fréquemment (« prix au kilo », « vendu à l'unité », « chaque », « chacune »,…)

Savoir social et situations idéales

Les situations présentées aux élèves sont souvent issues du « réel », et, à ce titre, elles véhiculent un savoir social et un cadre idéal. Par exemple, le contexte d'une recette de cuisine est reconnu socialement comme un cadre de proportionnalité, alors que tout cuisinier sait qu'il faut adapter en fonction de l'appétit des convives. Bref, on sort rapidement du cadre rigide de la proportionnalité dès que l'on passe à la pratique. Le cadre de l'énoncé se veut idéal, dans ce cas on supposera que toutes les personnes mangent avec le même appétit. Le lecteur se référera à Houdement (1999 et 2003) pour des réflexions plus fines sur le cadre idéal des énoncés de problème (distance entre « réel » et « évoqué »), et sur le « rôle des savoirs sociaux » dans la résolution de problème.

Proportionnalité et anticipation

Les mathématiques sont une aide à l'anticipation sans avoir recours à l'expérience. La proportionnalité, comme tout modèle mathématique, permet d'obtenir des résultats théoriques que l'expérience pourrait, ou ne pourrait pas, vérifier (comme dans l'exemple ci-dessous).

Situation C : Un petit fagot de 30 spaghettis pèse 57 grammes. Combien y a-t-il de spaghettis dans un paquet d'un kilogramme ?

Bien entendu, lorsque l'on parle d'anticipation, il peut y avoir une connotation « prévoir l'avenir ». C'est cette connotation qui est en jeu dans la situation B déjà rencontrée :

Situation B : Au cours du dernier match, Youri a marqué 3 buts. Combien marquera-t-il de buts en pendant les 5 prochains matchs ?

Dans les deux exemples ci-dessus, les événements minimaux (« poids de 30 spaghettis », « nombre de buts par matchs ») n'ont pas le même statut. Le poids de 30 spaghettis est considéré intuitivement (et à juste titre) comme invariant (tout paquet de 30 spaghettis pèse 57 grammes), alors que le nombre de buts par match n'est pas un invariant.

La principale difficulté de la modélisation réside dans le fait de calquer un modèle mathématique sur une situation réelle interprétable et sujette à variation en fonction de nombreux paramètres. La proportionnalité ne s'appliquerait donc, dans la vie de tous jours, que dans certains sous-cas de situations générales, c'est-à-dire des cas limités à quelques valeurs numériques ou dans des cadres idéaux. En cela, on retrouve la notion de proportionnalité introduite par Philippe & Dauchy (1920) dans la théorie des proportions. En somme, l'élève doit être capable d'adapter ses connaissances théoriques aux situations pratiques. Par exemple, dans une recette, il devra être capable de faire de « l'à peu près » proportionnel (arrondir 8,8 citrons pour 22 personnes à 9 citrons). Bien entendu, pour arriver à cette maîtrise, il doit être capable de repérer intuitivement (ou raisonnablement) les situations qui relèvent, ou non, de la proportionnalité.

Les enseignants doivent permettre les discussions sur le choix du modèle, c'est aussi important que les techniques.

Catégorisation des procédures

Nous avons vu dans la partie théorique que deux grands types de procédures se dégageaient pour traiter les situations de proportionnalités : le retour à l'unité (qui englobe la règle de trois et l'utilisation du coefficient de proportionnalité) et l'utilisation des relations de linéarité (additive et/ou multiplicative). Ceci nous permet de dresser un tableau de catégorisation des procédures suivantes :

PRU pour Proportionnalité Retour à l'Unité.

NPRU pour Non Proportionnalité Retour à l'Unité.

PLA pour Proportionnalité Linéarité Additif.

PLM pour Proportionnalité Linéarité Multiplicatif.

NPLA pour Non Proportionnalité Linéarité Additif.

NPLM pour Non Proportionnalité Linéarité Multiplicatif.

	Situation de proportionnalité	**Situation de non-proportionnalité**
Retour à l'unité	Procédure PRU	Procédure NPRU
Utilisation des relations de linéarité	Procédure PLA (additif) Procédure PLM (multiplicatif)	Procédure NPLA Procédure NPLM

Influence des relations interne et externe sur le choix des procédures

Dans une situation de proportionnalité liant deux grandeurs, la relation interne est la relation qui lie les valeurs d'une même grandeur (la relation interne n'a pas d'unité). La relation externe est la relation qui lie les valeurs de grandeurs distinctes. Par exemple, dans le problème suivant :

> **Problème 3** : Dans la recette du poulet au citron, il faut 2 citrons pour 5 personnes. Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

La relation interne peut être « × 4 » donnée par le rapport entre les nombres de personnes (elle peut également être « : 4 »). La relation externe peut être « × 2,5 » donnée par le rapport entre le nombre de citrons et le nombre de personnes (elle peut également être « : 2,5 »). Ce coefficient correspond au nombre de personnes par citron (c'est une grandeur quotient).

Comme il est montré dans Levain (1998), si la relation interne est simple, alors la procédure la plus efficace (et la plus naturelle) reposera sur l'utilisation des propriétés additive et/ou multiplicative (PLA/PLM). De même, si la relation externe est simple, alors la procédure la plus efficace (et la plus naturelle) reposera sur l'utilisation du coefficient de proportionnalité (ou le retour à l'unité : PRU). Si aucune relation n'est simple, ou si les deux relations sont simples, alors l'élève devra faire un choix.

Une expérimentation

Les problèmes suivants ont été proposés à des élèves de CM1 qui n'ont pas encore traité la notion de proportionnalité, mais également à des élèves de CM2 et des élèves de 6ème (environ 20 élèves de CM1, 20 élèves de CM2 et 150 élèves de 6ème) qui ont eu un enseignement sur ce thème. La consigne est : « *Voici plusieurs énoncés de problèmes. Certains énoncés ne te permettent pas de trouver la solution. Pour chaque problème, tu préciseras si on peut trouver la réponse et tu expliqueras pourquoi on peut, ou on ne peut pas.* »

Problème 1 : Chez le boulanger, j'ai payé 1 euro et 60 centimes d'euros pour deux baguettes de pain. Quel est le prix à payer pour 6 baguettes ?

Problème 2 : Au cinéma, une place pour enfant coûte 5 euros et une place pour adulte coûte 7 euros. Quel est le prix à payer pour 8 personnes ?

Problème 3 : Dans la recette du poulet au citron, il faut 2 citrons pour 5 personnes. Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Problème 4 : Le train roule à la vitesse moyenne de 120 km par heure. Combien de kilomètres le train parcourt-il en deux heures et demie ?

Problème 5 : Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres. Quelle sera sa taille à 10 ans ?

Problème 6 : Au cours du dernier match, Youri a marqué 3 buts. Combien marquera-t-il de buts en pendant les 5 prochains matchs ?

Problème 7 : Un cycliste se chronomètre sur différentes distances. Il obtient le tableau suivant :

Distance (en kilomètres)	15	30	60
Durée (en minutes)	45	90	210

La durée est-elle proportionnelle à la distance parcourue ?

Nous regroupons les problèmes en deux catégories : ceux qui correspondent à des situations de proportionnalité (problèmes 1, 3 et 4) et ceux qui correspondent à des situations de non-proportionnalité (problèmes 2, 5, 6 et 7). Dans les paragraphes suivants, nous analysons ces problèmes, et enfin nous illustrons les procédures avec des travaux d'élèves.

Analyse des situations de proportionnalité (problèmes 1, 3 et 4)

Problème 1

Problème 1 : Chez le boulanger, j'ai payé 1 euro et 60 centimes d'euros pour deux baguettes de pain. Quel est le prix à payer pour 6 baguettes ?

Ce problème propose une situation dont la proportionnalité est reconnue socialement par fréquentation dans la vie de tous les jours. Le fait de pouvoir acheter les baguettes à l'unité est implicite. Même si la relation interne est simple (passage de 3 à 6 baguettes) et la relation externe plus complexe (0,80 euro la baguette), on peut penser que les procédures PLA/PLM seront prépondérantes. Cependant, le contexte (achat de baguette à l'unité) pourra influencer le choix de procédure PRU. Ainsi, deux procédures qui mènent à un résultat correct seront présentes, même sans avoir de connaissances établies en termes de proportionnalité :

- Si deux baguettes coûtent 1,60 euros, alors une baguette coûte 0,80 euro et 6 baguettes coûtent $6 \times 0{,}80 = 4{,}80$ euros (Procédure PRU).
- Si deux baguettes coûtent 1,60 euros, alors 6 baguettes coûtent $3 \times 1{,}60 = 4{,}80$ euros (Procédure PLM).

Problème 3

<u>Problème 3</u> : Dans la recette du poulet au citron, il faut 2 citrons pour 5 personnes. Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Les recettes de cuisine sont également des situations de proportionnalité reconnues socialement. La relation interne (passage de 5 à 20 personnes) est simple, tandis que la relation externe (2 citrons pour 5 personnes) est complexe.

Ici, le retour à l'unité (PRU) ne semble pas pertinent pour décrire la situation de proportionnalité (1 citron pour 2,5 personnes ou 2/5 de citron par personne…). Ce sont plutôt les relations de linéarité (PLA/PLM) qui seront utilisées pour « justifier » la proportionnalité. Une procédure est clairement attendue :

S'il faut 2 citrons pour 5 personnes. Il faut $4 \times 2 = 8$ citrons pour $4 \times 5 = 20$ personnes (Procédure PLM).

Problème 4

<u>Problème 4</u> : Le train roule à la vitesse moyenne de 120 km par heure. Combien de kilomètres le train parcourt-il en deux heures et demie ?

La relation de proportionnalité est donnée directement par retour à l'unité (120 km en 1 heure) et la question correspond à ce retour à l'unité (en 2,5 heures, combien de km ?).

La relation interne (passage de 1 heure à 2 heures et demie) est complexe, et la relation externe (120 km en 1 heure) peut également être complexe pour de jeunes élèves. Deux procédures ressortent clairement des productions :

- On sait que 2 heures et demie, c'est 2,5 heures, donc $120 \times 2{,}5 = 300$ km (Procédure PRU).
- En une heure 120 km, donc en 2 heures 240 km et en une demi-heure 60 km. Donc au total $240 + 60 = 300$ km (Procédure PLA/PLM).

Lorsque l'on parle de grandeur quotient, il faut distinguer les grandeurs quotients exprimées en moyenne des grandeurs quotients fixes. Dans le problème 4, il faut bien comprendre que le train peut rouler plus ou moins vite, mais, qu'en moyenne, il roule à 120 km/h. Dans une situation de « prix à l'unité » (problème 1 par exemple), il ne s'agit pas d’une moyenne, il s’agit d’une constante. Cette distinction rend la compréhension du problème 4 complexe.

Analyse des situations de non-proportionnalité (problèmes 2, 5, 6 et 7)

Problème 2

> <u>Problème 2</u> : Au cinéma, une place pour enfant coûte 5 euros et une place pour adulte coûte 7 euros. Quel est le prix à payer pour 8 personnes ?

Le prix à payer en fonction du nombre d’enfants est une situation de proportionnalité. Le prix à payer en fonction du nombre d’adultes est également une situation de proportionnalité. Ces situations prises au cas par cas sont reconnues facilement par les élèves comme des situations de multiplication (« Une place coûte 5 euros, combien coûtent 8 places ? »), et nous savons que la multiplication est un cas particulier de situation de proportionnalité (dont un des coefficients est 1 (Levain, 1998)). Par contre, lorsque l’on mélange les deux tarifs (adultes et enfants), la situation ne relève plus de la proportionnalité car les prix unitaires sont différents. Plusieurs procédures sont envisageables pour répondre à la question :

- Les prix unitaires sont différents donc on ne peut pas répondre (ce n’est pas une situation de proportionnalité. Cette réponse est assez improbable chez des élèves (Procédure NPRU).
- On ne peut pas répondre car on ne sait pas combien il y a d’enfants et combien il y a d’adultes (réponse la plus probable et qui fait écho à la réponse précédente mise en « mots simples »). Cette procédure utilise de manière implicite le prix unitaire, donc elle se classe dans la catégorie NPRU.
- On ne peut pas répondre, car s’il y a 3 enfants et 5 adultes ou 4 enfants et 4 adultes, on ne payera pas le même prix (preuve par contre-exemple qu’il ne s’agit pas d’une situation de proportionnalité). Cette réponse, peu probable, pourrait être classée dans la catégorie NPRU.

Les catégories NPLA et NPLM ne semblent pas pertinentes ici.

Problème 5

> <u>Problème 5</u> : Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres. Quelle sera sa taille à 10 ans ?

La taille en fonction de l’âge est reconnue socialement comme une fonction croissante (au moins dans les jeunes âges), cette connaissance est généralement renforcée par des expressions telles que « Plus tu es âgé, plus tu es grand », « Tu grandis avec l’âge », « Qu’est-ce que tu as grandi ! »…). Par contre, cette situation n’est pas une situation de proportionnalité…mais il est assez difficile de le justifier. Pour se faire, les procédures suivantes sont valables :

- Théo devrait mesurer 2,20 m à 10 ans ce qui n’est pas vraiment réalisable, mais 4,40 m à 20 ans, ce n’est plus dans un domaine raisonnable. Cette procédure est de la classe NPLA ou NPLM.

- Plus mathématiquement, taille et âge ne sont pas des grandeurs proportionnelles, car à la naissance (0 an), un bébé ne mesure pas 0 cm. (Procédure NPLM).
- Le retour à l'unité peut également être utilisé pour tenter de justifier (« On ne grandit pas tous les ans de la même mesure », « On ne grandit pas tous les jours pareil »). Procédure de la classe NPRU.

Problème 6

Problème 6 : Au cours du dernier match, Youri a marqué 3 buts. Combien marquera-t-il de buts en pendant les 5 prochains matchs ?

Encore une fois, la situation ne relève pas de la proportionnalité, mais comment l'expliquer ? De plus, le retour à l'unité est induit par l'énoncé (nombre de buts en 1 match). Les justifications attendues sont du type « On ne peut rien dire sur le nombre de buts qu'il marquera dans les autres matchs… », ce qui utilise de manière implicite le retour à l'unité (le nombre de buts par match n'est pas garanti. Ce n'est pas un invariant de la situation). Procédure NPRU.

Bien entendu, comme dans toute situation « concrète », beaucoup d'élèves tenteront d'apporter des justifications « réelles » (ce qui peut déboucher sur des réponses plus ou moins inattendues mais éloignées de l'aspect strictement mathématique).

Problème 7

Problème 7 : Un cycliste se chronomètre sur différentes distances. Il obtient le tableau suivant :

Distance (en kilomètres)	15	30	60
Durée (en minutes)	45	90	210

La durée est-elle proportionnelle à la distance parcourue ?

Cet exercice est un peu différent par la question posée qui fait explicitement référence au modèle proportionnel. L'élève sort du cadre du « bon sens » pour répondre à la question. Il s'agit maintenant de se référer à un cadre théorique rigide. La question fait référence à l'objet mathématique « proportionnalité » alors que, jusqu'à présent, les questions demandaient d'utiliser l'outil « proportionnalité » sans le nommer. Pour répondre correctement à cette question, l'élève doit avoir compris le modèle proportionnel. Dans les classes qui n'avaient pas encore travaillé la proportionnalité, les élèves ont eu recours au dictionnaire pour connaître la signification du mot « proportionnalité ».

La procédure la plus naturelle semble être la suivante :

> L'élève confronte le tableau donné avec le cadre proportionnel, il fait un raisonnement par l'absurde : « Si la situation était de proportionnalité, alors le cycliste devrait parcourir 60 km (= 2 × 30 km) en 180 minutes (= 2 × 90 min) » Procédure NPLM.

Le retour à l'unité est délicat à utiliser dans cet exemple. En effet, dans le cadre d'une distance parcourue pendant une durée donnée, le retour à l'unité exprime généralement la vitesse moyenne. Ici, il s'agirait de comparer les vitesses moyennes des trois couples de données. Les vitesses moyennes sont généralement exprimées en km/h ou m/s mais rarement en km/min. Or, dans le contexte de l'énoncé, c'est cette dernière unité quotient qui est privilégiée. Ceci représente une difficulté supplémentaire, car la vitesse ne s'exprime pas facilement, cela donnerait la procédure suivante :

> La vitesse moyenne vaut (1/3) km/min dans les deux premières colonnes et 6/21 dans la dernière…la comparaison n'est pas simple si on ne sait pas que les fractions 1/3 et 6/21 représentent des nombres différents. Procédure NPRU.

Le second retour à l'unité est plus facile à utiliser dans ce contexte, mais ne représente plus la vitesse moyenne mais le nombre minutes pour parcourir 1 km. Ceci donne :

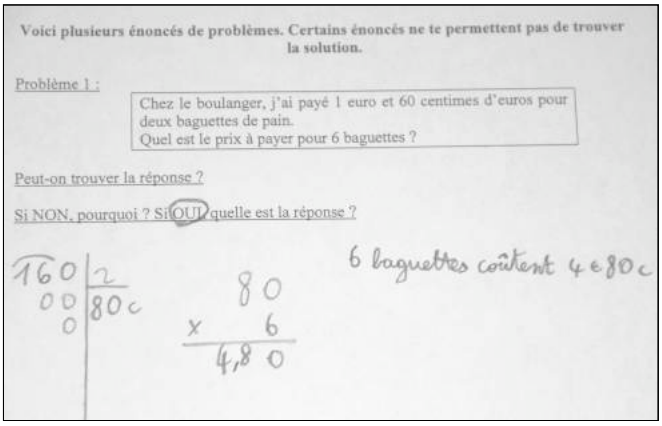
> Dans les deux premières colonnes, le cycliste met en moyenne 3 minutes par kilomètres. De là, deux possibilités s'offrent à l'élève.
>
> - Soit il calcule dans la dernière colonne le nombre de minutes par km : 21 / 6 qui est supérieur à 3 (difficile).
> - Soit il fait un raisonnement par l'absurde : « Si la situation était de proportionnalité, le cycliste mettrait 60 × 3 = 180 minutes pour parcourir 60 km ». Procédure NPRU.

Une autre possibilité est d'utiliser le coefficient de proportionnalité sans le dire, de la manière suivante :

> L'élève utilise le facteur qui fait passer d'une ligne à l'autre (« On fait × 3 pour passer de la première ligne à la deuxième, sauf pour la troisième colonne »). Procédure NPRU.

Quelques illustrations avec des procédures d'élèves

Procédure Proportionnalité Retour à l'Unité (PRU) sur le problème 1



Voici plusieurs énoncés de problèmes. Certains énoncés ne te permettent pas de trouver la solution.

Problème 1 :

Chez le boulanger, j'ai payé 1 euro et 60 centimes d'euros pour deux baguettes de pain.
Quel est le prix à payer pour 6 baguettes ?

Peut-on trouver la réponse ?

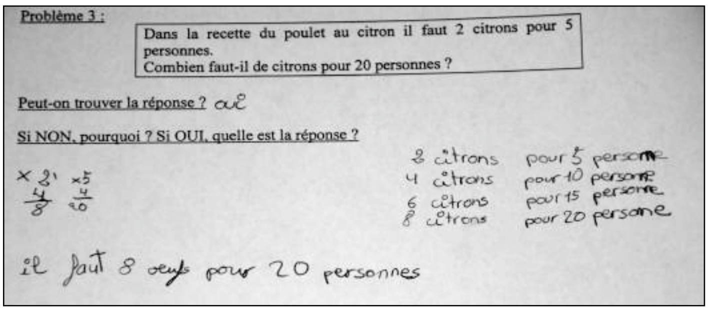
Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

160 | 2
00 | 80c
0

80
× 6
4,80

6 baguettes coûtent 4€80c

Procédure Proportionnalité Linéarité Additif (PLA) sur le problème 3



Problème 3 :

Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes.
Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ? oui

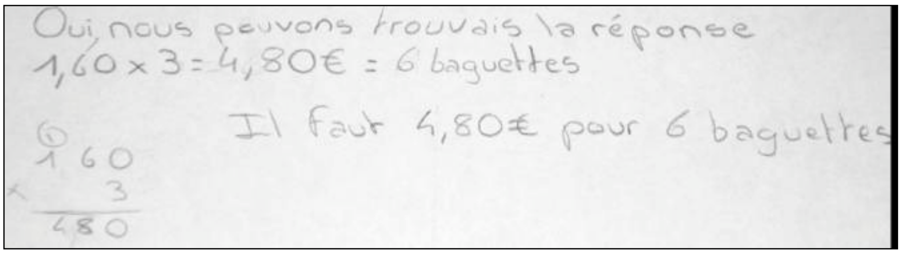
Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

× 2 × 5

2 citrons pour 5 persone
4 citrons pour 10 persone
6 citrons pour 15 persone
8 citrons pour 20 persone

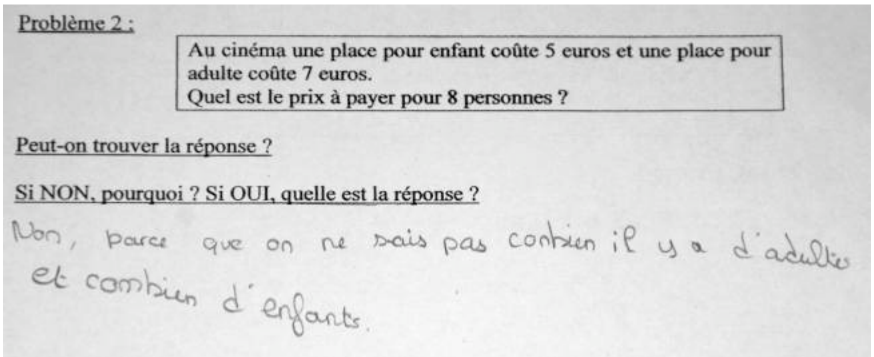
il faut 8 oeufs pour 20 personnes

Procédure Proportionnalité Linéarité Multiplicatif (PLM) sur le problème 1


Oui nous pouvons trouvais la réponse
1,60 x 3 = 4,80€ = 6 baguettes
Il faut 4,80€ pour 6 baguettes

1 60
x 3
480

Procédure Non Proportionnalité Retour à l'Unité (NPRU) pour le problème 2 et le problème 6

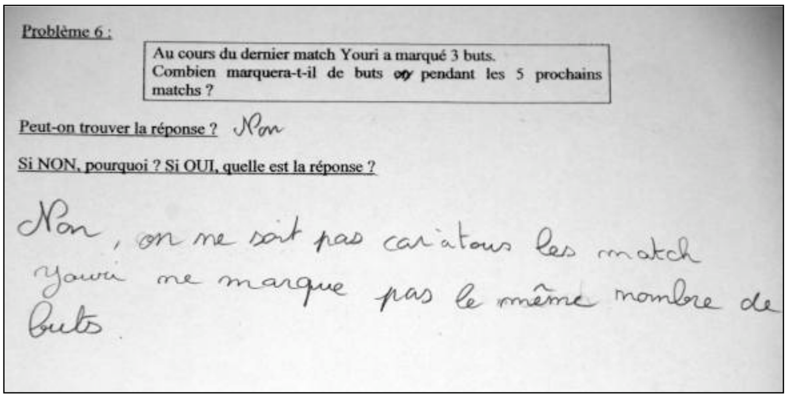

Problème 2 :

Au cinéma une place pour enfant coûte 5 euros et une place pour adulte coûte 7 euros.
Quel est le prix à payer pour 8 personnes ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

Non, parce que on ne sais pas combien il y a d'adultes et combien d'enfants.


Problème 6 :

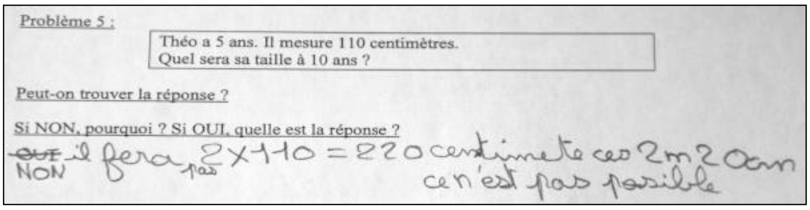
Au cours du dernier match Youri a marqué 3 buts.
Combien marquera-t-il de buts ~~ou~~ pendant les 5 prochains matchs ?

Peut-on trouver la réponse ? Non

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

Non, on ne sait pas car à tous les match Youri ne marque pas le même nombre de buts.

Procédure Non Proportionnalité Linéarité Multiplicatif (NPLM) pour le problème 5[11]


Problème 5 :

Théo a 5 ans. Il mesure 110 centimètres.
Quel sera sa taille à 10 ans ?

Peut-on trouver la réponse ?

Si NON, pourquoi ? Si OUI, quelle est la réponse ?

~~OUI~~ NON il fera pas 2x110 = 220 centimete ceo 2m20cm ce n'est pas possible

Comme nous pouvions le prévoir, la seule procédure que nous n'aurons pas observée dans cette étude est NPLA.

[11] Dans cette réponse, on suppose que l'élève fait le calcul puis confronte son résultat avec la « réalité ». Il conclut alors qu'on ne peut pas répondre, car dans son modèle, la réponse n'est pas vraisemblable.

Conclusion de l’expérimentation

L’objectif de cette expérimentation était d’observer les réactions d’élèves face à des situations de proportionnalité et de non-proportionnalité. Rappelons que les élèves choisis sont issus de classes de CM1, CM2 et 6$^{\text{ème}}$. Certains n’ont jamais entendu parler de proportionnalité en classe et d’autres ont déjà vu cette notion institutionnellement. Les situations proposées font référence à des contextes variés toujours liés à la vie de tous les jours (achat de pain, recette de cuisine, vitesse moyenne, football…). L’expérimentation menée permet de mettre en relief différents constats.

La multiplicité des procédures employées par les élèves (additive aidée au non par un dessin, multiplicative, passage à l’unité, règle de trois, tableau de proportionnalité, coefficient de proportionnalité) prouve que le thème est riche. Les élèves ne focalisent pas sur une procédure, ils adaptent leurs connaissances en fonction de l’énoncé. Les situations classiques (achat, recette de cuisine) ne sont pas forcément évidentes à conceptualiser pour des élèves (beaucoup d’erreurs, y compris en 6$^{\text{ème}}$). Les erreurs sont souvent issues d’un calcul unique (l’élève cherche à résoudre le problème avec une seule opération, mais laquelle choisir ? Et quelles sont les données utiles dans l’énoncé ?). Les réponses accompagnées d’un dessin sont généralement justes. Ceci nous incite à penser qu’une progression sur le thème de la proportionnalité qui donne beaucoup la parole aux élèves pour expliciter leurs procédures, leur « modélisation », tout en schématisant le plus possible peut s’avérer payante pour conceptualiser les situations. Attention, ici, nous parlons de schéma en tant que condensé graphique de l’information contenue dans un énoncé (que ce schéma soit un dessin représentatif ou non de la situation). L’idée serait de donner aux élèves le moyen de se construire des images mentales (de mise en relation des données) lors de la lecture d’un énoncé.

Concernant la reconnaissance de situation de proportionnalité, nous pouvons donner les conclusions suivantes. La consigne de l’expérimentation est « Peut-on répondre à la question posée ? Si oui pourquoi ? Si non pourquoi ? ». Les élèves n’ont pas vraiment répondu à la deuxième question. En effet, lorsque la réponse est « Oui, on peut répondre à la question posée », la justification est absente mais remplacée par le calcul du résultat. Ce qui revient à dire, « Oui, on peut répondre, car on répond ». Il faut alors creuser dans les procédures utilisées pour savoir pourquoi ils peuvent répondre. Ces procédures font appel aux propriétés de la proportionnalité (linéarité et retour à l’unité). Aucun élève ne justifie en disant « Oui, on peut répondre car les grandeurs en jeu sont proportionnelles », alors que beaucoup d’entre eux justifient « Non, on ne peut pas répondre car les grandeurs en jeu ne sont pas proportionnelles ». Dans le problème 7, il est aisé de conclure à la non proportionnalité en mettant en contradiction la troisième colonne du tableau face aux deux premières. Par contre, dans les problèmes 2, 5 et 6, l’élève doit trouver des arguments pour pouvoir conclure à la non proportionnalité. Le contexte « réel » des problèmes 5 et 6 (âge/taille, buts/match) donne lieu à de nombreuses tentatives d’argumentation basées également sur le réel (« On en grandit pas régulièrement », « On ne sait pas si Youri sera en forme et marquera »…). Derrière ces arguments se cache la perception de ce qui fait la proportionnalité, c’est-à-dire une valeur invariante et reproductible (généralement la valeur pour 1). Tout l’enjeu de l’enseignement de la notion de proportionnalité est de révéler cet invariant.

Conclusion et perspectives

La proportionnalité est une notion mathématique centrale pour l'élève de primaire et du collège. Sa maîtrise est indispensable à la compréhension de la société dans laquelle nous évoluons. À ce titre, l'enseignement de cette notion doit être pensé et sans cesse renouvelé. L'apprentissage des techniques correspondant à la proportionnalité (tableau, règle de trois, produit en croix…) n'a de sens que si l'élève sait modéliser, au moins intuitivement, par la proportionnalité. En effet, tout élève peut être très compétent techniquement, mais ne pas savoir quand utiliser ces techniques, ou alors les utiliser à mauvais escient (de nombreux exemples sont donnés dans l'expérimentation relatée). Ainsi, parallèlement à l'apprentissage de techniques, le rôle de l'enseignant est de faire acquérir le sens de la proportionnalité aux élèves. Pour cela, le maître doit confronter ses élèves à des situations de proportionnalité et à des situations de non proportionnalité. Et il doit savoir gérer les débats entre élèves pour justifier si telle ou telle situation relève ou non du modèle proportionnel. Grâce à l'expérimentation réalisée auprès d'élèves de CM1, CM2 et 6ème, nous pouvons voir que les procédures basées sur les propriétés de linéarité (additive puis multiplicative) et le retour à l'unité semblent relativement naturelles. Ceci donne des lignes directrices pour la construction de séquence d'enseignement sur la proportionnalité.

Parallèlement, les élèves doivent utiliser les propriétés de la proportionnalité pour conclure à la non proportionnalité de certaines situations. Ils doivent réussir à utiliser (en acte) les contraposées des propriétés caractéristiques de la proportionnalité (par exemple : « Si la situation est proportionnelle, alors on peut utiliser la propriété multiplicative » est équivalent à sa contraposée « Si on ne peut pas appliquer la propriété multiplicative, alors la situation n'est pas proportionnelle »). Ceci nous permet de catégoriser les procédures attendues des élèves face à des problèmes de proportionnalité ou de non proportionnalité.

En conclusion, la multiplicité des situations proposées est fondamentale. Ces situations sont le lieu privilégié pour débattre en classe de la pertinence et de la pluralité des procédures liées à la proportionnalité. La complexification des procédures due à la complexification des énoncés et aux valeurs numériques choisies fait de la notion de proportionnalité un formidable terrain de jeu pour les enseignants avides de jouer sur les variables didactiques, et c'est une notion particulièrement bien adaptée à la différenciation. Les raisonnements par implication et contraposée permettent de mettre en place, dès l'école élémentaire, des rudiments de logique indispensables à la compréhension des sciences. Pour toutes ces raisons, la proportionnalité mérite un enseignement méticuleux.

Bibliographie

BOISNARD D., HOUDEBINE J., JULO J., KERBOEUF M-P., MERRI M. (1994) *La proportionnalité et ses problèmes*. Hachette.

BROUSSEAU G. (1995) *Les Mathématiques à l'école*. APM.

COMIN E. (2003) Des graines et des souris. *Grand N*, n° 72, 41-73.

COPPE S. (1996) Regards sur la pratique : à propos du vrai ou du faux en séance de mathématiques. *Grand N*, n°60, 33-42.

DUFETEL A. & LACROIX-SONRIER M.T. (1997) *Analyse : cours et exercices résolus*. Vuibert.

ERMEL (2001) *Apprentissages mathématiques en 6ème*. INRP, Hatier.

GILLE E. (2008) Proportionnalité en Seconde … et apprentissage de la citoyenneté. *Bulletin de l'APMEP*, n° 474, 11-19.

HERSANT M. (2005) La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repère IREM*, n°59, 5-41.

HOUDEMENT C. (1999) Le choix des problèmes pour la « résolution de problèmes ». *Grand N*, n°63, 59-76.

HOUDEMENT C. (2003) La résolution de problème en question. *Grand N*, n°71, 7-23.

PFAFF N. (2003) Différencier par les procédures : un exemple pour la proportionnalité au cycle 3. *Grand N*, n°71, 49-59.

PHILIPPE P. & DAUCHY F. (1920) *Cours d'arithmétique*. Dunod.

LEVAIN J-P. (1998) *Faire des maths autrement, Développement cognitif et proportionnalité*. L'Harmattan.

LEVAIN J-P. & VERGNAUD G. (1994) Proportionnalité simple, proportionnalité multiple. *Grand N*, n°56, 55-66.

VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10/2.3, 133-170.

Annexe 1

Équivalence entre propriété additive et propriété multiplicative des fonctions linéaires

Il s'agit de démontrer le théorème suivant :

> Théorème 2 : Soit f une fonction continue. La fonction f vérifie la propriété additive si, et seulement si, elle vérifie la propriété multiplicative.

Soit une fonction f continue vérifiant la propriété additive. À savoir $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x et y.

Alors le théorème 1 implique que la fonction f est linéaire.

Donc il existe un réel a tel que $f(x) = ax$ (pour tout réel x).

Ainsi, pour tous réels x et y, on a $f(xy) = axy = xay = xf(y)$. Ce qui prouve que la fonction f vérifie la propriété multiplicative.

Supposons à présent qu'une fonction f vérifie la propriété multiplicative.

- Première étape : Montrons que $f(0) = 0$.

On a $f(0) = f(0\times 0) = 0\times f(0) = 0$.

- Deuxième étape : Montrons que f vérifie la propriété additive.

Soit (x,y) un couple de réels.

Si x et y sont nuls, alors $f(0+0) = 0 = f(0) + f(0)$.

Supposons que x soit un réel non nul. Soit y un autre réel. On a :

$$f(x+y) = f((1+y/x)\times x) = (1+y/x)f(x) = f(x) + (y/x)f(x) = f(x) + f(y/x\times x) = f(x) + f(y)$$

Ceci prouve la propriété additive.

■