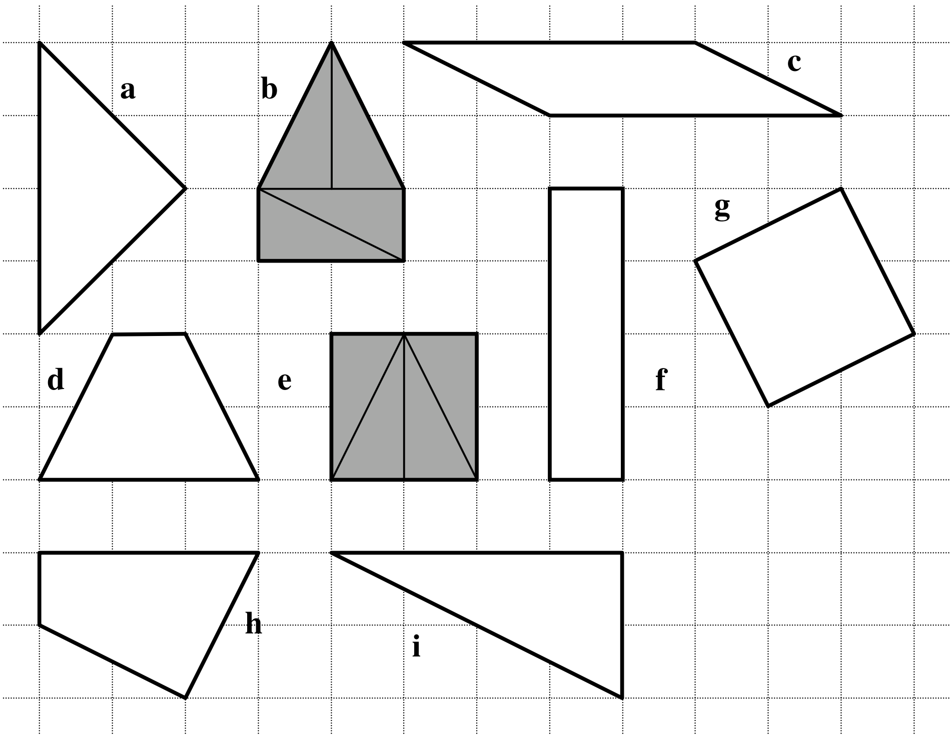
POINT DE DÉPART

PUZZLE DE QUATRE TRIANGLES[1]

Rosalie a de nombreux triangles de carton gris, tous égaux (de même forme et de même grandeur).

Elle essaie de recouvrir entièrement chacune des figures dessinées ci-dessous, en utilisant à chaque fois quatre de ses triangles égaux.

Elle a déjà réussi à recouvrir la « maison » (b) et le carré (e) qui sont en gris et sur lesquels on voit bien les quatre triangles.



Rosalie pourra-t-elle recouvrir chacune des autres figures en utilisant toujours quatre triangles identiques ?

Pour chaque figure :

- si c'est possible, dessinez de façon précise les quatre triangles ;

- si c'est impossible, dites pourquoi ça ne va pas.

Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

[1] Problème de la Finale du 15e Rallye Mathématique Transalpin (2007).

POINT DE DÉPART

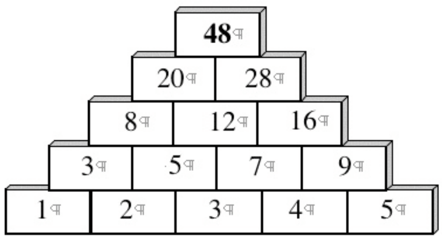
CONCOURS DE PYRAMIDES[2]

Les élèves de la classe font un concours. Ils ont tous reçu le dessin d'une pyramide de briques.

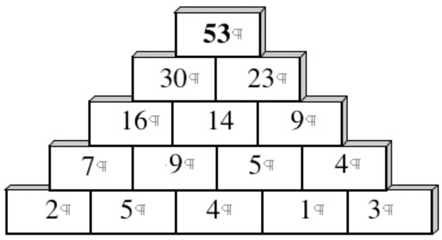
Sur les cinq briques du bas de sa pyramide, chacun doit écrire les nombres de 1 à 5 dans n'importe quel ordre.

Sur chaque brique des autres étages, il faut écrire la somme des nombres des deux briques sur lesquelles elle repose.

Le vainqueur est celui qui obtiendra le nombre le plus élevé au sommet de sa pyramide.



Pyramide de Michel



Pyramide de Béatrice

Michel a ainsi complété sa pyramide et écrit 48 sur le cube du sommet.

Béatrice dit : « J'ai fait mieux que toi, j'arrive à 53 et j'ai aussi respecté les règles du jeu. »

Toto dit : « J'ai gagné ! Avec 54 sur la brique du sommet de ma pyramide, je suis certain que personne d'autre ne pourra faire mieux. »

Toto a-t-il raison ? Expliquez pourquoi.

Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

[2] Activité inspirée d'un problème du 5e Rallye Mathématique Transalpin, première épreuve (1998).

Puzzle de quatre triangles
Concours de Pyramides
premières réflexions

(par François Jaquet)

PUZZLE DE QUATRE TRIANGLES

Ce point de départ peut être proposé dès le CM1. Il permet aux élèves de se familiariser avec un type particulier de triangle, le demi-rectangle de deux carreaux adjacents du quadrillage (1 × 2) et de prendre conscience de ses propriétés : un angle droit, deux côtés (de l'angle droit) dont l'un mesure le double de l'autre, un troisième côté, plus long que le grand côté de l'angle droit. On peut disposer le triangle de manière à ce que ses sommets occupent trois points du quadrillage …

Des élèves peuvent aussi faire appel à la notion d'aire en comparant celle de chaque figure blanche avec celle du carré **e**, par exemple, ce qui permet d'écarter d'emblée certaines figures.

Quelles sont les tâches des élèves pour résoudre ce problème et les savoirs qu'ils devront mettre en œuvre ?

Il y a deux façons tout à fait différentes de procéder :

- soit on imagine les recouvrements des figures blanches par les quatre pièces données sur les deux exemples qu'on dessine directement sur leurs emplacements (procédure par figures géométriques) ;
- soit on découpe les pièces et l'on essaie de les disposer sur les figures dessinées (procédures par manipulations de pièces).

La première procédure est induite naturellement par le texte et la présentation du problème puisqu'il n'y a pas de matériel à disposition.

Les élèves doivent alors imaginer le recouvrement par les quatre triangles, et éventuellement entrevoir le quadrillage qui est caché par les figures pour savoir comment disposer les pièces. En cas de difficultés, ils peuvent penser à découper des pièces et passer à la deuxième procédure par manipulations.

Comme le montre la *Figure 1*, ci-après, le pavage est plus ou moins évident. On peut voir des rectangles formés de deux triangles, comme dans l'exemple du carré, on peut prolonger le quadrillage sur les figures, ...

Les cinq figures **c**, **d**, **f**, **h**, **i** sont recouvrables (par pavage) avec les quatre triangles proposés.

Pour la figure **a**, les angles ne permettent pas le pavage. On peut par exemple placer deux triangles, comme sur le dessin ci-dessous, mais les deux triangles qui restent « n'ont plus la même forme » (ne sont plus rectangles).

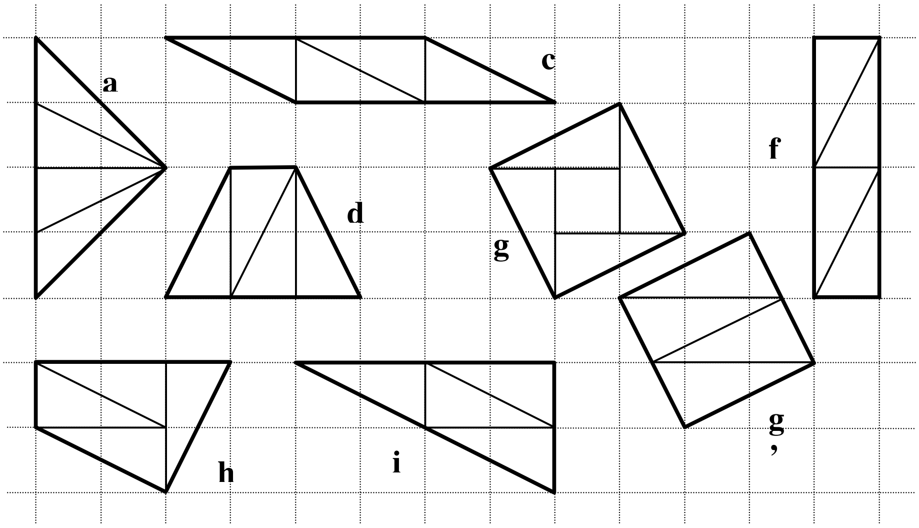


Figure 1

Pour le carré **g**, ce sont les dimensions qui empêchent le pavage. Son aire est 5 (en carrés du quadrillage) et les quatre triangles placés laissent un carré central vide. Les quatre triangles de la figure **g'** « ne sont pas de la même grandeur » que les autres triangles.

Dans les deux cas du triangle **a** et du carré **g**, il faut encore dire pourquoi cela ne marche pas; par exemple que les triangles n'auraient pas la même forme (cas **a**) ou que la figure est plus grande que les autres (cas **g**).

Commentaires sur la pratique de ce point de départ

Dans la conception de ce « Point de départ », il est évident qu'on envisage un travail à conduire pour le renforcement des connaissances sur le triangle, les carrés et rectangles, l'angle droit, la conservation des angles et des distances ainsi que sur la notion d'aire. Il faut donc prévoir des validations, des observations, des explicitations de propriétés des figures en jeu.

Les nombreuses analyses et expérimentations de problèmes analogues du RMT ont montré par exemple que tous les enfants ne différencient pas les mesures de la longueur du rectangle (1×2) de celle de sa diagonale jusque vers 13 à 14 ans parfois. Les grandes difficultés à propos des figures **g** et **g'** ci-dessus sont révélatrices de cet obstacle. Les triangles de **g** sont confondus avec ceux de **g'** jusqu'à un âge fort avancé.

La conservation de l'angle droit ou sa reconnaissance est aussi un enjeu des observations à conduire, par exemple à propos des triangles de la figure a, où deux des quatre triangles ne sont pas rectangles.

La position des triangles joue aussi un rôle important dans leur reconnaissance. Par exemple, dans la figure **h**, trois d'entre eux ont le long côté de l'angle droit horizontal et le quatrième l'a verticalement, ce qui rend l'identification plus difficile.

Les élèves qui se contentent de manipulations ont eu l'idée, puis la tâche, du découpage. Ils peuvent trouver les décompositions plus facilement, malgré la précision relative de leurs pièces. Ils devront toutefois les dessiner précisément selon la demande de l'énoncé et se référer alors au quadrillage, ce qui les contraint à travailler à ce moment au niveau des figures géométriques. On peut certes imaginer de préparer du matériel à la place de l'élève, d'agrandir les figures, de fournir des triangles bien découpés d'une certaine épaisseur pour faciliter les juxtapositions, comme les pièces d'un puzzle. C'est une aide efficace, mais qui risque de déposséder l'élève de sa tâche et de l'empêcher d'atteindre le cadre géométrique où se construisent les différents concepts en jeu. Si les pièces sont très précises, il pourrait même passer à côté de la tâche de dessin des figures, en suivant le bord des pièces avec son crayon.

L'exploitation de l'activité pour la notion d'aire est également envisageable, en particulier en relation avec celle d'unité d'aire. L'aire du rectangle (1 × 2) mesure 2 (en carreaux du quadrillage), celle des triangles, qui sont des demi-rectangles, mesure 1 (carreau). Les aires des figures composées des quatre triangles mesurent 4 (carreaux). C'est évident pour les figures **e** (le carré) et **f** (le rectangle) ; ce l'est moins pour les triangles (**a** et **i**) qui sont des demi rectangles (2 × 4) ; il faut des découpages et recompositions pour transformer les quadrilatères **c**, **d** et **h** en carrés ou rectangles dont l'aire est facile à mesurer. Pour ceux qui n'auraient pas vu la décomposition du carré **g** en quatre triangles et un petit carré central (*Figure 1*), et l'inadéquation de la décomposition du carré **g'**, un calcul permet d'écarter cette figure, à un niveau de maîtrise toutefois plus élevé des opérations sur les aires : une observation attentive du carré **g** permet de constater qu'il est inscrit dans un carré plus grand de (3 × 3) dont l'aire mesure 9 (carreaux), constitué lui-même du carré observé **g** et de quatre triangles d'aire 1 (carreau) qui l'entoure. Par conséquent, on peut calculer l'aire du carré **g** par une « soustraction d'aire », 9 – 4 = 5, exigeant un passage délicat du cadre géométrique au cadre numérique.

Développements possibles

Il y a de très nombreuses développement possibles de cette activité.

- On peut proposer d'autres formes à recouvrir (voir *Figure 2*).

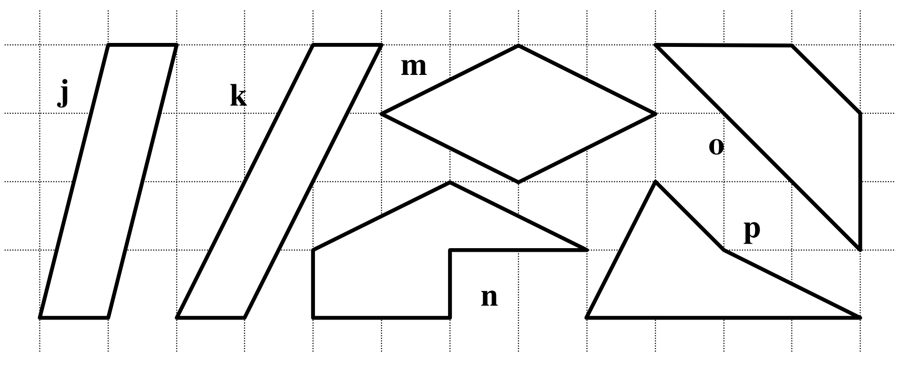


Figure 2 (Les figures **k**, **n**, **m** peuvent être recouvertes avec les quatre triangles, pour **j** et **o** il faudrait d'autres triangles, pour **p**, l'aire est insuffisante.)

- On peut demander de construire par exemples toutes les figures composées de deux de ces triangles, avec un côté commun et de les dessiner sur quadrillage : un rectangle, deux parallélogrammes, deux triangles isocèles et un « cerf-volant » -

dont le dessin de ce dernier posera de sérieux problèmes car il ne suit pas entièrement les traits du quadrillage.

- On peut demander l'inventaire des triangles et quadrilatères convexes formés des quatre pièces.
- On peut chercher les figures de quatre triangles ayant le plus long périmètre.

…

CONCOURS DE PYRAMIDES

Ce point de départ peut être proposé en CM1 et CM2, voire en CE2 si l'on renonce à certaines justifications. Il s'agit d'une activité individuelle sans matériel pour laquelle ne sont nécessaires qu'un crayon et une feuille de papier (quadrillé de préférence pour le dessin des briques).

Quelles sont les tâches des élèves pour résoudre ce problème et les savoirs qu'ils devront mettre en œuvre ?

La phase d'appropriation de la situation est largement facilitée par les deux exemples donnés et, apparemment, la tâche consiste en additions successives pour compléter les pyramides.

Il faut cependant savoir si Toto a raison : a-t-il vraiment pu obtenir 54, et ce nombre est-il le maximum possible ? C'est là que s'esquisse la tâche essentielle et toute la conduite de l'activité.

Il faudra s'apercevoir que, même si l'énoncé le laisse prévoir, c'est le choix des positions des nombres de 1 à 5 dans la base qui va déterminer le nombre du sommet, et qu'il y aura beaucoup de cas à envisager.

Les savoirs nécessaires, au niveau technique de l'addition, sont disponibles dès les premières classes de l'école primaire, les autres qui seront utiles à l'organisation de la recherche sont beaucoup plus délicats à décrire et à observer. Ils ne sont pas spécifiés dans les objets d'étude des programmes officiels et s'inscrivent dans un parcours à long terme vers le développement d'une démarche scientifique. Nous en relevons deux selon un critère d'opportunité :

- Ressentir, expérimenter, tenter de décrire et expliquer l'effet des déplacements des cinq nombres de base, où apparaît l'idée de variation, pour conduire à une réflexion sur certaines propriétés de l'addition (voir le paragraphe *Développements* ci-dessous).
- Organiser des essais de manière rigoureuse, pour éviter les répétitions ou les oublis, où interviendront des raisonnements de type combinatoire.

Commentaires sur la pratique de ce point de départ

L'activité est conçue dans le contexte d'un concours où chacun cherche, individuellement ou éventuellement en binômes, à atteindre un nombre toujours plus élevé au sommet de la pyramide.

Les « records » apparaissant au fur et à mesure de la recherche devront donc être validés. Il semble nécessaire de prévoir à cet effet un dispositif de contrôle.

Lorsque les premières ébauches de stratégies pour la disposition des cinq nombres dans les briques de la base apparaîtront, on peut envisager une mise en commun. On réduira ainsi le nombre d'essais inutiles chez les élèves ou les groupes qui procèdent au hasard.

Le nombre 61 étant atteint, au sommet de la pyramide, on peut le considérer comme le « maximum » obtenu par les essais de la classe mais on peut aussi chercher à l'expliquer, ce qui exige une participation plus active de l'enseignant (voir le paragraphe *Développements* ci-dessous).

Une question plus insidieuse est de savoir si Toto a raison lorsqu'il dit avoir obtenu 54. En se référant aux essais de la classe, on pourra constater que son affirmation n'est pas vérifiée, mais qu'il n'y a pas d'autre moyen de la réfuter que de dresser l'inventaire de toutes les permutations à envisager (voir le paragraphe *Développements* ci-dessous).

L'activité peut donc se dérouler selon de nombreuses modalités, sur des durées différentes, selon les intérêts des élèves. Elle se prête aussi à de nombreuses variantes, en modifiant les questions ou les nombres de base. Pour de très jeunes élève, on peut aussi imaginer une pyramide de quatre étages seulement, qui réduit le nombre des dispositions à 6, avec cinq nombres différents au sommet.

Développements

Justification

Une analyse algébrique du nombre du sommet (s) en fonction de la disposition des nombres de la base (a, b, c, d, e dans l'ordre de gauche à droite) permet d'arriver aux écritures suivantes :

- pour les quatre briques du 2e étage : $a + b$; $b + c$; $c + d$; $d + e$;
- pour les trois briques du 3e étage : $a + 2b + c$; $b + 2c + d$ et $c + 2d + e$
- pour les deux briques du 4e étage : $a + 3b + 3c + d$ et $b + 3c + 3d + e$
- et finalement pour la brique du sommet : $a + 4b + 6c + 4d + e$ où les deux nombres des extrémités a et e sont affectés d'un facteur 1, les deux nombres voisins d'un facteur 4 et le nombre central d'un facteur 6. Les nombres 1 et 2 sont donc à placer dans les briques de l'extrémité, 3 et 4 dans les briques voisines et 5 dans la case centrale pour un total de $1 + (4 \times 3) + (6 \times 5) + (4 \times 4) + 2 = 1 + 12 + 30 + 16 + 2 = 61$.

Pour de jeunes élèves, une analyse arithmétique peut consister à écrire le contenu des briques avec les nombres de la base sans effectuer préalablement les opérations.

Par exemple avec 2 ; 5 ; 4 ; 1 ; 3 dans cet ordre pour la base (Pyramide de Béatrice) :

- au 2e étage, les deux premiers nombres sont 7 et 9, qui sont aussi $2 + 5$ et $5 + 4$;
- au 3e, le 16 de la première brique est $7 + 9$ mais aussi $(2 + 5) + (5 + 4)$ ou $2 + 5 + 5 + 4$;

- au 4^e^ étage : 30 = 2 + 5 + 5 + 4 + 5 + 4 + 4 + 1 et 23 = 5 + 4 + 4 + 1 + 4 + 1 + 1 + 3 ;
- au sommet : 53 = 2 + 5 + 5 + 4 + 5 + 4 + 4 + 1 + 5 + 4 + 4 + 1 + 4 + 1 + 1 + 3.

Il a déjà fallu mettre en œuvre l'associativité de l'addition pour arriver à ces écritures (évidemment sans mentionner ce terme « barbare » ni utiliser forcément les parenthèses). La commutativité permettra de rapprocher les termes égaux, pour constater qu'un des nombres, celui du milieu de la base, se retrouve **six fois** dans la somme, deux autres s'y retrouvent **quatre fois** et les deux nombres des extrémités de la base **une seule fois** :

$$53 = 2 + 5 + 5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3$$

On profitera de cette occasion pour rappeler le lien entre addition et multiplication (distributivité ou factorisation) :

$$53 = 2 + (5 \times 4) + (4 \times 6) + (1 \times 4) + 3$$

Une réflexion commune devrait alors permettre de déterminer la stratégie gagnante du concours : pour atteindre le maximum au sommet de la pyramide, il faut placer le plus grand nombre, 5, au milieu de la base car il sera multiplié par 6, les deux suivants, 3 et 4 sur les briques voisines car ils seront multipliés par 4, les plus petits dans les extrémités car ils resteront les mêmes dans la somme.

<u>L'inventaire des permutations</u>

Il y a 120 = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 dispositions des nombres dans la base. Comme on peut permuter les deux extrêmes (facteur 1) ou leurs deux voisins (facteur 4) sans modifier le nombre du sommet, le nombre des permutations qui entraînent des opérations différentes se limite à 30 = 120 : 4. Mais ce nombre est encore bien grand pour tenter toutes les constructions. C'est une tâche collective.

Nous donnons ci-dessous, dans le *Tableau 1,* l'inventaire des 30 permutations et des 23 nombres différents pour le sommet car, dans 7 cas, deux suites d'opérations aboutissent au même résultat.

1e	2e	3e	4e	5e	
4	2	1	3	5	**35**
4	1	2	3	5	**37**
3	2	1	4	5	**38**
4	1	3	2	5	**39**
3	1	2	4	5	**40**
2	3	1	4	5	**41**
3	2	1	5	4	41
3	1	2	5	4	**43**
2	3	1	5	4	**44**
3	1	4	2	5	44
2	1	3	4	5	**45**
1	3	2	4	5	**46**
2	1	4	3	5	**47**
2	4	1	5	3	47
1	2	3	4	5	**48**

1e	2e	3e	4e	5e	
2	1	3	5	4	48
1	3	2	5	4	**49**
3	1	5	2	4	49
1	2	4	3	5	**50**
1	2	3	5	4	**51**
1	4	2	5	3	**52**
2	1	5	3	4	52
2	1	4	5	3	**53**
1	2	5	3	4	**55**
2	1	5	4	3	55
1	2	4	5	3	**56**
1	4	3	5	2	**57**
1	2	5	4	3	**58**
1	3	4	5	2	**59**
1	3	5	4	2	**61**

Tableau 1 - Les nombres des cinq briques de base, de gauche à droite, et les nombres de la brique supérieure (en gras) lorsqu'ils sont différents, classés dans l'ordre de grandeur croissante.