ETUDE DE MODELES ERRONES
UTILISES PAR LES ELEVES DU 1er CYCLE EN ALGEBRE
UN ESSAI THERAPEUTIQUE

Maryvonne AUBREE
Collège de Combourg

compte rendu du travail d'un groupe de la Régionale APMEP de Rennes
(Régis Gras, Léone Le Freut, Madeleine Michard)

Quelques collègues de la régionale APMEP de Rennes décidèrent de travailler ensemble, sans moyen spécifique, sur des points particuliers de l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle. Nous nous sommes rencontrés régulièrement pendant deux années scolaires (90-81 et 81-82) à raison de quatre après-midi environ par an et nous avons fini par mettre au point ce modeste bilan.

Notre première préoccupation était la suivante : nous intéresser à des erreurs très souvent rencontrées et difficiles à corriger, par exemple :

1. $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+c}$	1′ $\frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{a+b}{c+d}$
2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$	
3. $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	
4. $\lvert a+b \rvert = \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$	
5. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - b^2$	5′ $a^2 - b^2 = (a-b)^2$
6. $(2x)^2 = 2x^2$	
7. $a^2 = 2a$	
8. $a - b \times c = a \times c - b \times c$	
9. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times (a \times c)$ ou $a \times (b \times c) = a \times b + a \times c$	
10. $ax = b$ donc $x = \frac{b}{-a}$ $ax = b$ donc $x = \frac{a}{b}$ $ax = b$ donc $x = b - a$	
11. Par analogie avec : si $A.B = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$, on trouve : si $ax^2 + bx + c = 0$ alors $ax^2 = 0$, $bx = 0$, $c = 0$.	

«petit x» n° 8 pp. 55 à 70. 1985

Nous nous sommes ensuite limités à quelques points de ce tableau. Nous avons choisi de déceler, à partir de 2 contrôles, l'un portant sur la simplification des fractions, l'autre sur le second degré, les erreurs importantes commises par nos élèves. Nous avons voulu, en créant des situations, répertorier les modèles implicites faux utilisés par les élèves. Puis, après avoir mesuré la fréquence avec laquelle on les rencontrait, nous avons essayé d'établir entre eux des liens et d'y apporter des remèdes. Nous remarquons ici une démarche et des objectifs que l'on retrouve dans l'article «Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire de «petit x» n° 5 qui s'intéresse à deux types de difficultés : signification des lettres et compréhension des notations et des conventions.

I – SIMPLIFICATION DES FRACTIONS.

1. Présentation de l'épreuve.

Voici l'épreuve telle qu'elle a été donnée aux élèves de 3 classes (soit 66 élèves) de 3ème au premier trimestre, sans préparation particulière si ce n'est quelques révisions classiques de calcul numérique en début d'année (addition, soustraction, multiplication, division, puissances de nombres rationnels). Cette épreuve reprend, sous plusieurs formes quelquefois, les obstacles relatifs aux fractions évoqués plus haut.

Les expressions suivantes sont-elles irréductibles ?
– Si oui, les recopier dans la colonne de droite sans les modifier.
– Sinon, écrire dans la colonne centrale les calculs de simplification et à droite la fraction simplifiée.

N°	expression à étudier	calculs éventuels	fraction simplifiée
1	$\frac{6+2}{6+4}$		
2	$\frac{2a \times 4}{2}$		
3	$\frac{3+5}{7+5}$		
4	$\frac{4b+20c}{16b+12c}$		
5	$\frac{2+7x}{7x}$		
6	$\frac{4+a}{6+a}$		
7	$\frac{2a+4}{2}$		
8	$\frac{91+1\,259}{91+3\,452}$		
9	$\frac{3(x-1)}{3x}$		
10	$\frac{5+10a}{15-10a}$		

Pour cette épreuve, il nous a semblé important de préciser à l'élève que certaines expressions pouvaient être irréductibles. Nous avons choisi cette présentation en 3 colonnes pour identifier la reconnaissance d'une expression irréductible de la non-réponse à un exercice. Les élèves disposaient d'une demi-heure avec une éventuelle prolongation pour qu'ils parcourent tous toute l'épreuve.

Nous avons choisi des exercices cherchant à révéler les modèles, implicites ou non, que les élèves utilisent dans les simplifications de fractions et nous souhaitions savoir si les erreurs seraient les mêmes dans les expressions numériques ou littérales. Les exercices choisis peuvent évidemment susciter des critiques : aurions-nous obtenu les mêmes réponses en proposant $\frac{4+a}{a+6}$ au lieu de $\frac{4+a}{6+a}$ ou $\frac{3+5}{5+7}$ au lieu de $\frac{3+5}{7+5}$?

N'avons-nous pas mis trop d'éléments dans $\frac{4b+20c}{16b+12c}$?

Ils ont tout de même donné de bonnes indications quant aux mauvaises conceptions de nos élèves.

2. Analyse de l'épreuve.

Pour l'ensemble des 3 classes, cette épreuve nous a semblé peu réussie, peut-être en raison d'une présentation nouvelle, sous forme de tableau où le travail demandé est le même pour tous les exercices, bien que les difficultés rencontrées ne soient pas toutes de même nature.

a) L'analyse des réponses, très variées, suggère que les élèves utilisent essentiellement **3 modèles** (cf. exemples en annexe) :

— **Le modèle (1)**, révélé par les réponses groupées dans le tableau ci-dessous, le plus primitif, est un modèle de suppression analogique où les attracteurs principaux sont la concomitance et la forme.

expressions proposées	**réponses obtenues**
$\frac{3+5}{7+5}$	$\frac{3}{7}$
$\frac{91+1\,259}{91+3\,452}$	$\frac{1\,259}{3\,452}$ ou $\frac{1+1\,259}{1+3\,452}=\frac{1\,260}{3\,453}$
$\frac{4b+20c}{16b+12c}$	$\frac{1+5}{4+3}$ ou $\frac{5}{4+3}$ ou $\frac{24bc}{28bc}$
$\frac{2+7x}{7x}$	$\frac{9x}{7x}=\frac{9}{7}$ ou $\frac{2+7x}{7x}=2$ ou $\frac{2+7x}{7x}=\frac{9}{7}$
$\frac{2a+4}{2}$	$\frac{6a}{2}=3a$ ou $\frac{2a+4}{2}=a+4$ ou $\frac{2a+2\times 2}{2}=2a+2$

Les élèves simplifient, par division (mais aussi parfois par soustraction) les valeurs numériques et par simple suppression ou «gommage» ou encore par contraction les expressions littérales.

Le modèle (1) est renforcé par une recherche obstinée de la forme considérée par l'élève comme la plus simple. Ce «simplificationnisme» correspond à l'utilisation des mathématiques comme outil de réduction. Les opérations de simplication sont instables et liées aux circonstances où le coût de son engagement est le moins fort. Quelquefois elles conduisent à l'usage du modèle (2).

— **Le modèle (2)**, révélé par les réponses groupées dans le tableau ci-dessous :

expressions proposées	réponses obtenues
$\frac{6+2}{4+2}$	$\frac{6}{4}+\frac{2}{2}=\frac{3}{2}+\frac{2}{2}=\frac{5}{2}$
$\frac{4b+20c}{16b+12c}$	$\frac{4b}{16b}+\frac{20c}{12c}=\frac{1}{4}+\frac{5}{3}=\frac{23}{12}$
$\frac{2a+4}{2}$	$\frac{2a}{2}+\frac{4}{2}=a+2$
$\frac{2+7x}{7x}$	$\frac{2}{7x}+\frac{7x}{7x}=\frac{2}{7x}+1$

Le modèle (2) est un modèle linéaire ou d'homomorphisme des lois : «une fraction de sommes est égale à une somme de fractions» soit $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$. Ce modèle peut fonctionner de façon réversible, soit $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}$, mais on l'a plus rarement observé. En faisant agir ce modèle dans les 2 sens, certains élèves ont obtenu la bonne réponse, par exemple : $\frac{4b+20c}{16b+12c}=\frac{4b}{16b}+\frac{20c}{12c}=\frac{b}{4b}+\frac{5c}{3c}=\frac{b+5c}{4b+3c}$.

Il faut noter que ce modèle est efficace et exact dans $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$. Autrement dit, ce modèle (2) inexact peut fonctionner en fournissant des réponses justes à mauvais ou bon titre. Il n'est donc pas étonnant qu'il résiste longtemps.

— **Le modèle (3)** est le modèle exact définitif que chacun connait bien.

Remarque.

Nous avons aussi remarqué, mais assez rarement, l'homomorphisme : «une fraction de produit est un produit de fractions». Cette utilisation est presque toujours associée au modèle (2) et donne $\frac{2a \times 4}{2}=\frac{2a}{2}\times\frac{4}{2}=a\times 2=2a$.

b) **La réussite dans des exercices tels que** $\frac{2a \times 4}{2}$ **ou même** $\frac{3(x-1)}{3x}$ **n'est pas révélatrice d'une bonne maîtrise de la** technique de simplification des fractions car ces bonnes réponses ont pu être obtenues par des élèves qui utilisaient partout ailleurs le modèle (1). Nous n'avons pas d'indice de la procédure utilisée par ces élèves mais nous pouvons penser qu'ils utilisent le modèle (1) et non pas la division par 2 ou par 3.

De même le fonctionnement généralisé en modèle (2), peut donner de bons résultats dans les situations telles que $\frac{2a+4}{2}$; ces bonnes réponses ne sont donc pas suffisantes pour affirmer que la simplification des fractions est acquise par les élèves. Ce qui montre la nécessité de combiner différents types d'exercices pour vérifier l'acquisition d'une notion. Ces exercices doivent être choisis de façon à déséquilibrer les modèles (1) et (2).

Pour certains, la connaissance du modèle (3) est en voie de constitution ; ils réussissent localement dans les exercices $\frac{6+2}{6+4} = \frac{8}{10} = \frac{2 \times 4}{2 \times 5} = \frac{4}{5}$ ou $\frac{3(x-1)}{3x} = \frac{x-1}{x}$ ou même $\frac{2a+4}{2} = \frac{2(a+2)}{2} = a+2$ mais échouent dans $\frac{2+7x}{7x}$ en écrivant $\frac{(2+7)x}{7x} = \frac{9}{7}$ ou dans $\frac{4b+20c}{16b+12c}$ en ne simplifiant pas cette expression. Ils peuvent échouer aussi dans $\frac{91+1\,259}{91+3\,452}$ car la taille des nombres élève la complexité des opérations à faire et en diminue la fiabilité : par suite, la «simplification» radicale semble plus efficace et surtout moins coûteuse. Par exemple, dans une classe, les 4 élèves réussissant l'item 8 sont parmi les 8 élèves ayant réussi les items 1 et 3.

Etant donné les **comportements habituels des élèves** et leurs performances, l'utilisation du modèle (2) n'apparaît pas comme symptôme de difficultés généralisées en mathématiques. Par contre, une utilisation systématique du modèle (1) en est un bon révélateur. Ceci conforte donc notre hypothèse que le modèle (1) soit le plus primitif, alors que le modèle (2), par ses lois stables, serait plus élaboré.

Voici pour les 5 premiers items, la répartition des comportements de réponses des 66 élèves de 3ème.

	modèle 3	modèle 2	modèle 1	divers
1	réponse $\frac{4}{5}$ 46%	réponse $\frac{3}{2}$ 26%	réponse $\frac{1}{2}$ 25%	réponse 0,25 ou 1 3%
2	réponse 4a 90%	réponse 2a 7%		réponse $4a^2$ ou a 3%
3	réponse $\frac{2}{3}$ 44%	réponse $\frac{10}{7}$ 28%	réponse $\frac{3}{7}$ 19%	réponse recopiée sans réduire 9%
4	réponse $\frac{b + 5c}{4b + 3c}$ 22%	réponse $\frac{23}{12}$ 18%	réponse $\frac{6}{7}$ ou $\frac{5}{7}$ 32%	réponse recopiée 19% ou autre 9%
5	réponse recopiée 42%	réponse $\frac{2}{7x} + 1$ ou $\frac{2}{7x}$ 10%	réponse 2 (29%) ou $\frac{9}{7}$ (13%)	non réponse 8%

II – CALCULS FAISANT INTERVENIR LE SECOND DEGRE.

1. Présentation de l'épreuve.

Voici le deuxième test proposé aux mêmes élèves, soit 66 élèves de 3ème, dans pratiquement les mêmes conditions matérielles que le premier et construit encore à partir des obstacles cités dans l'introduction. Nous pouvons dire immédiatement qu'il est mieux réussi dans l'ensemble que le premier.

effectuer les calculs suivants

n°	expressions à transformer	calculs	résultats
1	$(3 + y)^2$		
2	$17^2 - 3^2$		
3	$15^2 + 2^2$		
4	$(2x - 5)^2$		
5	$13^2 + 7^2$		
6	$(x + 0,5)^2$		
7	$(11 + 8)^2$		
8	$14^2 - 4^2$		
9	$(3a + 4a)^2$		
10	$(10\,000 - 1)^2$		

Nous avons donné pour seule consigne : effectuer ; mais nous avons gardé la présentation en 3 colonnes pour voir apparaître la méthode utilisée par l'élève. Le temps imparti à ce test était impérativement une demi-heure pour inciter les élèves à utiliser les méthodes les plus rapides ; mais les nombres choisis étaient peut-être trop simples car, mis à part le dernier exercice, les élèves ont réussi à parcourir tout le test quelle que soit la méthode employée.

2. Analyse de l'épreuve.

L'ensemble des 10 questions est décomposé en 48 modalités de réponses dont 10 correspondent aux réponses justes, les 38 autres étant des modalités erronées.

Le but de l'analyse des réponses des 3 classes constituant un ensemble E, a été d'essayer de découvrir des implications entre les modalités de réponses. A cette fin, Régis Gras, dans sa thèse, considère qu'une modalité «a implique presque une modalité b» si l'ensemble E_a des élèves ayant adopté la modalité a est «presque inclus» dans l'ensemble E_b des élèves ayant adopté la modalité b. Un test statistique associé permet de quantifier cette quasi-implication. Celle-ci est d'autant plus proche de l'implication que l'indice, mesurant les rapports statistiques entre l'effectif faible des élèves la contredisant et les effectifs des élèves E, E_a et E_b, est proche de 1.

L'analyse statistique des réponses des élèves par un micro-ordinateur a conduit à mettre en évidence 3 modèles principaux où les procédures utilisées restent stables d'un exercice à l'autre (cf. exemple en annexe).

— Un modèle M_1 «compensatoire» pour lequel la somme $a^2 + b^2$ est perçue presque systématiquement comme étant égale à $(a + b)(a - b)$. Par exemple

$$15^2 + 2^2 = (15 + 2)(15 - 2) = \dots \quad \text{ou} \quad 13^2 + 7^2 = (13 + 7)(13 - 7) = \dots$$

— Un modèle M_2 «linéaire» pour lequel la somme $a^2 + b^2$ (respectivement $a^2 - b^2$) est perçue presque systématiquement comme étant égale à $(a + b)^2$ (respectivement $(a - b)^2$). Par exemple dans 1 et dans 4 :

$$(3 + y)^2 = 9 + y^2 \quad \text{ou} \quad (2x - 5)^2 = 4x^2 - 25\dots$$

Une procédure M'_2, mutante de M_2, caractérise les comportements des élèves qui, suivant les exercices proposés, utilisent le modèle juste M_3 et, de façon instable, dans d'autres cas, le modèle M_2.

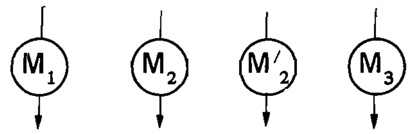
— Le modèle juste M_3 utilisé pratiquement dans tous les exercices.

3. Représentation de l'analyse.

Un graphe traduit à un seul très significatif (5% en général) les implications entre modalités.

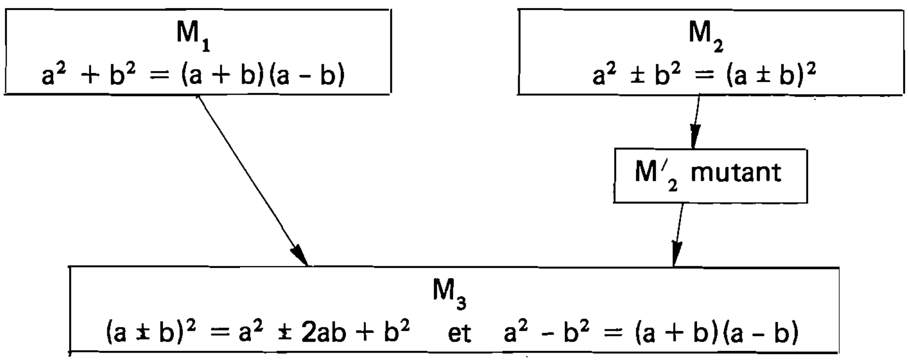
Ce **graphe** est constitué de nœuds représentant les modalités et d'arcs de type $a \curvearrowright b$ signifiant l'implication de a sur b. Il est rendu transitif, par le choix d'un seuil d'implication ; c'est-à-dire que si les arcs $a \curvearrowright b$ et $b \curvearrowright c$ existent, l'arc $a \curvearrowright c$ est sous-entendu.

Comme nous l'indiquerons dans le tableau suivant, là plus grande partie des 48 modalités de réponses dégagées précédemment sont organisables autour des 3 modèles M_1, M_2, M_3 et de la procédure M'_2. Ceux-ci, observés à partir de la structure du graphe, traduisent la bonne stabilité des comportements des élèves, à l'exception de la procédure M'_2. En effet, le graphe apparaît comme la juxtaposition et/ou la hiérarchie de 4 sous-graphes de modalités caractéristiques des modèles et de la procédure selon le chéma ci-dessous



Un même élève peut, bien entendu, utiliser de façon régulière, M_1 ou M_2 (mais jamais M_1 et M_2) et dans certaines circonstances, M_3 (cas plus fréquent que la conjonction M_2 - M_3).

Ceci rend plausible l'hypothèse de la genèse suivante du «bon» modèle M_3.



Répartition des modèles utilisés selon les questions :

numéro de l'exercice	modèle M_1	Modèle M_2	modèle M_3	total expliqué
1		9%	83%	92%
2		9%	88%	97%
3	6%	27%	67%	100%
4		12%	68%	80%
5	3%	26%	71%	100%
6		9%	71%	80%
7		6%	94%	100%
8		8%	88%	96%
9		8%	59%	67%
10		8%	41%	49%

On remarque que dans les 8 premiers exercices, les 3 modèles sont explicatifs de plus de 80% des comportements des élèves ce qui est performant. Par contre, dans les 2 derniers exercices, ils sont moins explicatifs en raison d'erreurs d'autre nature venues se greffer ici, par exemple :

pour le n° 9 : $3a + 4a = 7a^2$
ou $2a$ au lieu de a^2
ou $3a^2$ au lieu de $(3a)^2$

pour le n° 10 : $10\,000^2 = 1\,000\,000$
ou $(a - b)^2 = a^2 + 2ab - b^2$
ou $10\,000 - 1 = 99\,999$

III – AIDES ENVISAGEES.

Un professeur du groupe a donné ces 2 mêmes tests à ses élèves de 3ème l'année suivante. Les résultats ont été meilleurs dans l'ensemble avec moins de réponses aberrantes que l'année précédente. Ce qui nous a amené à penser qu'il ne faut pas se lasser de prévenir les élèves contre ces erreurs qui constituent même de véritables obstacles attracteurs.

1. Aides envisagées contre les erreurs rencontrées dans le 1er test sur les fractions. (Ces exercices n'ont pas été présentés sous forme de tests).

a) Pour faire assimiler et différencier les techniques de l'addition ou de la multiplication des fractions, ne pas se contenter de calculs isolés les uns des autres mais donner en parallèle des calculs faisant intervenir des opérations différentes en utilisant les mêmes nombres.

Par exemple calculer

$\frac{3+5}{3+4}$ et $\frac{3 \times 5}{3 \times 4}$ $\qquad$ $\frac{7+5}{5}$ et $\frac{7 \times 5}{5}$

$\frac{3}{3}+\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{3} \times \frac{5}{4}$ $\qquad$ $\frac{7}{5}+\frac{5}{5}$ et $\frac{7}{5} \times \frac{5}{5}$

$\frac{5}{4}+\frac{5}{3}$ et $\frac{5}{4} \times \frac{5}{3}$ $\qquad$ $\frac{7}{5+5}$ et $\frac{7}{5 \times 5}$

b) Présentation un peu différente de ce type d'exercices sous forme de tableaux à remplir du genre suivant

a	b	c	$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$	$\frac{a+b}{c}$	$\frac{a+b}{c+c}$	$\frac{a}{c} \times \frac{b}{c}$	$\frac{a \times b}{c}$	$\frac{a \times b}{c \times c}$

ou

a	b	c	d	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$	$\frac{a+c}{b+d}$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$	$\frac{a \times c}{b \times d}$

Pour remplir ces tableaux, on a pensé proposer aux élèves la calculette. A ce moment là, ils seraient peut-être moins tentés par des simplifications «réductions» qui deviennent alors inutiles. Par contre, l'utilisation de la calculette devrait les amener à réfléchir sur l'ordre des différentes opérations, les priorités ; cet écueil pourrait être aussi évité par l'utilisation d'organigrammes. Il faut remarquer qu'on a volontairement dépouillé ces exercices de tout support concret momentanément pour se consacrer à l'apprentissage des calculs numériques d'abord, peut-être littéraux ensuite ; mais il serait certainement souhaitable, ponctuellement, de revenir à des exercices concrets (partages) en particulier pour l'assimilation de la technique d'addition des fractions.

2. Aides envisagées contre les erreurs rencontrées dans le 2ème test sur les carrés.

a) Faire remplir les 2 types de tableaux suivants

x	2	3	5	4	-4	0						
x^2							16	9	25	36	64	100

éventuellement plusieurs possibilités

Comparer $(2+3)^2$ et $2^2 + 3^2$...

x	2	3	6	4	-4	-16						
x^2							0,01	100	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}$

éventuellement trouver plusieurs possibilités

Comparer $(2 \times 3)^2$ et $2^2 \times 3^2$...
$0{,}1^2 \times (-10)^2$ et $(-1)^2$
$(-0{,}1)^2 \times (-10)^2$ et 1^2...

b) Utiliser une table de carrés (n, n^2) pour répondre aux questions suivantes :

— Dans la colonne n, choisir 3 nombres a, b, c tels que $a + b = c$.
Comparer $a^2 + b^2$ et c^2, c'est-à-dire $a^2 + b^2$ et $(a+b)^2$.

— Dans la colonne n, choisir 3 nombres a, b, c tels que $a \times b = c$.
Comparer $a^2 \times b^2$ et c^2, c,est-à-dire $a^2 \times b^2$ et $(a \times b)^2$.

— Dans la colonne n^2, choisir 3 nombres a^2, b^2, c^2 tels que $a^2 + b^2 = c^2$.
Comparer $a + b$ et c, c'est-à-dire $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$ et $\sqrt{a^2 + b^2}$.

— Dans la colonne n^2, choisir 3 nombres a^2, b^2, c^2 tels que $a^2 \times b^2 = c^2$.
Comparer $a \times b$ et c, c'est-à-dire $\sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2}$ et $\sqrt{a^2 \times b^2}$.

c) Faire une figure qui met en évidence 2 méthodes pour calculer l'aire d'un carré où la longueur d'un côté est $a + b$. Qu'en déduire ? Dans toute la suite, avec l'unité carreau, x désigne la longueur du côté d'un carré.

— On augmente x de 2 ; trouvez, à l'aide d'une figure, de combien augmente l'aire du carré ?

— On sait que si x augmente de 5, l'aire du carré augmente de 40. A l'aide d'une figure, trouvez une équation que vous résoudrez pour déterminer x.

— On multiplie x par 3. A l'aide d'une figure, trouvez par combien est multipliée l'aire du carré. Hachurez en 2 couleurs différentes $(3x)^2$ et $3x^2$ de façon à établir une relation entre les deux.

IV – CONCLUSIONS.

En comparant les deux champs conceptuels abordés ici, contrairement aux apparences, on s'aperçoit qu'une fonction qui est linéaire comme la fonction «partage en c parties» $(\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} ; \frac{ka}{a} = k . \frac{a}{c})$ est tout autant source d'erreurs qu'une qu'une fonction qui ne l'est pas comme celle du second degré

$$[(a+b)^2 \neq a^2 + b^2 \text{ et } (ka)^2 \neq ka^2].$$

Nos observations mettent en évidence les difficultés importantes rencontrées par les élèves du 1er cycle qui doivent commencer à formaliser leur pensée, difficultés accrues par la tendance qu'ont certains, dans ce genre d'épreuves qui met en jeu des notions diverses plus ou moins lointaines, à désorganiser leurs premiers apprentissages.

Aussi, nous pensons que les types d'exercices cités présentent un grand intérêt didactique car ils sont à la fois analyseurs et révélateurs. Même s'ils amènent les élèves à commettre des erreurs, si importantes soient-elles, pourvu qu'elles soient explicitées et corrigées, c'est sans doute un moyen efficace pour mettre en place le concept sous-jacent. Nous rejoignons ici Piaget qui considère que «les théories fausses des jeunes enfants» ne sont pas à rejeter par les enseignants, bien au contraire, puisqu'elles leur permettent «d'assouplir leurs facultés cognitives, de développer leur aptitude à la construction de théories plus orthodoxes».

REFERENCES.

L. BOOTH, 1984, Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire, petit x n°5, IREM de Grenoble.

R. GRAS, 1979, contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certains objectifs didactiques en mathématiques, thèse Université de Rennes.

Annexe 1.1

3e A Nom [redacted] Prénom [redacted] $\frac{4}{20}$

Les expressions suivantes sont-elles irréductibles ?
— Si oui, les recopier dans la colonne de droite sans modification
— Si non, écrire dans la colonne centrale les calculs de simplification et dans la colonne de droite la fraction simplifiée

Expression à étudier	Calculs éventuels	Fraction simplifiée
$\frac{6+2}{6+4}$	$\frac{6+2}{6+4} = \frac{(2\times3)+2}{(2\times3)+(2\times2)} = \frac{4}{2} = 2$ (1)	$\frac{4}{2}$
$\frac{2a\times4}{2}$	$\frac{2a\times4}{2} = \frac{2a\times2\times2}{2} = \frac{2a\times2}{1} = 4a$ (3)	$\frac{2a\times2}{1}$
$\frac{3+5}{7+5}$	$\frac{3+5}{7+5} = \frac{8}{12} = \frac{2\times2\times2}{2\times2\times3} = \frac{2}{3}$ (3)	$\frac{2}{3}$
$\frac{4b+20c}{16b+12c}$	$\frac{4b+20c}{16b+12c} = \frac{2\times2\times b+2\times2\times5\times c}{2\times2\times2\times2\times b+2\times2\times3\times c} = \frac{5}{4+3} = \frac{5}{7}$ (1)	$\frac{5}{7}$
$\frac{2+7x}{7x}$	$\frac{2+7\times x}{7\times x} = \frac{2}{4}$ (1)	$\frac{2}{4}$
$\frac{4+a}{6+a}$	$\frac{4+a}{6+a} = \frac{4a}{6a} = \frac{2\times2\times a}{2\times3\times a} = \frac{2}{3}$ (1) - (3)	$\frac{2}{3}$
$\frac{2a+4}{2}$	$\frac{2a+4}{2} = \frac{2a+(2\times2)}{2} = \frac{2a+2}{1} = \frac{4a}{1}$ (1) - (1)	$\frac{4a}{1}$
$\frac{91+1259}{91+3452}$	$\frac{13\times7+1259}{13\times7+3452} = \frac{1259}{3452}$ (1)	$\frac{1259}{3452}$
$\frac{3(x-1)}{3x}$	$\frac{3(x-1)}{3x} = \frac{3(1x-1)}{3\times x}$ $\frac{3(x)}{3\times x}$ (1)	$\frac{x}{x}$
$\frac{5+10a}{15-10a}$	$\frac{5+10a}{15-10a} = \frac{5+(2\times5)\times a}{5\times3+(2\times5)\times a} = \frac{1}{3}$ (1)	$\frac{1}{3}$

Modèle (1)

Annexe 1.2

3e A Nom P[redacted] Prénom A[redacted] $\frac{2}{20}$.

Les expressions suivantes sont elles irréductibles ?
— Si oui, les recopier dans la colonne de droite sans modification
— Si non, écrire dans la colonne centrale les calculs de simplification et dans la colonne de droite la fraction simplifiée

Expression à étudier	Calculs éventuels	Fraction simplifiée
$\frac{6+2}{6+4}$	$\frac{6}{6}+\frac{2}{4}=\frac{24}{24}+\frac{12}{24}=\frac{36}{24}=\frac{2\times2\times3\times3}{2\times2\times3\times2}$ (2)-(2)	$\frac{3}{2}$
$\frac{2a\times4}{2}$	$\frac{2a}{2}\times\frac{4}{1}=\frac{8a}{2}=\frac{2\times2\times2\times a}{2\times1}$ (3)	$\frac{4a}{1}=4a$
$\frac{3+5}{7+5}$	$\frac{3}{7}+\frac{5}{5}=\frac{15}{35}+\frac{35}{35}=\frac{50}{35}=\frac{2\times5\times5}{5\times7}=\frac{10}{7}$ (2)-(2)	$\frac{10}{7}$
$\frac{4b+20c}{16b+12c}$	$\frac{4b}{16b}+\frac{20c}{12c}=\frac{(4b\times12c)+(16b\times20c)}{16b\times12c}=\frac{48bc+3200bc}{192bc}$ (2)-(2)	$\frac{324[illegible]}{1926c}$
$\frac{2+7x}{7x}$	$\frac{2}{7x}+\frac{7x}{7x}=\frac{14x}{49x^2}+\frac{49x^2}{49x^2}=\frac{14x}{49x^2}$ (2)-(2)	
$\frac{4+a}{6+a}$	$\frac{4}{6}+\frac{a}{a}=\frac{4a}{6a}+\frac{6a}{6a}=\frac{10a}{6a}=\frac{2\times5\times a}{3\times2\times a}$ (2)-(2)	$\frac{5}{3}$
$\frac{2a+4}{2}$	$\frac{2a}{2}+\frac{4}{2}=\frac{4a}{4}+\frac{8}{4}=\frac{12a}{4}=\frac{3\times2\times2}{2\times2}=\frac{3a}{1}$ (2)-(2)(1)	$3a$
$\frac{91+1259}{91+3452}$	$\frac{91}{91}+\frac{1259}{3452}=$ (2)	
$\frac{3(x-1)}{3x}$	$\frac{3\times(x-1)}{3x\ 3x}=\frac{3x-3}{9x^2}=\frac{x}{9x^2}$ (2)-(1)	$\frac{x}{9x^2}$
$\frac{5+10a}{15-10a}$	$\frac{15a}{5a}=\frac{5\times3\times a}{5\times a}=\frac{3}{1}$ (1)-(8).	3

Modèle (2)

Annexe 2.1

3e A   Nom R[redacted]   Prénom D[redacted] $\frac{8}{20}$

Effectuez les calculs suivants : Modèle M_1

Expressions à transformer	Calculs	Résultats
$(3+y)^2$	Inutile $\cancel{(3+y)(3+y)} = 9+2(3y)+y^2 =$	$9+6y+y^2$ err
17^2-3^2	$(17-3)(17+3) = \cancel{289}$	$\cancel{195}$
15^2+2^2	$\cancel{(15+2)(15+2) = 225 - 30\times 2+4}$	$\cancel{139}$
$(2x-5)^2$	$(2x-5)(2x-5) = 4x^2-10x-10x+25$	$4x^2\ 20x+5$ err
13^2+7^2	$\cancel{(13-7)(13+7) = 169 - 91\times 2+49}$	$\cancel{-13+49=36}$
$(x+0,5)^2$	$(x+0,5)(x+0,5) = x^2+0,5x+0,5x+0,25$	$x^2+1+0,25$ erreur
$(11+8)^2$	Inutile $\cancel{(11+8)(11+8)} = 121+2\times 88+64$	$121+176+64 = ??$
14^2-4^2	faux. $(14-4)(14+4) = \cancel{196} - \underline{56\times 2}+16 = \cancel{196-112+16}$	$\cancel{84+16=100}$
$(3a+4a)^2$	$(3a+4a)(3a+4a) = 9a^2+12a^2\times 2+16a^2$	$9a^2+24a^2+16a^2 = ??$
$(10000-1)^2$	$(10000-1)(10000-1) = 10000^2-10000\times 2+1^2$ Calcule	$10000^2-20000+1^2 = ???$

Annexe 2.2

D[redacted]

$\frac{8}{20}$ Modèle 2

Effectuez les calculs suivants :

Expressions à transformer	Calculs	Résultats
$(3+y)^2$	$3^2 + 2(3y) + y^2 =$	$9+6y+y^2$
$17^2 - 3^2$	$\cancel{14^2} = \cancel{196}$	$\cancel{196}$
15^2+2^2	$\cancel{17^2} = \cancel{289}$	$\cancel{289}$
$(2x-5)^2$	$(2x)^2 - 2(2x \times 5) + 5^2 =$	$4x^2 - 20x + 25$
13^2+7^2	$\cancel{20^2} = \cancel{400}$	$\cancel{400}$
$(x+0,5)^2$	$(x^2 + 2(0,5x) + 0,5^2$	$x^2 + x + 0,25$
$(11+8)^2$	$11^2 + 2(11 \times 8) + 8^2 = 121 + 176 + 64$	$\cancel{356}$
$14^2 - 4^2$	$\cancel{10^2} = \cancel{100}$	$\cancel{100}$
$(3a+4a)^2$	$(3a)^2 + 2(3a \times 4a) + 4a^2 =$	$9a^2 + 24a^2 + 16a^2$ Pas fini.
$(10000-1)^2$	$10000^2 - 2(1000) + (-1)^2 = 99980001$	99980001

Annexe 2.3

3e A Nom [redacted] Prénom [redacted]

13/20.

Effectuez les calculs suivants : Modèle M'2

Expressions à transformer	Calculs	Résultats
$(3+y)^2$	$3^2+2\times3\times y+y^2$	$9+6y+y^2$ ex
17^2-3^2	$(17-3)(17+3)=\cancel{17^2-3^2=289-9}$ 14×20	$\cancel{289-9=280}$ ex
15^2+2^2	$\cancel{(15+2)^2=15^2+2\times15\times2+2^2=225+60+4}$	$\cancel{289}$
$(2x-5)^2$	$(2x)^2-2\times2x\times5+5^2$	$4x^2-20x+25$ ex
13^2+7^2	$\cancel{(13+7)^2=13^2+2\times13\times7+7^2=169+182+49}$	$\cancel{400}$
$(x+0{,}5)^2$	$x^2+2\times x\times0{,}5+0{,}5^2$	x^2+x+1 erreur
$(11+8)^2$	$11^2+2\times11\times8+8^2=121+176+64$	121+1 361 ex
14^2-4^2	$(14+4)(14-4)=\cancel{14^2-4^2=196-16}$ → 18×10 →	180 ex
$(3a+4a)^2$	$(3a)^2+2\times3a\times4a+(4a)^2=9a^2+24a+16a^2$ faux	$\cancel{25a^2+24a}$
$(10000-1)^2$	$(10000)^2+2\times10000\times1+1^2=100000000-20000+1$	99980001 ex