

SUR LES CERCLES QUI SE «FRÔLENT»

Jeannine WEBER-KUBLER
Ecole Normale de Colmar

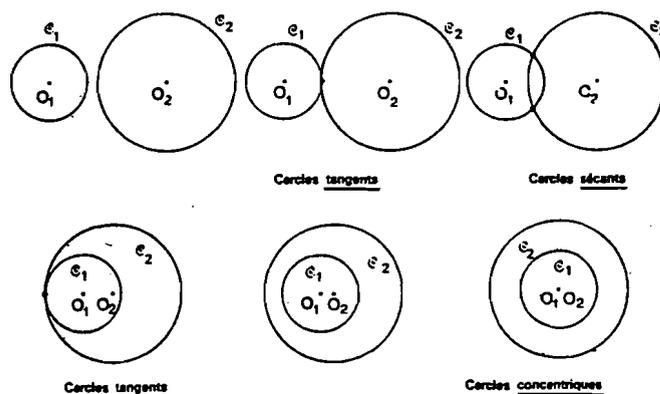
Au cours d'observations de situations de communication orale entre deux élèves de 5ème (ou de 4ème), j'ai été amenée à faire construire un cercle de centre donné tangent extérieurement à un cercle donné. Cette opération comporte à ce niveau quelques difficultés qui méritent d'être signalées.

En fait, la notion de contact figure à peine dans les programmes du premier cycle, et en tous cas, elle ne fait pas particulièrement l'objet d'un enseignement. Par ailleurs, ces idées ne sont pas complètement étrangères aux élèves de cet âge puisqu'ils parlent couramment de cercles qui se touchent, se frôlent, etc.

I – COMMENT CETTE NOTION EST PRESENTÉE AUX ELEVES.

On parle de «tangente à un cercle» en 6ème. La présentation varie avec le manuel.

Dans le livre de l'IREM de Strasbourg, classe de 6ème, les auteurs comparent le nombre de points de contact entre deux cercles : deux cercles tangents sont deux cercles qui ont un seul point commun.



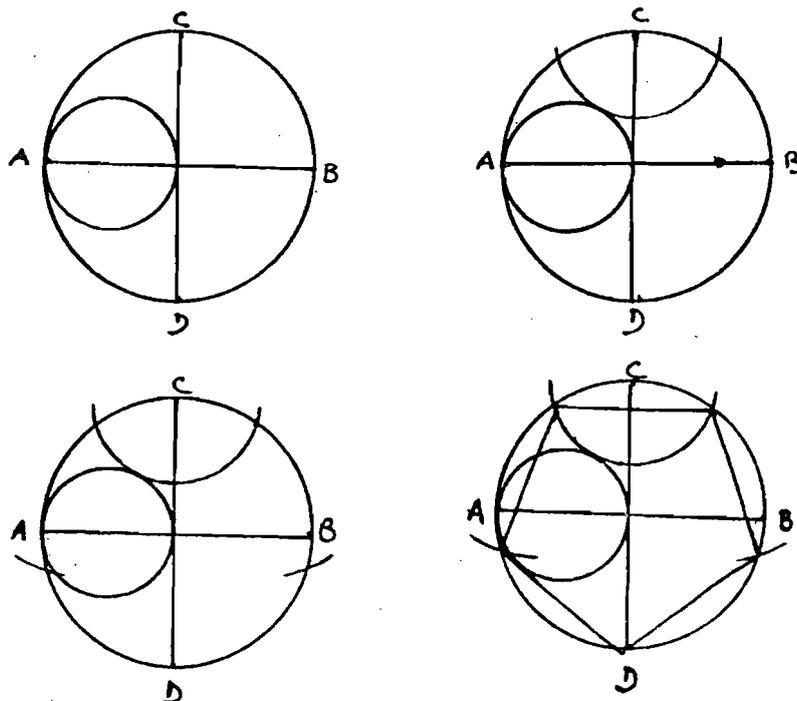
Dans le livre de Monge, 6ème, les auteurs ne parlent pas de cercles tangents. Ils parlent de droite tangente à un cercle et comparent la distance de la droite au centre du cercle. Cette définition est basée sur la convexité : la tangente au point A est la droite dont la distance au centre du cercle est égale au rayon du cercle. Voici les figures correspondantes :



A partir des différentes présentations, voyons comment les élèves se représentent deux cercles tangents.

II – LA NOTION DE «CERCLES TANGENTS» CHEZ LES ELEVES.

Dans notre expérience de communication entre deux élèves (l'émetteur et le récepteur), l'émetteur devait transmettre l'instruction : «trace un cercle de centre C, tangent au cercle de diamètre AO». Cette information s'inscrit dans une suite d'instructions où l'émetteur devait transmettre au récepteur la construction d'un pentagone régulier* (voir figure ci-dessous).



Les différentes étapes de la construction du pentagone régulier.

* Voir à ce sujet Kubler (1984) : «Une étude sur la transmission orale d'informations en mathématiques», «petit x», n°6, pp. 55-76.

Cette information ne précise pas le point de contact entre les deux cercles. Elle laisse également une ambiguïté car il existe deux cercles tangents vérifiant cette condition. Les élèves n'ont jamais pensé à tracer les deux cercles tangents intérieurement.

Les élèves n'ont pas toujours conscience du fait que les deux conditions suivantes sont à remplir pour que deux cercles soient tangents extérieurement :

- les deux cercles ont un point commun et un seul ;
- l'intersection des intérieurs des disques ouverts est vide.

Ils expliquent à leur manière, l'expression «cercles tangents».

Nous essayons de voir à quelles notions peuvent se rattacher les explications variées fournies par les élèves.

Exemples de type 1.

Dans ces exemples, les élèves précisent qu'il y a contact. Ils indiquent la nature du contact par l'emploi de verbes tels que «toucher», «coller», «frôler», en opposition au verbe «couper» qui est employé intuitivement dans le sens de contact transversal. Voici quelques exemples :

- «tu fais un rond, ça fait deux cercles qui se collent» ;
- «tu fais un cercle de manière à ce qu'il vienne frôler le petit cercle que tu as fait».

Le contact entre les deux cercles ne leur paraît pas quelconque. Pour eux, les deux cercles se touchent en un endroit infiniment petit mais ils ne précisent pas que ce contact se fait en un seul point.

Exemples de type 2.

Dans ces discours, l'émetteur utilise l'opposition entre transversalité et tangence.

Exemple 1.

J – «Maintenant tu vas tracer un autre cercle qui aura pour centre le point C et sera tangent au cercle que tu viens de tracer.

P – Qu'est-ce que c'est tangent ?

J – Qui colle.

P – Ah, oui ! D'accord.

J – Mais qui ne doivent pas se couper en deux points. Ils se touchent juste. Ils doivent se toucher. Ils n'ont pas le droit de se couper en deux points».

Exemple 2.

A – «Puis après, tu traces un cercle de centre C tangent au cercle de diamètre AO.

C – C'est quoi tangent ?

A – Qui touche mais sans couper».

Ces élèves font une différence essentielle entre les verbes «toucher», «coller», d'une part et «couper» d'autre part.

Exemples de type 3.

Certains élèves utilisent aussi la convexité des disques. Ils parlent de bord et d'intérieur.

Exemple 1.

D – «Tu mets ta pointe de compas sur C et tu fais que celui que tu vas faire là touche celui que tu viens de faire avant. T'as compris ?

E – Non.

D – Juste touche, pas qu'ils se rentrent à l'intérieur, mais qui touche juste le bord...».

Exemple 2.

R – «Alors, tu mets ton compas sur le point C... et avec l'extrémité du compas, celle qui écrit, et ben, tu la mets sur le... sur le cercle.

C – A l'intérieur du cercle ?

R – Non, sur le bord... le rayon du point C jusqu'au bord de l'autre cercle...».

Par rapport aux discours précédents, ces élèves utilisent également la seconde propriété : «l'intersection de leurs intérieurs est vide». Ils précisent : «toucher le bord», «toucher le bord le plus près du point C» qui utilise également le minimum de distance.

Exemples de type 4.

On peut éviter de parler de cercles tangents quand on détermine le point de contact entre les deux cercles. Un discours très différent en résulte comme le montre l'exemple suivant : la notion de «tangent» est remplacée par la notion de ligne de construction auxiliaire.

M – «Bon, alors tu prends le... point C et le milieu de cercle, enfin le point O, l'autre, le petit cercle là, le milieu... Tu traces un trait assez fin.

G – Entre C et le milieu ?

M – Entre C et le point. Voilà... Assez fin, le trait.

G – D'accord.

M – Et puis, et le point qui situe, qui passe sur la droite et le cercle, le point du cercle, du petit cercle.

G – Qui coupe ?

M – Voilà, qui coupe la droite, qui coupe. Tu mets un point là.

G – D'accord, ça y est.

M – Bon, tu mets la pointe sur le point C.

G – D'accord.

M – Et qui va au point que tu viens de faire là... Voilà, et tu traces autour.

G – Ça y est. Vas-y.

Quand ils disent «milieu», ils pensent «centre».

Remarque 1 : sur l'acquisition du mot «tangent».

Quand le maître a employé le mot «tangent», les élèves le reprennent mais l'explicitent à leur manière. Près des deux tiers des élèves ne connaissent pas ce mot. Les élèves ne l'utilisent jamais spontanément. Certains élèves mélangent «la tangente au cercle» et «deux cercles tangents», comme le montre le discours suivant :

R – «Tu traces la tangente à un cercle... euh, la tangente, la tangente, la tangente du point... C.

W – Ah.

R – Avec le centre.

W – C, donc C est le centre de la tangente ?

R – Oui.

W – D'accord».

William trace le cercle tangent et non pas la tangente.

Remarque 2.

Les élèves ont conscience que le contact entre les deux cercles tangents n'est pas quelconque. Ils ont cependant tendance à croire que lorsque deux courbes sont tangentes, elles n'ont pas nécessairement qu'un seul point commun. Ils ne parlent jamais de point mais de bord, d'endroit. Pour eux, la notion n'est pas liée à un point mais à un ensemble. Ils ont l'intuition de la notion de voisinage car ils ont conscience que cet ensemble est très petit. Ils confondent l'endroit où les cercles sont infiniment proches l'un de l'autre et le point où ils se rencontrent. Ils ne disent jamais que deux cercles se touchent en un point. A plus forte raison, aucun d'entre eux n'a conscience que ce point est facile à obtenir comme intersection du cercle de diamètre AO du segment qui joint les centres des deux cercles.

CONCLUSION.

Ces observations nous donnent à réfléchir sur ce qui se passe lorsqu'on fait confiance aux connaissances spontanées que les élèves peuvent avoir. Dans le cas de

la notion de «contact», il est bien vrai que les élèves ont une certaine connaissance spontanée. Celle-ci leur permet de faire une figure mais elle s'avèrerait trop incomplète et trop imprécise s'il s'agissait de raisonner. A travers tous ces discours apparaît plutôt la notion de contact physique qui est un endroit (et non un point) avec une certaine épaisseur.