

AIRES DE SURFACES PLANES

(2ème partie)

I.R.E.M. de Paris sud

Régine DOUADY
Marie-Jeanne PERRIN

Le présent article fait suite à un autre de même titre paru dans «petit x» n°6 de décembre 1984.

Dans la première partie, nous avons exposé les principes qui nous ont servi de base pour la construction des séquences d'apprentissage: Nous avons décrit les séquences relatives à l'approche du concept d'aire indépendamment de sa mesure, nous avons abordé la mesure des aires par le pavage et dégagé la notion d'unité d'aire.

Notre propos dans la deuxième partie, est de donner du sens à la mesure de l'aire d'une surface à l'aide d'une unité donnée, même si on ne sait pas paver effectivement la surface. Nous aborderons en particulier le calcul sur les aires dans le cas du rectangle et d'autres surfaces usuelles et l'encadrement d'une surface quelconque par des surfaces dont on sait calculer l'aire avec l'unité donnée.

I – ETUDE DE L'AIRES DE 1 cm².

Les élèves ont déjà utilisé à plusieurs reprises l'aire d'un carré de 1cm de côté comme unité d'aire. Il s'agit maintenant d'introduire l'expression «centimètre carré» et la notation cm². Cette notation a un gros inconvénient pour les élèves : elle ne les aide pas à distinguer unité d'aire et unité de longueur et les induit à retomber dans l'ornière qui consiste à traiter par les longueurs un problème où il s'agit d'aires.

L'objectif de cette leçon est d'attacher le cm² à une aire et non à la figure carrée de 1cm de côté, et, donc, entre autres, de distinguer le cm² du cm : «1 centimètre carré» est souvent entendu par les enfants comme «un carré de 1 centimètre de côté» et dans cette logique, «1/2 centimètre carré» est compris comme «un carré de 1/2 centimètre de côté» ; et cela ne contredit pas toujours, pour les élèves, le fait qu'il y ait 4 X «1/2 centimètre carré» dans «1 centimètre carré».

Organisation.

Elèves par équipe de deux.

Matériel.

Papier quadrillé au $\frac{1}{2}$ cm (papier à petits carreaux du commerce).

Consignes.

1. Colorier chacun 3 ou 4 surfaces différentes d'aire 1 cm^2 (dont au moins un triangle).

2. Partager l'une de ces surfaces en 2 pièces de même aire ; partager une autre de ces surfaces en 4 pièces de même aire.

Quelle est l'aire de chacune de ces pièces ?

3. Colorier 3 ou 4 surfaces différentes d'aire $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$ (dont au moins un triangle).

4. Colorier 3 ou 4 surfaces différentes d'aire $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$ (dont au moins un triangle).

5. Colorier des surfaces différentes d'aire 12 cm^2 (dont au moins trois rectangles).

Des comportements attendus.

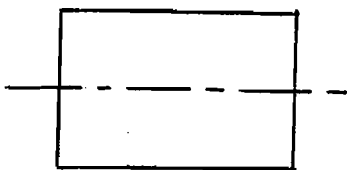
Les élèves peuvent répondre à toutes les questions en comptant les carreaux du quadrillage, ou en coupant des carreaux en 2 (pour fabriquer des triangles). Pour la consigne 5, on peut attendre au moins tous les rectangles ayant pour dimensions un nombre entier de fois $\frac{1}{2}$ cm.

Bilan.

– On peut dessiner beaucoup de surfaces d'aire 1 cm^2 .
 – Une surface d'aire 1 cm^2 contient 2 surfaces d'aire $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$ et quatre surfaces d'aire $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$.

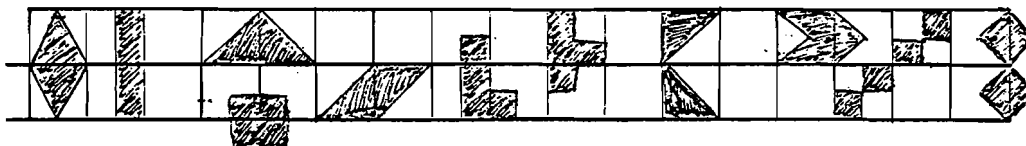
– Un carré de côté $\frac{1}{2}$ cm a pour aire $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$.

– On peut fabriquer beaucoup de rectangles d'aire 12 cm^2 , avec par exemple le procédé de fabrication suivant : couper en deux, remettre au bout.



Remarques sur le comportement des élèves.

Dans une classe de CM₂, en réponse à la 1ère consigne, sur papier quadrillé au cm, les élèves ont fourni des productions variées dont voici quelques exemples :



Par la suite, quelques élèves ont cependant interprété «un carré de côté $\frac{1}{2}$ cm» comme « $\frac{1}{2}$ centimètre carré». C'est pourquoi nous avons ici ajouté les consignes 2, 3, 4.

II – AIRE DU RECTANGLE.

L'objectif de cette phase est de restructurer des connaissances anciennes sur le comptage de carreaux à l'intérieur d'un rectangle en termes de mesure d'aire et de prendre en compte la bidimensionnalité de l'aire dans le cas du rectangle.

2.1 Quelques prérequis à contrôler.

a) L'aire est invariante par déplacement. En particulier le nombre de carreaux nécessaires pour paver un rectangle dessiné sur papier quadrillé ne dépend pas de la position du rectangle sur le papier.

L'aire est invariante par découpage et recollement convenable (c'est-à-dire sans perte ni chevauchement des morceaux).

b) Si on a un petit rectangle de dimensions u, v et un grand rectangle de dimension $a = nu, b = pv$, l'aire du grand rectangle vaut $n p$ fois l'aire du petit. Autrement dit, la mesure de l'aire du grand est $n p$ quand on prend l'aire du petit comme unité d'aire.

Dans le cas particulier où $u = v$, si les dimensions du rectangle sont mesurées avec l'unité u , et si l'aire est mesurée en prenant comme unité l'aire du carré de côté u , la mesure de l'aire du rectangle est le produit des mesures des dimensions.

c) Plus généralement

Si on multiplie une des dimensions d'un rectangle par un nombre n et l'autre par un nombre p , l'aire est multipliée par $n p$.

Si on multiplie les deux dimensions d'un rectangle par un nombre n , l'aire est multipliée par n^2 .

On peut prendre pour n des entiers ou des inverses d'entiers. Il faudra étendre ces propriétés aux nombres non entiers par la suite.

Voici quelques activités visant à contrôler des connaissances anciennes ou à les compléter.

Activité 1.

Organisation.

Travail individuel.

Matériel.

Feuille quadrillée sur laquelle le maître a dessiné un rectangle suivant les lignes du quadrillage et des traits en diverses positions sur la feuille, de longueur l'une des dimensions du rectangle.

Consigne.

Construire sur la feuille des rectangles dont l'un des côtés est l'un des traits dessinés et ayant la même aire que le rectangle donné. A chaque trait correspond un rectangle.

Bilan.

En déplaçant un rectangle de n'importe quelle façon, par exemple en le faisant tourner autour d'un point ou en le faisant glisser le long d'un rail, on obtient un rectangle superposable. En particulier, les dimensions et l'aire sont conservées. Le nombre de carreaux nécessaires pour paver le rectangle n'a pas changé.

Activité 2.

Organisation de la classe.

Les élèves travaillent par deux : émetteur, récepteur. Chacun est à la fois émetteur d'un message et récepteur d'un message venant d'un autre camarade. Ils disposent de papier blanc (non quadrillé) et de 3 ou 4 rectangles photocopiés (par exemple 2 cm sur 5 cm ; 3 cm sur 4 cm ; 1 cm sur 2 cm).

Consigne.

Chacun de vous choisit un de ces petits rectangles et dessine un autre rectangle pavable à l'aide du rectangle choisi. Il écrit ensuite un message sans dessin à un camarade pour que le récepteur puisse dessiner le même rectangle (c'est-à-dire superposable). Le récepteur pave à son tour le rectangle trouvé avec le carrelage de son choix. Ensuite émetteur et récepteur comparent leurs rectangles et le nombre de pièces utilisées pour paver.

Dans un deuxième temps, on pose la question suivante : Etait-il possible de paver avec d'autres carreaux ? Si oui lesquels ? Si non pourquoi ?

Analyse de la tâche.

a) Emetteur.

L'émetteur doit d'abord dessiner son rectangle. Pour qu'il soit pavable à l'aide du rectangle élémentaire choisi, le plus simple est de reporter un nombre entier de fois la longueur et un nombre entier de fois la largeur (ou encore de prendre des dimensions multiples de celles du rectangle élémentaire choisi).

Pour rédiger son message, l'émetteur doit décrire le rectangle qu'il a dessiné. Pour cela, il peut :

- soit donner ses dimensions en cm ;
- soit décrire la construction à partir du rectangle élémentaire choisi : nombre de reprints de la longueur, nombre de reprints de la largeur. Dans ce cas, il doit aussi décrire le rectangle élémentaire choisi. Comme on n'a pas droit aux dessins et qu'aucun codage n'a été établi, l'émetteur peut décrire le rectangle élémentaire choisi en donnant ses dimensions en cm ou en utilisant des périphrases : «le petit, le moyen, le grand» (Désignation ambiguë en ce qui concerne les rectangles (2,5) et (3,4)). Le codage par un couple est bien adapté. Remarquons que si l'enseignant a donné un nom aux rectangles élémentaires, il est probable que c'est cette désignation que les élèves utiliseront dans les messages.

b) Récepteur.

Si le message est correct, la construction du rectangle ne doit pas poser de problèmes.

Si le message est descriptif de la construction (et correct), le pavage choisi par l'émetteur se déduit de la construction. Le récepteur peut choisir le même pavage ; il doit alors utiliser le même nombre de pièces que l'émetteur. Il peut aussi chercher un autre pavage.

Si le message donne les dimensions du rectangle, le récepteur doit d'abord déterminer le (ou les) rectangle(s) élémentaire(s) qui permet(tent) de paver et réaliser le pavage ou prévoir le nombre de carreaux par le calcul.

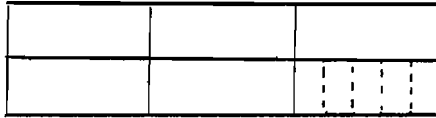
Remarque : le rectangle (1,2) devrait toujours convenir avec les rectangles élémentaires choisis ici.

c) Confrontation.

Emetteur et récepteur doivent avoir des rectangles superposables. Mais le nombre de carreaux utilisés pour paver peut être différent. Ils doivent alors faire la relation entre les nombres trouvés et les carreaux utilisés. Par exemple, si l'émetteur a utilisé n carreaux (3,4), le récepteur p carreaux (1,2), on doit avoir $p = n \times 6$.



Il se peut également que l'émetteur ait utilisé le carreau (3,4) et le récepteur le carreau (2,5). Par exemple pour le rectangle (4,15), il faut 5 carreaux (3,4) ou 6 carreaux (2,5).



La vérification peut alors se faire en utilisant le carreau (1,2) : dans un rectangle (2,5), on met 5 rectangles (1,2), dans un rectangle (3,4), on met 6 rectangles (1,2) ; on trouve finalement le même nombre de carreaux (1,2).

De tels exemples peuvent faire l'objet d'exercices après le bilan.

Activité 3.

Les élèves travaillent par équipes de 2. Ils disposent de papier quadrillé et de 2 dés. Désignons par u et v les dimensions de la maille du quadrillage.

Consigne.

L'équipe dessine un rectangle R de dimensions (au, bv) sur le papier quadrillé et mesure l'aire $A(R)$ en prenant comme unité l'aire r de la maille du quadrillage, autrement dit l'équipe compte le nombre de carreaux à l'intérieur du rectangle.

E_1 lance les dés, il obtient deux nombres n_1 et n_2 , et il doit prévoir le nombre de carreaux que contiendra le rectangle de dimensions $(n_1 \times a) \cdot u, (n_2 \times b) \cdot v$.

E_2 dessine le rectangle et vérifie la prévision de E_1 . Si la prévision est juste, E_1 marque 1 point.

On échange les rôles. On joue 5 coups chacun.

2.2 Variation de l'aire d'un rectangle en fonction d'une dimension, l'autre étant fixée.

Objectifs.

- Calcul de l'aire d'un rectangle dans le cas de mesures non entières pour les dimensions.
- Quand une dimension est fixe, l'aire du rectangle est proportionnelle à l'autre dimension.

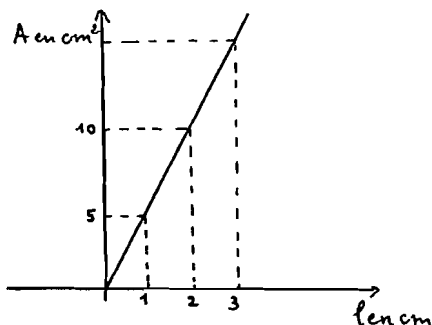
a) Analyse du problème.

Quand une dimension est fixée, ℓ' par exemple, on peut exprimer la variation de l'aire A du rectangle de dimensions (ℓ, ℓ') en fonction de la dimension variable, ℓ . Pour une unité de longueur choisie u (par exemple cm) et l'unité d'aire c adaptée à u (l'aire d'un carré de dimension u — par exemple cm^2), la relation en termes de grandeurs reçoit une traduction en termes de nombres.

grandeurs	u fixé c fixé	nombres
ℓ' fixée $\ell' = au$ par exemple $\ell' = 5 \text{ cm}$ à chaque longueur ℓ on associe l'aire A du rectangle de dimension (ℓ, ℓ')		a fixé par exemple $a = 5$ à la mesure de ℓ en u , on associe la mesure de A en c
$\ell \xrightarrow{f} A \quad f(\ell) = A$ $\ell = nu \quad A = (a \times n)c$ $f(nu) = (a \times n)c$		$n \xrightarrow{fu} a \times n \quad fu(n) = a \times n$ par exemple $n \mapsto 5 \times n$ $f_{\text{cm}}(n) = 5 \times n$
Par exemple $A = (5 \times n)\text{cm}^2$ $f(\text{ncm}) = (5 \times n)\text{cm}^2$		

L'aire A est proportionnelle à la dimension variable ℓ . Sur les nombres, cela veut dire que l'application fu qui, à la mesure de ℓ associe la mesure de A est une application linéaire. Cette propriété est reconnue et utilisée par les enfants au moins dans le cas où les mesures en jeu sont entières. Il reste à exploiter la correspondance qu'on vient d'établir entre la proportionnalité en termes de grandeurs d'une part, en termes de nombres d'autre part, pour étendre le domaine de validité de la relation de proportionnalité, autrement dit le champ des nombres sur lequel les élèves utilisent la fonction linéaire, et ainsi étendre la multiplication à des nombres non entiers.

Nous pensons poser le problème dans le cadre de la représentation graphique en prenant u comme unité de longueur et c comme unité d'aire (par exemple cm et cm^2) pour représenter $f : \ell \mapsto A$.



Un point de la représentation a deux coordonnées :

- l'abscisse x désigne la mesure de ℓ en u ;
- l'ordonnée y désigne la mesure en c de A .

Le fait que ℓ' soit fixe se traduit sur le graphique par un alignement des points de coordonnées $(x, y) = (\text{mes}_u \ell, \text{mes}_c A)$. La question est de savoir si les points de coordonnées (x, y) alignés avec les précédents mais avec x non entier correspondent à des rectangles de la famille et, réciproquement, si tous les rectangles de la famille sont représentés par des points alignés avec les précédents. La réponse viendra partiellement de l'expérience.

Si on laisse aux élèves le choix de la dimension variable, ils peuvent eux-mêmes introduire des valeurs numériques non entières (demis, quarts, nombres décimaux qu'ils connaissent), mais ils n'y sont pas obligés. L'enseignant peut provoquer le calcul sur de tels nombres en choisissant pour a une valeur non entière mais connue des élèves. Le choix de a est une variable de la situation sur laquelle l'enseignant peut agir.

b) Organisation de la classe et consigne.

Les élèves sont par équipes de quatre. On donne à chaque équipe une valeur de a .

Exemples :

$$a = 5, a = 7, a = 3 + \frac{1}{2}, a = 8 + \frac{1}{2}, a = 2 + \frac{3}{4}, a = 4 + \frac{6}{10} \dots$$

Les fractions peuvent être écrites sous forme décimale selon le type d'écriture familier aux élèves.

Consigne.

Dans chaque équipe, vous allez vous partager le travail. Chacun dessine 4 ou 5 rectangles différents dont une des dimensions mesure en cm la valeur qu'on vous a donnée. Tous les rectangles de l'équipe doivent être différents. Pour chacun de ces rectangles, vous calculez l'aire en cm^2 . Vous organisez les résultats dans un tableau.

c) Analyse de la tâche.

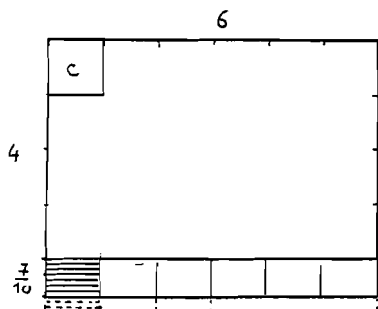
Nous présentons cette analyse en exploitant l'écriture fractionnaire de a . Cette analyse est à adapter si a est écrit sous forme décimale.

Si une des dimensions est entière, on a à faire le produit d'une fraction par un entier, ce qui se ramène à une addition répétée en utilisant l'additivité des aires.

Exemples :

$$a = 4 + \frac{7}{10}, x = 6.$$

L'unité d'aire est l'aire c du carré C de dimension u . Le problème est de savoir combien de C il nous faut pour paver le rectangle.



Il faut déjà 24 carrés entiers (6×4) et on sait qu'il en faut moins de 30 (6×5). Pour le reste on a 6 petits rectangles dont l'aire de chacun vaut $7 \times \frac{1}{10} c = \frac{7}{10} c$: chaque petite bande se reporte 10 fois dans le carré C et il faut en prendre 7 pour recouvrir un petit rectangle.

On a donc $6 \times \frac{7}{10} = \frac{42}{10} = 4 + \frac{2}{10}$.

L'aire du rectangle en C est donc

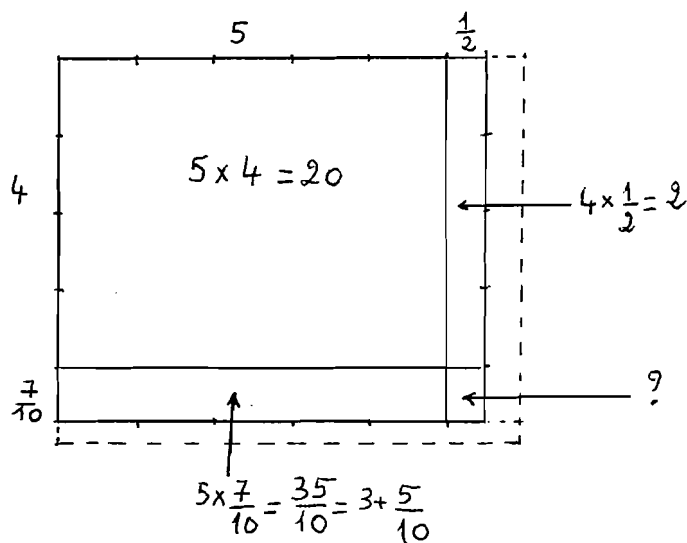
$$(6 \times 4) + (6 \times \frac{7}{10}) = 24 + \frac{42}{10} = 24 + 4 + \frac{2}{10} = 28 + \frac{2}{10}.$$

$$\text{On peut écrire } 6 \times (4 + \frac{7}{10}) = 28 + \frac{2}{10}.$$

Si les deux dimensions sont fractionnaires, le rectangle est coupé en 4 parties dont on sait calculer l'aire pour 3 d'entre elles.

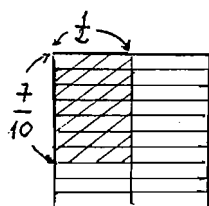
Exemple :

$$a = 4 + \frac{7}{10} \quad x = 5 + \frac{1}{2}.$$



$$\begin{aligned} (4 + \frac{7}{10}) \times (5 + \frac{1}{2}) &= (4 \times 5) + (4 \times \frac{1}{2}) + (5 \times \frac{7}{10}) + (\frac{7}{10} \times \frac{1}{2}) \\ &= 20 + 2 + 3 + \frac{5}{10} + (\frac{7}{10} \times \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Il reste à calculer l'aire du rectangle R de dimensions $\frac{7}{10} u$ et $\frac{1}{2} u$. On le reporte dans le carré unité.

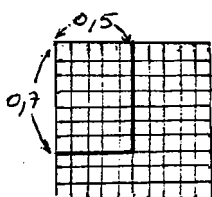


Le rectangle R de dimensions $\frac{7}{10} u$ et $\frac{1}{2} u$ est composé de 7 petits rectangles r de dimensions $\frac{1}{10} u$ et $\frac{1}{2} u$. Il faut 20 de ces petits rectangles pour paver le carré unité. L'aire du petit rectangle r est donc $\frac{1}{20} c$, l'aire du rectangle R est $7 \times \frac{1}{20} c = \frac{7}{20} c$.

Finalement la mesure de l'aire cherchée est

$$\left(4 + \frac{7}{10}\right) \times \left(5 + \frac{1}{2}\right) = 20 + 2 + 3 + \frac{5}{10} + \frac{7}{20} = 25 + \frac{10}{20} + \frac{7}{20} = 25 + \frac{17}{20}.$$

Remarque.



Avec des nombres décimaux, on aurait le même travail. Par exemple $0,5 \times 0,7 = 0,35$: on a besoin de 100 carrés de dimension $0,1 u$ pour paver le carré de dimension $1 u$. L'aire du carré de dimension $0,1 u$ est donc $0,01 c$, il en faut 35 pour paver le rectangle de dimensions $(0,5 u ; 0,7 u)$ donc $0,5 \times 0,7 = 0,35$.

Observations.

— Dans toutes les classes de CM_1 et CM_2 observées, les élèves ont procédé de la manière décrite ci-dessus.

— Les élèves de 6ème connaissent la technique de multiplication de 2 décimaux. L'activité présentée ici est l'occasion de donner du sens à la fois à cette multiplication et au calcul de l'aire d'un rectangle en fonction de ses dimensions dans le cas où les mesures ne sont pas entières.

d) Bilan et institutionnalisation du calcul de l'aire.

Les procédures sont exposées au cours du bilan sur de nombreux exemples. Les élèves ont le choix des valeurs numériques pour b ; ceux qui se sentent moins à l'aise dans le calcul sur les fractions ou les nombres décimaux ont tendance à ne choisir que des valeurs entières de b. Il est nécessaire que chaque élève ait à faire le calcul dans le cas où a et b sont fractionnaires. Cela sera fait au cours d'exercices de renforcement sur cette séquence. Après ces exercices de renforcement on est en mesure d'institutionnaliser la technique de la multiplication en tableau.

Par exemple $(4 + \frac{7}{10}) \times (5 + \frac{1}{2})$.

4	$\frac{7}{10}$	
20	$\frac{35}{10}$	5
$\frac{4}{2}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Résultat : } & 20 + \frac{35}{10} + \frac{4}{2} + \frac{7}{20} = \\ & = 20 + 3 + \frac{5}{10} + 2 + \frac{7}{20} = \\ & = 25 + \frac{5}{10} + \frac{7}{20} = 25 + \frac{17}{20} \end{aligned}$$

La disposition peut se perfectionner quand on a affaire à des nombres décimaux.

4	$\frac{7}{10}$	
20	$\frac{35}{10}$	5
$\frac{20}{10}$	$\frac{35}{100}$	$\frac{5}{10}$

	4,	7	
	2	3	5,
2	0	5	
	2	3	5
5	0	5	
	8	5	25,85

e) Représentation graphique.

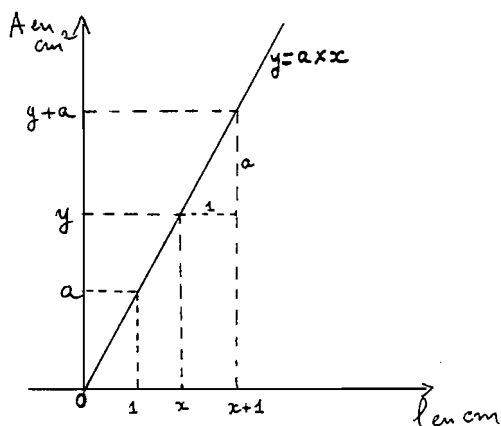
Travail individuel.

Consignes.

1. Représenter graphiquement tous les couples (x, y) trouvés par l'équipe pour la valeur de a donnée ; x est la mesure en cm de l'autre dimension du rectangle, y est la mesure de l'aire en cm^2 .

2. Y a-t-il dans la famille un rectangle dont l'aire mesure 20 cm^2 , 25 cm^2 , etc...

Le but de ce travail est de faire jouer à la représentation graphique le double rôle de recueil et organisation de l'information (consigne 1) et de source d'information nouvelle (consigne 2) en donnant du sens à de nouveaux points intermédiaires.



Les points obtenus s'alignent sur une droite qui passe par l'origine : si on progresse de 1 vers la droite, on progresse de a vers le haut. Les élèves constatent d'abord cette propriété quand x est entier. Soient M et P les points de coordonnées respectives $(n, a \times n)$ et $(n + 1, a \times (n + 1))$ avec n entier. Si on considère un rectangle de dimensions a cm et x cm avec $n < x < n + 1$, à ce moment de la situation un élève sait lui associer son aire $a \times x$ cm², du moins si

x est un nombre qu'il connaît. Un tel x est de la forme $n + \frac{k}{p}$ avec $k < p$ et (le plus souvent) $p = 2, 4, \dots, 10, 100, \dots$; si on progresse de $\frac{1}{p}$ vers la droite, on progresse de $\frac{a}{p}$ vers le haut : en p coups on a progressé de 1 vers la droite et de a vers le haut. Le point correspondant de coordonnées (x, y) avec $y = a \times x$ est sur le segment MP . Tous les points correspondant aux rectangles de la famille su'on a trouvés sont alignés avec M et P sur une droite qui passe par l'origine.

Réciproquement, étant donné un nombre y , existe-t-il un rectangle de la famille d'aire y cm² ? La réponse fait intervenir la division comme outil : un tel rectangle a pour dimensions a cm et x cm avec $y = a \times x$. Graphiquement ce rectangle sera représenté par le point de la droite D et d'ordonnée n . Les élèves peuvent lire un résultat approché sur le graphique et le contrôler par le calcul. Le graphique sert aussi de contrôle au calcul : si on trouve un point qui n'est pas dans l'alignement, il faut vérifier le calcul correspondant.

f) Institutionnalisation de la variation de l'aire en fonction d'une dimension.

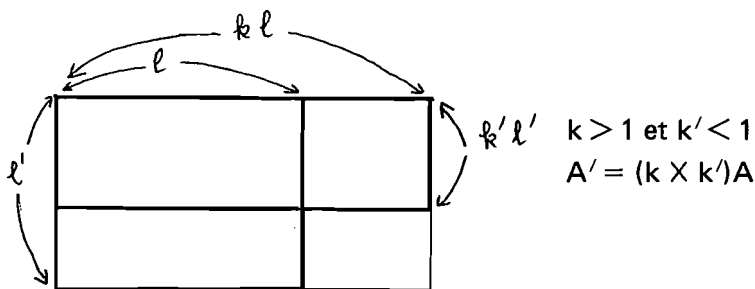
Le bilan permet de conclure que l'aire est proportionnelle à la dimension variable du rectangle :

– si on multiplie une dimension d'un rectangle par un nombre, quel qu'il soit, entier ou non, l'aire est multipliée par le même nombre ;

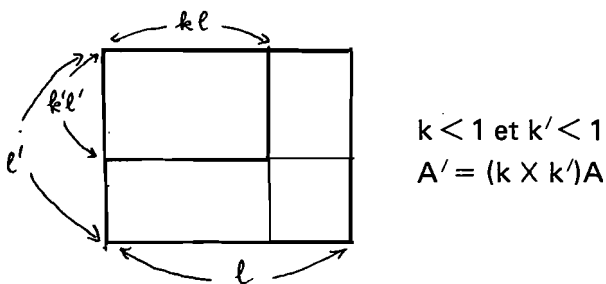
– si on multiplie une dimension d'un rectangle par un nombre k entier ou non, et l'autre dimension par un nombre k' , entier ou non, l'aire est multipliée par $k \times k'$. $A \mapsto kA \mapsto k' \times (kA) = (k \times k')A$;

– en particulier si on multiplie les deux dimensions d'un rectangle par un nombre k , l'aire est multipliée par $k \times k = k^2$:

— c'est vrai aussi quand $k < 1$ ou $k' < 1$. Dans ce cas le rectangle obtenu ne contient pas l'ancien, mais on a $A' = (k \times k')A$.



Si $k < 1$ et $k' < 1$, on obtient un nouveau rectangle d'aire $(k \times k')A$ qui peut s'inclure dans le rectangle donné d'aire A .



2.3 Recherche de rectangles de périmètre donné.

Les élèves sont par équipes de 2 ou 4.

A chaque équipe on donne une valeur de P (différente d'une équipe à l'autre). Les élèves de l'équipe cherchent des rectangles de périmètre P cm et calculent l'aire. Ils organisent leurs résultats dans un tableau. a et b sont les mesures des dimensions en cm, A la mesure de l'aire en cm^2 .

a	b	P	A

Cette situation a un double objectif :

— elle permet un renforcement de la situation précédente de calcul de l'aire d'un rectangle dans le cas où les dimensions ne sont pas entières : quand P est fixé, il y a peu de rectangles de la famille dont les dimensions sont entières et, si on demande à chaque équipe de produire suffisamment de rectangles différents, les élèves seront obligés de choisir a et b non entiers ;

— elle permet d'institutionnaliser le fait que, à périmètre constant, l'aire varie. Dans l'approche de la notion d'aire indépendamment de la mesure (voir 2.3*), nous avons fabriqué des surfaces de périmètres différents et de même aire, nous avons peu étudié la situation symétrique (même périmètre, aires différentes) faute de moyens pour apprécier la variation d'aire ou de connaissances géométriques suffi-

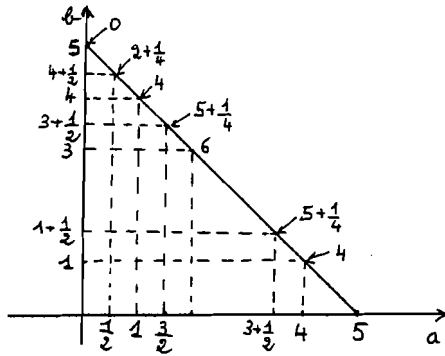
* Les références portant, comme celle-ci, une étoile renvoient à la première partie de l'article («petit x» n° 6).

santes. Nous sommes maintenant en mesure de le faire au moins dans le cas des rectangles.

Déroulement.

Le tableau «montre» que l'aire n'est pas constante, mais il ne dit rien sur la façon dont elle varie. Le report graphique permet de visualiser cette variation :

1ère représentation.

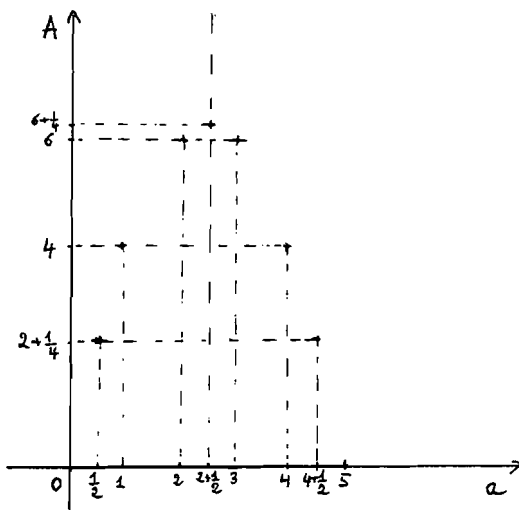


Exemple $P = 10$

Les points M de coordonnées (a, b) représentant les rectangles de la famille sont alignés. A côté de M , on note la mesure de l'aire du rectangle correspondant, et on constate le sens de variation et la symétrie : si le point $M(a, b)$ représente un rectangle de la famille, $M'(b, a)$ représente le «même» rectangle. L'aire augmente quand la différence entre a et b diminue.

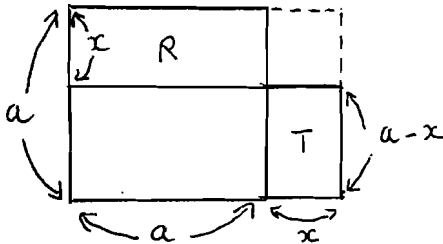
2ème représentation.

On porte en abscisse une dimension (l'autre est alors connue aussi) et en ordonnée l'aire du rectangle. Pour préciser le tracé de la courbe les élèves sont incités à faire des calculs intermédiaires.



Exemple $P = 10$

Quand a augmente, A augmente puis diminue. On a une symétrie : les points correspondants représentent des rectangles de mêmes dimensions. On peut penser que, parmi tous les rectangles de la famille, c'est le carré qui aura la plus grande aire. On peut aussi s'en convaincre par un raisonnement géométrique :



si, à partir du carré de la famille de dimensions (a, a) , on fabrique un rectangle de la famille, on doit enlever à un côté ce qu'on ajoute à l'autre. On enlève un rectangle R d'aire plus grande que le rectangle T qu'on ajoute. Il nous manque le petit carré de dimensions (x, x) .

Au passage, on remarque que

$$(a + x) \times (a - x) = a^2 - x^2.$$

Prolongements possibles.

– Etant donné un nombre y , existe-t-il un rectangle de la famille d'aire $y \text{ cm}^2$? Autrement dit, peut-on trouver un rectangle dont on connaît l'aire et le périmètre ?

Les représentations et les raisonnements précédents permettent de prévoir que y ne doit pas être trop grand : dans la famille des rectangles de périmètre $P \text{ cm}$, c'est le carré qui a la plus grande aire, c'est-à-dire $\frac{P}{4} \times \frac{P}{4}$.

Si $y > \frac{P}{4} \times \frac{P}{4}$, on ne trouvera pas de rectangle.

Si $y \leq \frac{P}{4} \times \frac{P}{4}$, on trouvera peut-être un rectangle, en tous cas on pourra

trouver des rectangles de la famille dont l'aire s'approche autant qu'on veut de l'aire demandée.

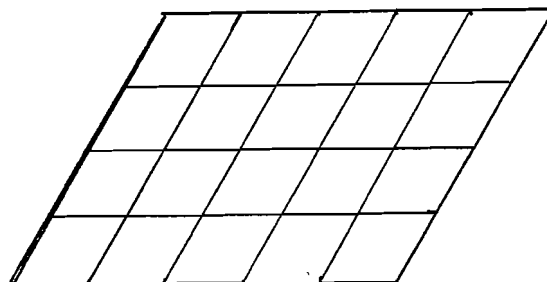
– Existe-t-il dans la famille des rectangles de périmètre $P \text{ cm}$, des rectangles d'aire aussi petite que l'on veut ? Plus petite que 1 cm^2 ? Plus petite que $0,01 \text{ cm}^2$?

III – ACTION SUR LE RECTANGLE DE QUELQUES TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES.

A l'occasion d'entretiens individuels avec des élèves de CM_2 ayant étudié une bonne partie des situations décrites précédemment (2.2* - 2.3.1* - 2.4* - 1 - 2.2 -- 2.3⁽¹⁾), nous avons constaté que, pour calculer l'aire d'un parallélogramme, beaucoup

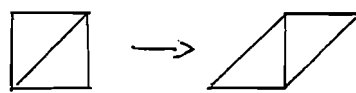
(1) Remarquons qu'ils n'avaient pas traité la situation 2.3.2* mais qu'ils avaient constaté l'indépendance des variations de l'aire et du périmètre dans le cas des rectangles.

d'élèves font le produit des «dimensions» (longueurs des côtés non parallèles), et justifient leur calcul par un pavage tel que celui-ci :



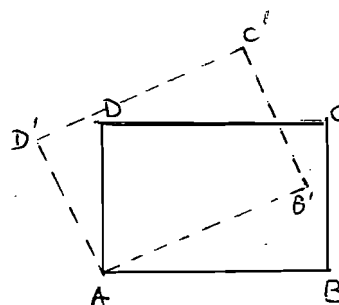
Ils sont convaincus qu'un parallélogramme dont les côtés mesurent 1 cm a pour aire 1 cm^2 .

Réciproquement si, à partir d'un carré d'aire 1 cm^2 , on leur demande de fabriquer un parallélogramme de même aire, ils procèdent par découpage et recollement et déclarent que tous les côtés du parallélogramme mesurent 1 cm :

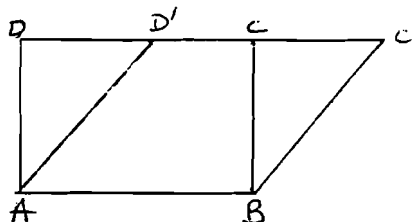


Il nous a semblé que les élèves ne distinguaient pas trois transformations :

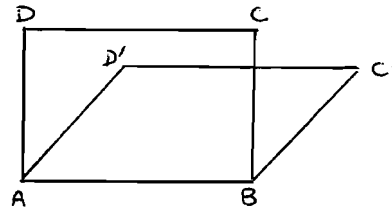
– La rotation autour d'un sommet qui conserve les longueurs et les aires et transforme le rectangle en un rectangle superposable.



– Le glissement de CD sur une parallèle à AB qui transforme le rectangle en un parallélogramme de même aire, mais les longueurs des côtés ne sont pas toutes conservées.



— La transformation du «parallélogramme articulé» qui transforme aussi le rectangle en parallélogramme et conserve les longueurs des côtés mais non les aires.



Pour les élèves la conservation des longueurs et des aires va de pair. Le but des activités que nous proposons ci-dessous est de distinguer ces trois transformations et en particulier d'étudier les invariants des deux dernières.

Consigne 1.



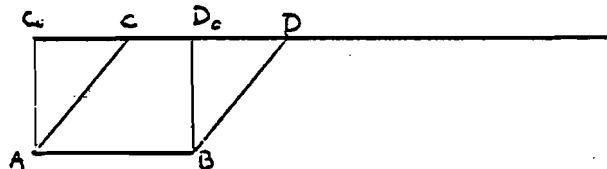
On dispose d'un rectangle d'aire 12 cm^2 . Ce rectangle est articulé et peut se déformer en un parallélogramme ; les longueurs des côtés sont fixes.

Que devient le périmètre du rectangle dans cette déformation ?

Que devient son aire ?

Est-il possible d'obtenir un parallélogramme d'aire plus petite que 8 cm^2 , que 4 cm^2 , que 1 cm^2 ? Dessiner les parallélogrammes correspondants.

Consigne 2.



La barre AB a une longueur de 4 cm ; à une distance de 3 cm de AB, parallèlement à AB, on place un rail sur lequel peut coulisser une barre CD de longueur 4 cm . On joint AC et BD par des élastiques.

En position de départ, ABC_0D_0 forme un rectangle ; son aire est 12 cm^2 ; son périmètre 14 cm .

A chaque position de la barre CD correspond un parallélogramme ABCD. Que devient le périmètre du rectangle, que devient l'aire ?

Bilan.

Dans le premier cas, les longueurs des côtés ne varient pas, le périmètre non plus, en revanche l'aire diminue. Dans le second cas, un côté reste de longueur fixe, l'autre côté voit sa longueur augmenter ; le périmètre augmente mais l'aire reste fixe. Tant que C est entre C_0 et D_0 on s'en convainc en découpant un triangle à droite et en le reportant à gauche du parallélogramme. Pour C au-delà de D_0 , il faut faire un calcul algébrique (décomposition d'une même aire de 2 manières différentes : voir 4.1).

A l'occasion du bilan, on peut aussi pointer les faits suivants :

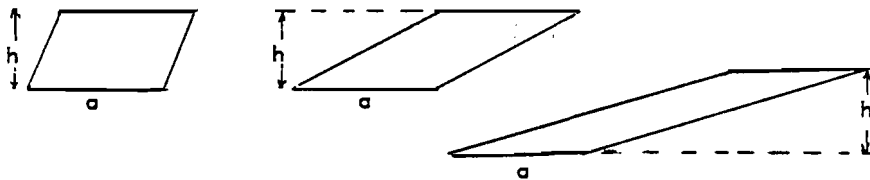
- un parallélogramme (losange) non carré dont tous les côtés mesurent 1 cm a une aire plus petite que 1 cm^2 ;
- un parallélogramme non rectangle dont un des côtés mesure 1 cm et l'aire 1 cm^2 a l'autre côté de longueur strictement supérieure à 1 cm.

IV – SURFACES USUELLES.

L'objectif de ce chapitre est d'établir les formules usuelles du calcul d'aire. Il s'agit d'une suite d'exercices en travail individuel ou par équipes de deux élèves.

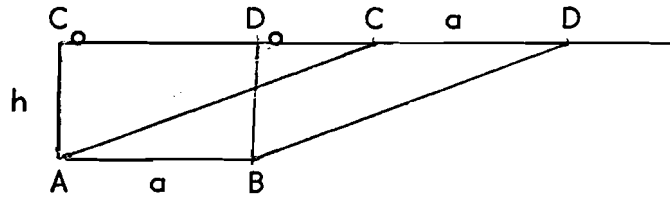
4.1 Aire du parallélogramme.**Consignes.**

1. On donne un parallélogramme, on demande
 - a) de dessiner un rectangle de même aire ;
 - b) de calculer l'aire du parallélogramme.
2. Dessiner plusieurs parallélogrammes d'aire donnée.
3. Comparer les aires des parallélogrammes suivants :

**Analyse de la tâche.**

1. Utilisation de résultats déjà établis (voir 2.3* et III).
2. Une possibilité est de dessiner plusieurs parallélogrammes dérivés du même rectangle.
3. Pour les deux premiers parallélogrammes donnés, on peut facilement reconstituer le rectangle ; pour le troisième, on est obligé de repenser la démonstration et d'en trouver une qui sera valable dans tous les cas : décomposer une même aire

astucieusement choisie de deux manières différentes :



aire du trapèze $ABCD_0$: $A(T)$;

aire du triangle ACC_0 : $A(t_1)$;

aire du triangle BDD_0 : $A(t_2)$;

aire du rectangle ABD_0C_0 : $A(R)$;

aire du parallélogramme $ABCD$: $A(P)$.

On a les relations :

$$A(T) = A(t_1) + A(P) = A(R) + A(t_2).$$

D'autre part, $A(t_1) = A(t_2)$ puisque les triangles t_1 et t_2 sont superposables, donc $A(P) = A(R)$.

Remarque.

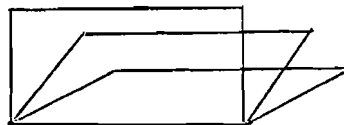
Le fait de nommer les longueurs et les aires sur lesquelles on travaille est fondamental dans tout ce paragraphe.

Conclusion.

Soit un segment AB de longueur a et une droite Δ parallèle à AB à une distance h de AB , tous les parallélogrammes ayant pour sommets A , B et deux points de Δ ont même aire $a \times h$.

Exercices.

1. Calculer l'aire de différents parallélogrammes obtenus à partir d'un rectangle articulé (pour différentes valeurs de h) (voir III).



2. On multiplie un côté d'un parallélogramme par un nombre n , que devient l'aire ?

3. On multiplie les deux côtés d'un parallélogramme par un même nombre n , que devient l'aire ?

4.2 Aire du triangle.

a) Triangle rectangle.

Consigne.

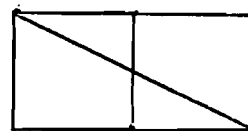
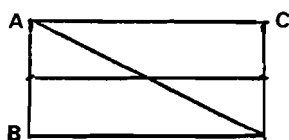
Etant donné un triangle rectangle ABC, construire un rectangle dont 3 des sommets sont A, B, C.

- Comparer l'aire du triangle et l'aire du rectangle ; les calculer en cm^2 .
- Construire un rectangle de même aire que le triangle.

Analyse de la tâche et bilan.

Si les côtés de l'angle droit du triangle rectangle ont pour longueur a cm et b cm, l'aire du rectangle est $a \times b \text{ cm}^2$, et donc l'aire du triangle est $\frac{1}{2} (a \times b) \text{ cm}^2$.

Pour construire un rectangle de même aire que le triangle, on coupe le grand rectangle en deux rectangles de même aire.



b) Autres triangles.

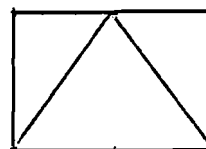
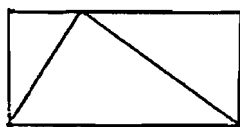
Consigne 1.

On donne deux triangles non rectangles dont un isocèle. Pour chacun

- Construire un rectangle dont un côté est un côté du triangle et dont un côté contient le 3ème sommet du triangle.
- Comparer l'aire du triangle et l'aire du rectangle correspondant.
- Calculer les aires des triangles en cm^2 .
- Construire des rectangles de même aire.

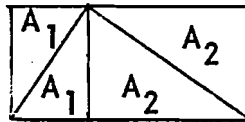
Analyse de la tâche.

La construction du rectangle ne devrait pas poser de problème.

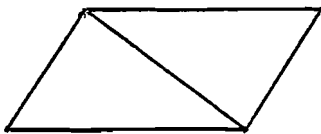


Pour le triangle isocèle la symétrie permet de trouver la relation cherchée entre les aires.

Pour un triangle quelconque, il faut penser à dessiner la hauteur et à décomposer le triangle en 2 triangles rectangles. En cas de difficulté, on suggère de dessiner la hauteur et de s'intéresser aux aires des 2 triangles obtenus.



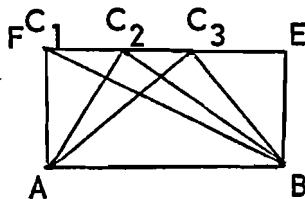
Une autre manière de procéder est de voir le triangle comme un demi parallélogramme. Le problème se ramène alors à la recherche de l'aire d'un parallélogramme, donc à l'aire d'un rectangle.



Consigne 2.

Dessiner 3 ou 4 triangles différents d'aire donnée (14 cm^2 par exemple).

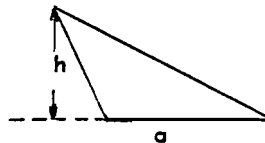
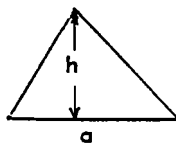
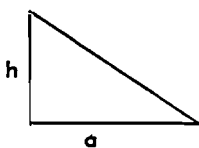
Une manière de répondre est de dessiner un rectangle d'aire double (28 cm^2) et de choisir plusieurs triangles ayant un côté confondu avec un des côtés du rectangle et le troisième sommet sur le côté opposé du rectangle.



Si ce n'est pas la méthode retenue par les élèves, l'enseignant la propose au bilan et l'institutionnalise : quelle que soit la position du point C sur le côté EF, le triangle ABC a même aire, la moitié de celle du rectangle.

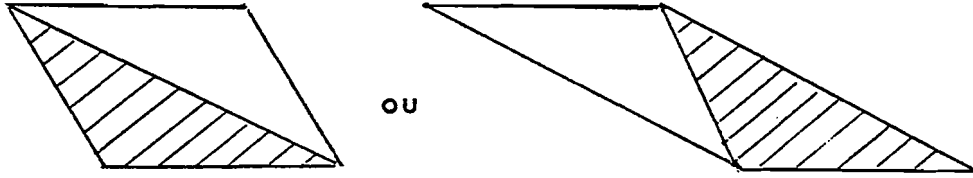
Consigne 3.

Comparer les aires des triangles suivants :



Analyse de la tâche.

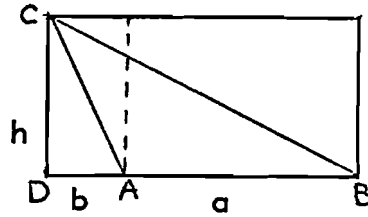
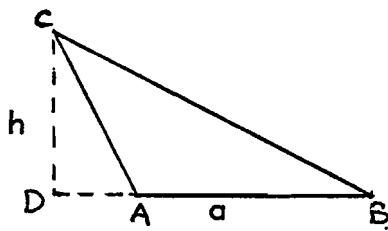
Les deux premiers triangles se ramènent à des demi rectangles. Pour le troisième triangle, on peut se ramener à un parallélogramme :



On peut aussi remarquer que l'aire du triangle ABC est la différence des aires des deux triangles rectangles BCD et ACD. Cette différence est donc la moitié de la différence entre les aires des rectangles correspondants :

$$(a + b) \times h - b \times h = a \times h$$

donc l'aire de ABC est bien la moitié de l'aire du rectangle de dimensions a et h.



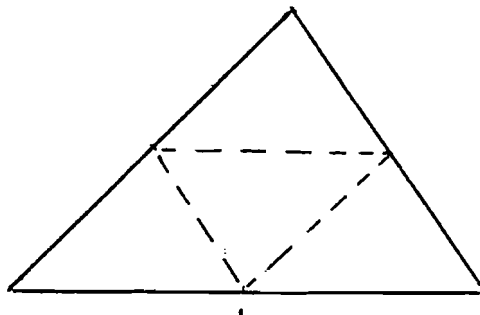
Les trois triangles donnés ont donc même aire : $\frac{1}{2}(a \times h)$.

Bilan.

On établit la formule usuelle de calcul de l'aire d'un triangle, que la hauteur tombe à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle.

Exercice.

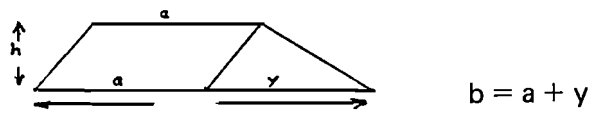
On multiplie les longueurs des côtés d'un triangle par un même nombre n, que devient l'aire ?



4.3 Aire du trapèze.

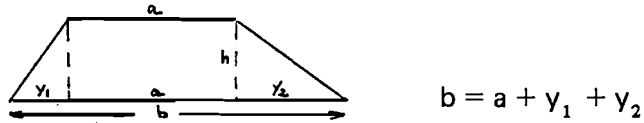
Pour calculer l'aire d'un trapèze, plusieurs procédures sont possibles.

a) Découper le trapèze en surfaces dont on sait calculer l'aire :



$$A = (a \times h) + \left(\frac{y \times h}{2}\right) = (a \times h) + \left(\frac{(b - a) \times h}{2}\right)$$

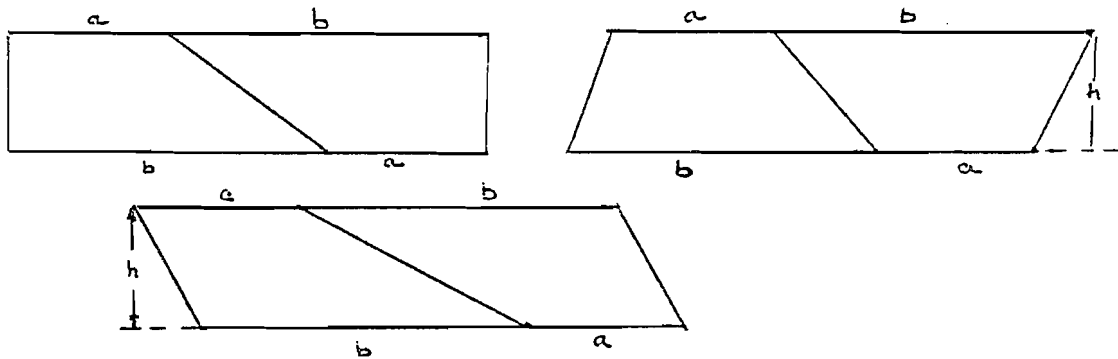
Un calcul algébrique permet de trouver $A = \frac{(a + b) \times h}{2}$



$$A = (a \times h) + \left(\frac{y_1 \times h}{2}\right) + \left(\frac{y_2 \times h}{2}\right)$$

Un calcul algébrique donne : $A = \frac{(a + b) \times h}{2}$

b) Construire un parallélogramme d'aire double :

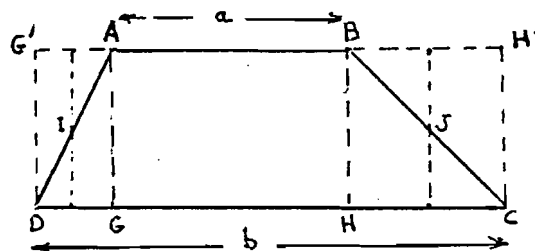


Dans le cas d'un trapèze rectangle, le parallélogramme d'aire double ainsi construit est un rectangle.

Dans tous les cas, l'aire du parallélogramme est $(a + b) \times h$, et l'aire du trapèze est

$$A = \frac{(a + b) \times h}{2}$$

c) Construire un rectangle de même aire :



L'aire du trapèze est égale à la somme des aires du rectangle ABHG et des triangles AGD et BHC ou encore à la somme des aires du rectangle ABHG et des demi-rectangles AG'DG et BH'CH, ou encore à l'aire du rectangle de dimensions h et IJ où I et J sont les milieux respectifs de AD et BC. En calculant l'aire par la méthode du b) on en déduit que $IJ = \frac{a+b}{2}$.

Suivant le trapèze, on choisira l'une ou l'autre des méthodes. Dans tous les cas, l'aire d'un trapèze de bases a, b et de hauteur h est $\frac{(a+b) \times h}{2}$.

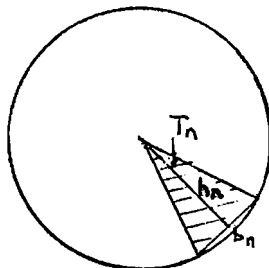
4.4 Exercices.

1. Aire de polygones divers par triangulation : on peut toujours décomposer un polygone en triangles.

2. Quand on multiplie les longueurs des côtés d'un polygone par un nombre n, que deviennent le périmètre et l'aire ?

4.5 Aire du disque.

On peut encadrer le disque par des polygones inscrits et exinscrits à 2^n côtés. Pour n assez grand, l'aire du disque est proche de $2^n \times A_{T_n}$ où A_{T_n} est l'aire d'un triangle au centre.



Pour ce triangle T_n , la hauteur h_n est peu différente du rayon R du cercle et la base b_n est peu différente de la longueur ℓ_n de l'arc de cercle correspondant.

$$A(T_n) = \frac{h_n \times b_n}{2} \text{ et } \ell_n = \frac{L}{2^n} \text{ où } L \text{ est la longueur du cercle. } A(T_n) \text{ est}$$

d'autant plus proche de $\frac{\ell_n \times R}{2} = \frac{L \times R}{2^{n+1}}$ que n est grand ; et l'aire du disque est

d'autant plus proche de $2^n \times A(T_n) = \frac{h_n \times (2^n b_n)}{2}$ que n est grand. Il faudrait majorer

les erreurs et montrer que la limite est bien $\frac{R \times L}{2}$. Si on a vu d'autre part que

que $L = 2 \pi R$, on en déduit que l'aire d'un disque de rayon R est πR^2 .

Problème.

Si on multiplie le rayon d'un disque par un nombre entier n, que devient le périmètre ? Que devient l'aire ?

On se ramène à l'étude des périmètres et aires des polygones inscrits et exinscrits.

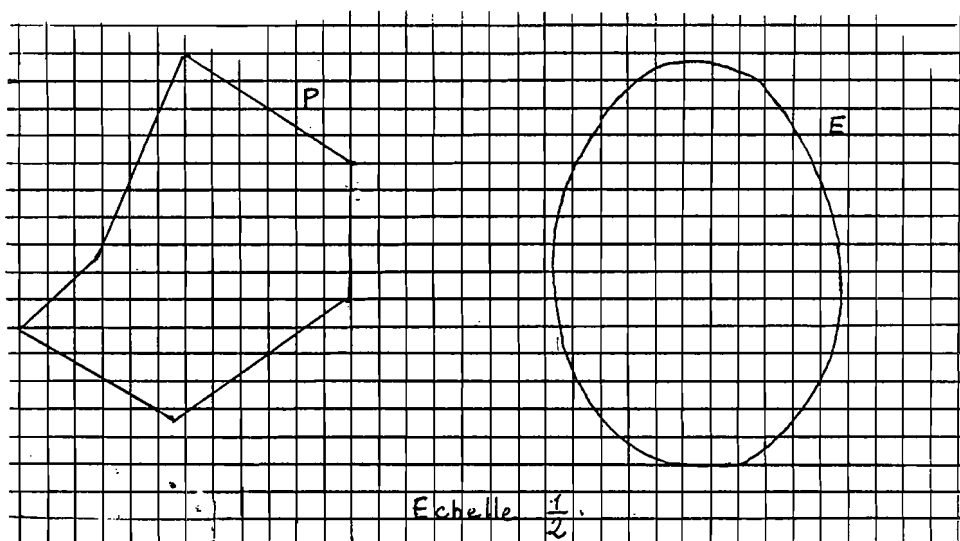
V – ENCADREMENTS.

Objectifs.

- Encadrement de la mesure dans le cas où on ne peut pas trouver de mesure exacte.
- Utilisation de cet encadrement pour comparer des aires.
- Affinement de l'encadrement – Mesure approchée.

Matériel.

Surfaces polycopiées sur papier quadrillé au cm : une surface polygonale, une surface à bord arrondi.



Consigne.

1. Donner une valeur en cm^2 aussi proche que possible de l'aire de la surface donnée. Comparer ces deux surfaces (pour l'aire).
2. Dans chaque cas dessiner un rectangle d'aire aussi proche que possible de l'aire donnée.

Analyse de la tâche.

a) Pour évaluer l'aire des surfaces.

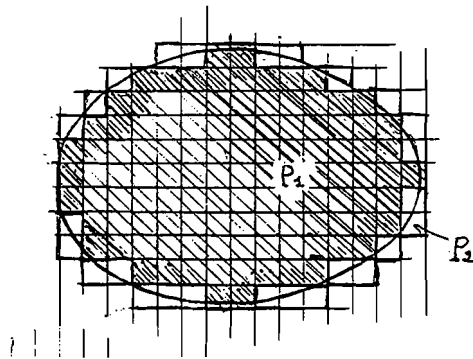
Pour la surface P, on peut

- soit décomposer en triangles et calculer l'aire de chaque triangle à partir de longueurs effectivement mesurées sur la figure ;
- soit compter les carreaux et encadrer la mesure de l'aire. Pour la surface

E, seule la deuxième solution est possible.

- Par la méthode de triangulation, les erreurs de mesure vont s'ajouter et l'incertitude sur le résultat peut être assez grande, ce qui va se traduire par des valeurs numériques différentes obtenues si plusieurs élèves évaluent P par cette méthode.

- Pour les évaluations par encadrements, la méthode consiste à inscrire un polygone P_1 pavable avec les carreaux du quadrillage dans la surface E (ou P), ce qui donnera pour le polygone une aire plus petite que celle de E, et à inscrire E dans un polygone P_2 dont l'aire sera plus grande que celle de E. L'encadrement de E (ou P) par des polygones sera d'autant meilleur que la différence des aires entre ces polygones est petite.



Même si, pour déterminer P_1 et P_2 on tient compte de certaines compensations légitimes (cf. exemples ci-dessous)



on n'obtiendra de toute façon qu'un encadrement de l'aire de E.

Pour améliorer l'encadrement et obtenir une valeur plus précise de l'aire de E, on affine le quadrillage, par exemple, en distribuant du papier millimétré transparent aux élèves. Sur ce papier, on peut dessiner deux polygones P'_1 et P'_2 suivant de plus près le contour de E.

b) Pour construire un rectangle.

Le problème revient à construire un rectangle dont l'aire est donnée en cm^2 ou en mm^2 : n'importe quel rectangle dont l'aire est comprise entre celles de P'_1 et P'_2 répond à la question.