COURRIER

Nous avons reçu de Michel BLANC, professeur à l'école normale de Nice la lettre suivante.

Le contenu de cette lettre a pour objectif de préciser quelque peu la notion de nombre au niveau de l'école élémentaire pour les maîtres qui sont amenés à l'enseigner ; il ne s'agit pas d'établir une quelconque progression dans cette étude, mais plus simplement d'essayer de voir plus clair dans la confusion entre ordinal et cardinal (que bien des manuels de cours préparatoire entretiennent).

I – EN AVOIR (autant)... OU PAS.

«Il était une fois un berger très consciencieux ; chaque matin et chaque soir il s'inquiétait de savoir si aucun mouton ne s'était échappé de l'étable ou égaré dans la campagne ; mais pour ce faire il essayait de reconnaître chaque mouton, tâche fort délicate ! Un matin il eut une idée : il fit un tas de cailloux et chaque fois qu'un mouton sortait de l'étable il mettait un caillou dans sa besace. Ce soir, se dit-il, pour savoir si mes moutons ne se sont pas égarés, chaque fois qu'un mouton entrera dans l'étable je sortirai un caillou de mon sac ; chaque mouton aura un caillou et chaque caillou un mouton !».

Au niveau de l'école élémentaire nous dirons que le berger a réalisé une correspondance terme à terme entre l'ensemble des cailloux et celui des moutons, qu'il y a autant de cailloux que de moutons et inversement, que le nombre de moutons est égal à celui des cailloux.

Le mathématicien dira que le berger a réalisé une bijection entre l'ensemble des moutons et celui des cailloux, que l'ensemble des moutons a le même cardinal que celui des cailloux.

Il est une première remarque fondamentale : **le nombre existe indépendamment de toute représentation.**

Précisons un peu la notion de cardinal par un parallèle entre la définition mathématique et les activités correspondantes de l'école élémentaire.

Mathématique	**Ecole élémentaire**
L'ensemble A est équipotent à l'ensemble B s'il existe une bijection de A vers B.	La collection A a autant d'éléments que la collection B si on peut associer terme à terme les éléments de A à ceux de B et réciproquement.
Cette relation entre ensembles est une équivalence car on **détermine** qu'elle possède les trois propriétés : réfléxivité ; symétrie ; transitivité.	Cette relation permet de classer des groupes d'objets car elle est **symétrique** par définition et transitive par expérimentation.
Elle permet de définir des classes d'équipotence ; chaque classe s'appelle un cardinal ; tout ensemble appartient à une classe et une seule.	Tout ensemble appartient à une classe et une seule qu'il suffit d'appeler un nombre.

Remarque.

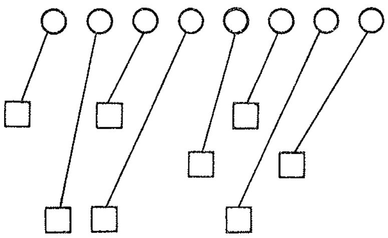
Dans le point de vue «école élémentaire» il est fait allusion à la correspondance terme à terme ; il est bien évident qu'elle ne constitue qu'un **moyen et non une obligation** ; il serait parfaitement ridicule et superflu d'obliger un enfant à tracer des traits pour conclure que deux ensembles de trois éléments ont bien autant d'éléments (hélas, bien des manuels ne sont pas tués par ce ridicule).

De plus, dès que le nombre d'éléments est assez important (au moins quinze) ce procédé est fort lourd et a tout avantage à être précédé par une organisation spatiale ne mettant plus en évidence une association élément par élément mais utilisant la vue globale qu'ont parfois les enfants des petits nombres.

Exemples :

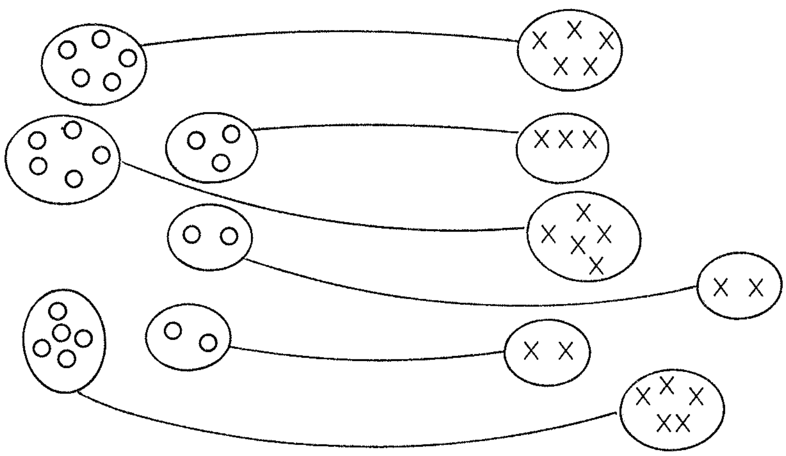
Il y a autant de croix que de ronds

correspondance visuelle



Il y a autant de ronds que de carrés

correspondance terme à terme



Il y a autant de croix que de ronds

II – OU LE CARDINAL ENTRE DANS LES ORDRES.

Lorsqu'on a conclu à la non égalité des cardinaux de deux ensembles il reste un point important à déterminer : quel est celui des deux ensembles qui a le plus d'éléments ? C'est-à-dire nous avons à définir une structure d'ordre sur l'ensemble des cardinaux.

Ici encore cette phase, qui mathématiquement parlant est la deuxième du point de vue de la constitution de l'ensemble des cardinaux, n'est pas nécessairement ainsi conçue à l'école élémentaire ; il serait bien évidemment regrettable de ne pas la faire apparaître en même temps que la définition du nombre.

Un point par contre beaucoup moins évident a priori concerne le caractère «discret» de l'ensemble des nombres naturels, caractère que l'on met en évidence à l'école élémentaire par l'intermédiaire de la notion de précédent ou de suivant.

Il est très important de remarquer que l'on définit sur l'ensemble des cardinaux une structure d'ordre total. De plus il existe un cardinal plus petit que tous les autres (zéro).

III – CE QUE COMPTER VEUT DIRE :

«Un jour, le berger de l'histoire eut une nouvelle idée : ce sac de cailloux est bien lourd à porter ; il suffirait que je dise un mot à chaque fois que l'un de mes moutons sort de l'étable et que je redise la même liste de mots lorsque les moutons rentreront ; peu importe qu'un mouton ne corresponde pas au même mot à l'entrée ou à la sortie, l'essentiel étant que j'ai bien toujours la même liste de mots dans le même ordre pour n'oublier aucun mouton».

Notre berger venait d'inventer un procédé de comptage et une manière de désigner des nombres, ce qui est un système naïf de numération.

Les définitions qui suivent sont extraites de l'ouvrage «La mathématique moderne à l'usage du physicien et de l'ingénieur» par Marc Blanc-Lapierre (Eyrolles - éditeur).

a) On a établi un système de numération si on a réussi à construire un ensemble ordonné de signes satisfaisant aux conditions ci-après :

– à partir de l'un d'eux qui sera le premier, tout signe a un suivant bien déterminé ;

– ces signes sont tous différents.

b) Etant supposé choisi un sytème de numération que l'on conservera toujours, on appelle comptage des éléments d'un ensemble fini et non vide toute opération qui pourra être considérée comme équivalente à celle ci-après :

– à un élément quelconque de cet ensemble E nous faisons correspondre le premier signe du système de numération ; puis à un autre élément de E nous faisons correspondre le signe suivant du système ; et ainsi de suite, chaque fois que l'on prend un nouvel élément de E on passe du dernier signe employé à son suivant. On obtient un signe n qui est celui correspondant au dernier élément pris. On dit que n est le nombre des éléments de l'ensemble E.

A partir de cette opération on dira que deux ensembles ont le même nombre (ordinal) d'éléments si le comptage des éléments de chaque ensemble a conduit dans les deux cas à la détermination du même signe du système de numération.

IV – ANALYSE DES DEUX CONCEPTIONS.

Dans le cas du cardinal la conclusion que deux ensembles ont le même cardinal résulte :

– soit d'une comparaison directe (construction d'une bijection de l'un vers l'autre) ;

– soit d'une utilisation de la transitivité de la relation d'équipotence quand ces deux ensembles avaient déjà été séparément comparés à un troisième ensemble.

Dans le cas de l'ordinal la conclusion que deux ensembles ont le même ordinal résulte de la mise en correspondance de chacun des ensembles avec la même partie du système de numération.

On obtient les résultats des comparaisons :

– directement par considération des deux ensembles (et établissement d'une relation bijective ou injective entre-eux) dans le cas des cardinaux ;

– indirectement par l'intermédiaire du système de numération dans le cas des ordinaux.

On peut remarquer que dans le premier cas (cardinal) les problèmes de transitivité interviennent au niveau des relations de classement et de rangement des ensembles eux-mêmes, alors que dans le second cas (ordinal) seule intervient la réflexivité de l'égalité ainsi que la transitivité de l'ordre sur le système de numération.

V – QUELQUES REMARQUES EN GUISE DE CONCLUSION.

Souvent on entend dire que zéro n'est pas un nombre ou bien un nombre pas comme les autres. Est-ce fondé ? Oui et non, zéro est un cardinal (le plus petit) mais il n'a aucun homologue dans l'ensemble des ordinaux. Par contre tout autre cardinal a un homologue «naturel» dans l'ensemble des ordinaux, cette correspondance est si «naturelle» qu'on a donné le même nom au cardinal et à l'ordinal correspondants (ce qui ne facilite pas les choses au niveau de l'enseignement du (ou des) concept(s) de nombre).

Il faut bien se rendre compte en lisant le programme actuellement en vigueur à l'école élémentaire (arrêté du 2/1/70) que l'aspect cardinal y est très nettement envisagé alors que dans le programme qui l'a précédé (instructions du 17/10/45) c'était l'aspect ordinal qui dominait.

Il semble que tout le monde n'ait pas conscience de ce changement puisqu'une des questions qui est souvent posée est la suivante :

Au C.P. quand doit-on arriver à dix ? faut-il aller jusqu'à cent ? (trop souvent écrits d'ailleurs 10 et 100) qui perpétue une étude ordinale plus ou moins déguisée sous un habillage de cardinal.