ETUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION DANS UNE CLASSE DE CM2

par Serge BLOCHET

I – TRAVAIL PRELIMINAIRE.

Pour reprendre contact avec les lois de composition, nous en avons étudié quelques-unes :

1.1 Une loi de composition non numérique.

On choisit des dessins soigneusement tracés et orientés, par exemple, les lettres a, o, c, d dessinées en script, reproduites sur des papiers calques.

Si on pose le calque de a sur le calque de d en faisant coïncider les boucles on lit alors par transparence d, et on décide que d est l'image du couple (a, d), c'est-à-dire le composé de a avec d, par la loi transparence.

Si on place le calque de a sur celui de c, on lit a. Si on place le calque de c sur celui de a, on lit a.

Toutes les manipulations possibles peuvent se résumer dans la table.

	a	o	c	d
a	a	a	a	d
o	a	o	o	d
c	d	o	c	d
d	d	d	d	d

1.2 Une loi de composition numérique.

Dans un ensemble de nombres, par exemple A = {2, 3, 5, 6, 8} nous avons étudié la loi dite du maximum (voir l'étude de cette loi dans l'article loi de composition).

1.3 L'addition dans ℕ.

II – ETUDE D'UNE NOUVELLE LOI DE COMPOSITION.

Pour montrer l'importance de l'associativité, j'ai essayé de mettre les enfants dans une situation où ils seraient amenés à étudier une loi de composition non associative.

Sur les carnets de correspondance des élèves figurent deux notes de français et une note de mathématique. Ces notes sont des entiers naturels compris entre 0 et 10. Je demande s'il serait possible de faire figurer sur chaque carnet une seule note en français à la place des deux qui sont déjà enregistrées.

Plusieurs solutions sont proposées par les enfants :

– Fabrice propose d'inscrire la note la plus forte.
– Sabine propose d'inscrire la somme des deux notes.
– Marc propose de faire la somme des deux notes et de diviser par deux.

Appelons B l'ensemble des notes, B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} et prenons quelques exemples.

Patrick a eu deux notes (6, 8).

– Par la loi de Fabrice, on fait correspondre au couple (6, 8) le nombre 8.

– Par la loi de Sabine, on fait correspondre au couple (6, 8) le nombre 14.

– Par la loi de Marc, on fait correspondre au couple (6, 8) le nombre 7.

Les enfants veulent étudier plus en détail la loi de Marc : «on fait la somme et on divise par 2». Le problème de la notation se pose : comment noter cette loi ?

Plusieurs propositions sont avancées

+ : 2

+

*

ce dernier signe sera choisi et lu «étoile».

A ce moment-là un enfant dit : *«oui, mais si on a le couple (2, 5) ?»*

– *On mettra trois et demi.*

– *On mettra quatre parce que c'est entre 3 et 4, alors on prend le plus fort.*

La situation que j'avais choisie au départ parce qu'elle était en même temps claire et motivante, pose à ce moment-là problème.

1) La proposition «trois et demi» nous entraîne à l'étude de la demi-somme qui n'est pas une loi de composition dans B.

2) Nous risquons des ennuis même si nous choisissons la deuxième proposition. En effet, les enfants n'ont, à cette époque de l'année (début novembre), que leurs deux notes de français du mois d'octobre. Quand ils connaîtront leurs deux notes de novembre, on va se trouver devant une expression du type $(a * b) * (c * d)$ avec toutes les confusions possibles alors entre les éléments de B (c'est-à-dire les notes) et les composés de ces éléments.

Je propose donc l'étude d'une situation voisine qui n'ait pas les inconvénients de la première situation étudiée.

Nous allons nous intéresser maintenant au nombre de fautes faites dans les dictées.

Appelons F l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ des nombres de fautes faites par les enfants dans les dictées depuis le début de l'année.

On se propose ici de remplacer les nombres de fautes dans deux dictées par un seul nombre. Les enfants proposent cette fois d'appliquer la loi de Marc ainsi modifiée : au couple (2, 4) on fera correspondre 3 ; mais au couple (2, 5) on fait correspondre 3 parce que *«c'est entre 3 et 4 mais cette fois on prend le plus petit»*.

Les enfants font alors les propositions suivantes :

– *On pourrait représenter l'ensemble des résultats :*

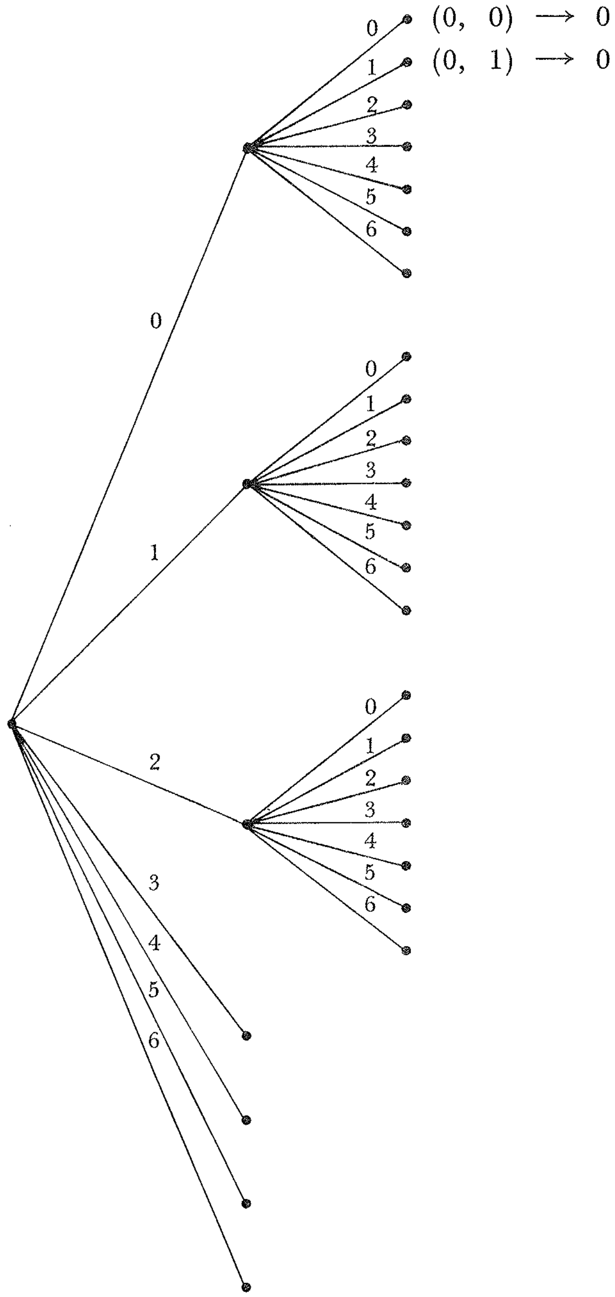
– *Par un tableau.*

– *Par un arbre.*

– *Il vaut mieux faire un tableau c'est plus facile.*

Deux enfants vont au tableau, l'un pour faire un tableau l'autre l'arbre.

*	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	1	1	2	2	3
1	0	1	1	2	2	3	3
2	1	1	2	2	3	3	4
3	1	2	2	3	3	4	4
4	2	2	3	3	4	4	5
5	2	3	3	4	4	5	5
6	3	3	4	4	5	5	6



L'arbre est abandonné en cours d'éxécution parce que trop difficile à réaliser.

Les enfants font le tableau et le complètent en groupe.

Ils observent ensuite le tableau et font de nombreuses remarques qui ne seront pas toutes exploitées.

— *Il y a 2 fois le même nombre sauf au début ou à la fin de chaque ligne ou de chaque colonne.*

— *Quand on fait le tour du tableau on a :*
0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 5 — 4 — 3 — 2 — 1 — 0. (Ceci n'avait pas été observé pour l'addition).

— *Sur la diagonale il y a 1, 2, 3, 4, 5, 6. Sur les lignes obliques il y a toujours les mêmes nombres.* (Ceci non plus, n'avait pas été observé pour l'addition).

— *Si on plie, suivant la diagonale, les cases que se recouvrent ont le même nombre.*

— *Ça veut dire, dit un enfant, que si on associe (2 ; 3) ou (3 ; 2) par exemple, on obtient le même résultat.*

— *Le tableau peut se lire dans les deux sens.*

— *Il n'y a pas d'élément neutre.*

— *Il n'y a pas non plus d'élément qui transforme tout en lui-même.* (Absorbant).

— *On ne retrouve dans les cases que les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6.*

Le maître propose alors la résolution des équations suivantes :

$4 * 5 = \cdot$ $\qquad\qquad \cdot * 3 = 2$

$2 * \cdot = 1$ $\qquad\qquad 4 * \cdot = 0$

$2 * \cdot = 3$

Il peut y avoir selon les cas soit 1, soit 2, soit 0 solutions.

Un enfant propose : «*et si on essayait de remplacer le nombre de fautes faites dans trois dictées par un seul nombre*».

Il écrit au tableau $\qquad (4 * 3) * 2 \qquad (1)$.

Un autre enfant affirme : «*on obtiendrait le même résultat en associant ces nombres d'une autre façon*».

Il écrit $\qquad 4 * (3 * 2) \qquad (2)$.

Vérifions : stupeur ! on obtient 2 dans (1) et 3 dans (2).

On recommence les deux compositions. Il faut se rendre à l'évidence. On prend d'autres exemples. Un élève remarque que pour $(0 * 1) * 1$ et $0 * (1 * 1)$ on obtient 0 dans les deux cas.

On trouve d'autres cas dans lequel c'est possible. Mais on convient qu'on ne peut pas toujours grouper les éléments comme on veut, comme dans les autres lois étudiées, aussi faut-il conserver les parenthèses. (La loi n'est pas associative).

Comparons cette loi aux lois déjà étudiées.

– *Comme dans les autres, quand on associe deux éléments on peut commencer par celui qu'on veut, on obtient le même résultat* (commutativité).

– *Cette loi n'a pas d'élément neutre, alors que les autres en ont un.*

– *Comme la loi addition elle n'a pas un élément qui transforme les autres en lui-même* (absorbant).

– *Quand on associe trois éléments, on ne peut pas les grouper comme on veut, comme dans les autres lois* (non associative).

– *Quand on associe les éléments on obtient toujours un élément de l'ensemble* (loi de composition dans F).