# LOI DE COMPOSITION

*par Monique GERENTE*

## I – QU'EST-CE QU'UNE LOI DE COMPOSITION ?

### 1.1 Avant de répondre à cette question, considérons l'activité suivante.

Dans une classe, on dispose de trois paquets identiques de quatre cartes marquées respectivement 1, 2, 3 et 4. Trois élèves : Aline, Bernard et Claire (que l'on désignera par la suite par A, B et C) ont chacun un des paquets de cartes.

a) Aline tire une carte dans son paquet.

b) Bernard tire ensuite une carte dans son paquet.

c) Claire fait alors correspondre au couple de cartes ainsi obtenu une carte de son paquet en respectant la règle suivante :

Le nombre écrit sur sa carte doit être le plus grand des deux nombres écrits sur les cartes tirées par Aline et Bernard (ou le nombre lui-même si Aline et Bernard ont tiré le même nombre).

Un coup est la donnée d'un tirage d'Aline, d'un tirage de Bernard et de la réponse de Claire.

Après chaque coup, chacun remet sa carte dans son paquet.

Voici quatre coups :

Aline tire 4, Bernard tire 1, Claire montre 4.
Aline tire 2, Bernard tire 2, Claire montre 2.
Aline tire 1, Bernard tire 3, Claire montre 3.
Aline tire 1, Bernard tire 4, Claire montre 4.

Pour nous faciliter la tâche, convenons d'une notation. La situation Aline tire 4, Bernard tire 1, Claire montre 4 peut se traduire par : au couple (4, 1) de tirages d'Aline et Bernard, Claire fait correspondre 4. Ce que l'on peut noter :

$$(4,\ 1) \longmapsto 4$$

Les trois autres exemples ci-dessus seront ainsi notés :

$$(2,\ 2) \longmapsto 2\ ;\ (1,\ 3) \longmapsto 3\ ;\ (1,\ 4) \longmapsto 4.$$

Quels sont tous les coups possibles ? Pour cela, il faut chercher tous les couples de tirages d'Aline et Bernard et la réponse de Claire.

Voici quelques coups. Complètez-en la liste :

$$\begin{aligned}
(1,\ 1) &\longmapsto 1\\
(1,\ 2) &\longmapsto 2\\
(1,\ 3) &\longmapsto 3\\
(1,\ 4) &\longmapsto 4\\
(2,\ 1) &\longmapsto 2\\
(2,\ 2) &\longmapsto 2\\
(2,\ 3) &\longmapsto\\
(2,\ 4) &\longmapsto\\
(3,\ 1) &\longmapsto\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Appelons E l'ensemble des nombres écrits sur les cartes. $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Le produit cartésien $E \times E$ représente l'ensemble des couples de tirages d'Aline et de Bernard.

Dans la liste de tous les coups possibles, on constate que Claire peut toujours montrer une carte et une seule, chaque fois qu'Aline et Bernard ont tiré leurs cartes. C'est-à-dire **qu'à tout couple du produit cartésien $E \times E$ on fait correspondre un élément unique de E.**

La liste de tous les coups possibles n'étant pas très maniable, adoptons une présentation en tableau orienté

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

La case sablée indique le couple (1, 3) et signifie qu'Aline a tiré 1 et Bernard 3. Nous allons inscrire dans cette case la réponse donnée alors par Claire, soit 3.

De même, dans la case hachurée qui indique le couple (4, 2) nous écrirons 4 car : (4, 2) $\longmapsto$ 4.

On obtient ainsi le tableau suivant :

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

### 1.2 Deux autres situations.

Il s'agit du même type d'activité que précédemment. Seule change la règle définissant la carte, si elle existe, que doit montrer Claire.

*Situation a).*

Le nombre écrit sur la carte de Claire doit être la somme des nombres écrits sur les cartes tirées par Aline et Bernard.

Les couples de tirages d'Aline et de Bernard sont les mêmes qu'en 1.1.

Si Aline tire 2 et Bernard tire 1, alors Claire pose la carte 3. Mais si Aline tire 2 et Bernard tire 3, Claire n'a pas de carte adéquate dans son jeu.

Il y a donc des couples de tirages d'Aline et de Bernard pour lesquels Claire ne peut pas jouer.

Si l'on construit, comme en 1.1, un tableau donnant tous les coups possibles, on obtient :

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 2 | 3 | 4 | | |
| 3 | 4 | | | |
| 4 | | | | |

*Situation b).*

Le nombre écrit sur la carte de Claire doit être un nombre compris entre les nombres tirés par Aline et Bernard (ou le nombre lui-même si Aline et Bernard ont tiré le même nombre).

Les couples possibles de tirages d'Aline et de Bernard sont les mêmes que dans les activités précédentes. Voici quelques coups :

si Aline tire 3 et Bernard tire 1, Claire met 2 ;
si Aline tire 4 et Bernard tire 4, Claire met 4 ;
si Aline tire 2 et Bernard tire 3, Claire ne peut pas jouer ;
si Aline tire 1 et Bernard tire 4, Claire peut mettre 2 ou 3.

Ici, à certains couples de tirages correspond une carte : $(3, 1) \longmapsto 2$ ; $(4, 4) \longmapsto 4$ ; ... ; à d'autres ne correspond aucune carte : (2, 3) ; (1, 2) ; ... ; à d'autres enfin correspondent deux cartes : par exemple au couple (1, 4) correspondent les cartes 2 et 3.

On ne peut plus construire un tableau du même type que les précédents. Comment en effet, noter dans un tel tableau les deux images du couple (1, 4) ?

### 1.3 Analyse des activités précédentes.

Dans la première situation, à tout couple du produit cartésien $E \times E$ correspond une image (un nombre ici) unique élément de E. On dit que l'on a défini une application de $E \times E$ dans E.

Dans la deuxième situation, il y a des couples sans images. On n'a pas d'application de $E \times E$ dans E.

Dans la troisième situation, il y a des couples sans images et aussi des couples ayant deux images. On n'a pas non plus d'application de E X E dans E.

Seule la première situation correspond à une loi de composition.

**Une loi de composition (*) dans un ensemble E est définie chaque fois qu'à tout couple, élément de E X E on associe un unique élément de E.**

**Une loi de composition dans E est donc une application de E X E dans E.**

### 1.4 Où l'on retrouve de vieilles connaissances.

Cherchons des lois de composition qui vous sont familières.

Etudions l'addition dans ℕ, ensemble des naturels. On sait que l'addition fait correspondre :

aux naturels 4 et 7, le naturel 11
aux naturels 12 et 3, le naturel 15.
etc...

Ce que l'on peut noter : $(4, 7) \longmapsto 11$ et $(12, 3) \longmapsto 15$.

A tout couple de naturels, l'addition fait correspondre un naturel unique. C'est une application de ℕ X ℕ dans ℕ, c'est-à-dire une loi de composition dans ℕ.

Reportez-vous au 1.3 pour expliquer pourquoi la phrase : «l'addition est une loi de composition» n'a pas de sens.

De même, la multiplication est une loi de composition dans ℕ. En effet, le produit de deux naturels quelconques existe toujours, il est unique et c'est un naturel.

(*) On lit dans certains manuels «loi de composition interne dans un ensemble E». L'adjectif «interne» n'apporte aucune précision supplémentaire puisque l'on dit déjà «dans un ensemble E».

Par contre, la soustraction n'est pas une loi de composition dans $\mathbb{N}$ : le couple (17, 35) par exemple n'a pas d'image dans $\mathbb{N}$ puisque 17 - 35 ne désigne aucun naturel.

C'est précisément pour que tous les couples, dont le premier terme est inférieur au second, et qui n'avaient pas d'image, en aient une, que l'on utilise l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers (relatifs) : {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}. La soustraction est une loi de composition dans $\mathbb{Z}$.

L'addition est-elle une loi de composition dans $\mathbb{Z}$ ? La division est-elle une loi de composition dans $\mathbb{Z}$ ? La division est-elle une loi de composition dans $\mathbb{N}$ ?

Pour ceux qui se souviennent de l'article de Grand $\mathbb{N}$ numéro 3 : «la preuve de la multiplication», les opération $\dot{+}$ et $\dot{\times}$ sont des lois de composition dans l'ensemble $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$. Vérifiez-le.

En 1.1 nous avons fabriqué une loi de composition dans l'ensemble {1, 2, 3, 4}. Elle consiste, deux nombres étant donnés, à prendre le maximum (le plus grand) des deux. Cette loi est-elle une loi de composition dans l'ensemble {436, 12, 63, 17, 921, 1024} ? Et dans $\mathbb{N}$ ?

Pour ceux qui sont familiarisés avec les notions d'intersection et de réunion de deux ensembles, l'intersection et la réunion sont deux lois de composition dans l'ensemble des parties d'un ensemble.

La loi permettant de trouver le plus grand diviseur commun (abrégé en p.g.c.d.) de deux naturels est une loi de composition dans $\mathbb{N}$. Voici les images de quelques couples de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ :

| | |
|---|---|
| $(15, 5) \longmapsto 5$ | $(128, 56) \longmapsto 8$ |
| $(17, 64) \longmapsto 1$ | $(38, 21) \longmapsto 1$ |
| $(45, 84) \longmapsto 3$ | etc... |

La loi permettant de trouver le plus petit multiple commun (abrégé en p.p.c.m.) de deux naturels est-elle une loi de composition dans $\mathbb{N}$ ?

## II – NOTATION ET REPRESENTATION D'UNE LOI DE COMPOSITION.

### 2.1 Notations.

Prenons l'exemple de l'addition dans $\mathbb{N}$. On note l'image du couple (4, 7) par 4 + 7 (c'est-à-dire 11), celle du couple (12, 3) par 12 + 3 (c'est-à-dire 15) et plus généralement, a et b étant deux naturels, celle du couple (a, b) par a + b :

$$\begin{aligned} (4, 7) &\longmapsto 4 + 7 \\ (12, 3) &\longmapsto 12 + 3 \\ (a, b) &\longmapsto a + b \end{aligned}$$

a + b, image du couple (a, b) pour l'addition, est appelée la somme de a et b.

On emploie une notation analogue pour la multiplication dans $\mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} (5, 8) &\longmapsto 5 \times 8 \\ (27, 30) &\longmapsto 27 \times 30 \\ (a, b) &\longmapsto a \times b \end{aligned}$$

a × b, image du couple (a, b) pour la multiplication, est appelée le produit de a et b.

Dans l'article, «la preuve de la multiplication» de Grand $\mathbb{N}$ numéro 3, «l'addition des classes» dans l'ensemble $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$ et notée $\dot{+}$.

Ainsi l'image du couple $(\dot{1}, \dot{2})$ est notée $\dot{1} \dot{+} \dot{2}$, c'est-à-dire $\dot{0}$, celle du couple $(\dot{2}, \dot{0})$ : $\dot{2} \dot{+} \dot{0}$ c'est-à-dire $\dot{2}$.

Dans ce même article, «la multiplication des classes» dans l'ensemble $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$ est notée $\dot{\times}$. L'image du couple $(\dot{1}, \dot{2})$ est notée $\dot{1} \dot{\times} \dot{2}$, c'est-à-dire $\dot{2}$, celle du couple $(\dot{2}, \dot{0})$ : $\dot{2} \dot{\times} \dot{0}$, c'est-à-dire $\dot{0}$.

Dans l'ensemble des parties de l'ensemble {1, 2, 3, 4}, l'image du couple ({2, 4}, {1, 2, 3, 4}) par la loi intersection, notée généralement $\cap$, est $\{2, 4\} \cap \{1, 2, 3, 4\}$ que l'on écrit plus simplement {2, 4}.

Dans l'exemple 1.1 du paragraphe I, pour la loi qui permet de trouver le maximum de deux nombres, on utilise un autre type de notation pour désigner l'image d'un couple : Max (a, b) lu «maximum de a et b».

Ainsi : Max (1, 3) = 3
Max (4, 2) = 4
etc...

De même la table de multiplication ne donne que les produits des naturels d'un chiffre, ce n'est donc pas la table de Pythagore de la multiplication dans $\mathbb{N}$ ; mais grâce aux techniques opératoires elle nous permet de trouver le produit de deux naturels quelconques.

Pour certaines lois il n'est pas intéressant d'avoir un «morceau» de la table de Pythagore. Ainsi pour le p.g.c.d. et le p.p.c.m. dans $\mathbb{N}$, on ne peut construire la table de Pythagore et aucune méthode ne donne le p.g.c.d. (p.p.c.m.) de deux nombres quelconques en fonction des p.g.c.d. (p.p.c.m.) de quelques nombres.

## III – LOI DE COMPOSITION : EXEMPLES ET CONTREXEMPLES.

Voici quelques situations. Cherchez parmi elles, celles qui correspondent à des lois de composition et faites la table de Pythagore lorsque c'est possible. (Vous trouverez les réponses à la fin de l'article).

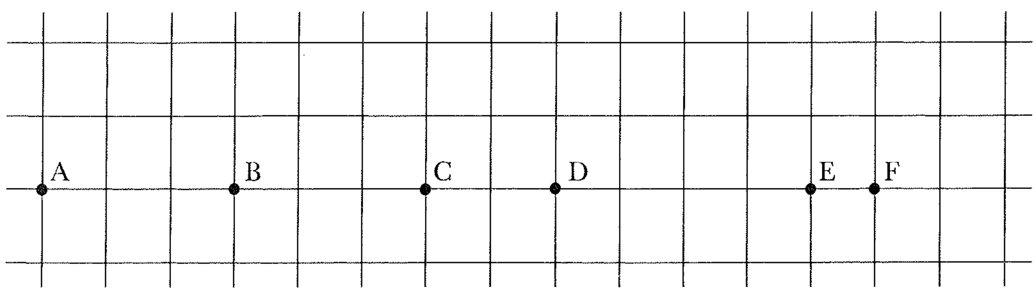
3.1 **Dans l'ensemble** $\{-1, 0, 1\}$ à tout couple (a, b) d'éléments de cet ensemble on fait correspondre $a \times b$.

3.2 **Dans l'ensemble** $\{-1, 0, 1\}$ à tout couple (a, b) d'éléments de cet ensemble on fait correspondre $a + b$.

3.3 **Dans l'ensemble** $\{0, 1, 2\}$ à tout couple (a, b) d'éléments de cet ensemble on fait correspondre $a \times b$.

3.4 **Dans l'ensemble** {maison, enfant, école, oiseau, fête, musique} à tout couple de mots on fait correspondre le plus long des deux mots (ou le mot lui-même si l'on prend deux fois le même).

3.5 **Dans le quadrillage** suivant on a placé des points A, B, C, D, E, F.



Dans l'ensemble $\{A, B, C, D, E, F\}$ à tout couple de points on associe le point qui est le milieu du segment dont les extrémités sont les deux points considérés (ou le point lui-même si l'on a pris deux fois le même point).

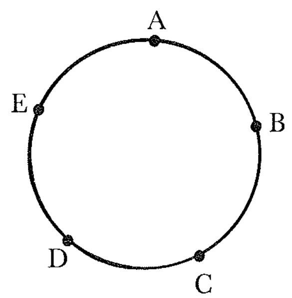
3.6 **Dans** $\mathbb{N} - \{0\}$ **à tout couple** $(x, y)$ de naturels on fait correspondre $x^y$.

Rappel : $x^y$ est le produit de $y$ facteurs égaux à $x$. Par exemple :

$4^2 = 4 \times 4 = 16$
$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
$7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7.$

Ainsi $(2, 5) \longmapsto 2^5$
$(1, 12) \longmapsto 1^{12}$
$(7, 4) \longmapsto 7^4$
etc...

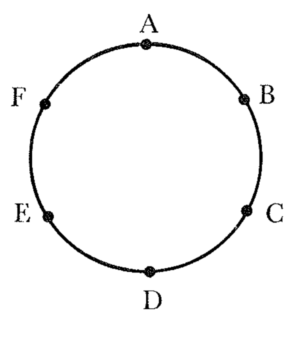
3.7 **Sur un cercle on place** 5 **points** A, B, C, D, E de façon que chaque arc $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EA}$ ait pour mesure 72°.




Dans l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$ à tout couple $(x, y)$ de points on associe le point de l'ensemble qui est au milieu d'un des deux arcs $\overset{\frown}{xy}$ (ou le point lui-même si $x = y$).

$(A, B) \longmapsto D$
$(C, E) \longmapsto D$
etc...

3.8 **Que se passe-t-il si l'on place six points** A, B, C, D, E, F sur le cercle de manière à avoir des arcs de 60° cette fois.



**3.9 Dans l'ensemble** $\{a, b, c, d\}$ **à tout couple de lettres on fait** correspondre son premier terme.

Ainsi $(c, d) \longmapsto c$
$(a, b) \longmapsto a$
$(c, c) \longmapsto c$
etc...

## IV – PROPRIETES DES LOIS DE COMPOSITION.

En nous servant, principalement, des lois de composition définies dans les chapitres précédents, nous allons étudier les tables de Pythagore suivantes :

| Max | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

| X | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| -1 | 1 | 0 | -1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | -1 | 0 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| E | C | A | D | B | E |
| D | E | C | A | D | B |
| C | B | E | C | A | D |
| B | D | B | E | C | A |
| A | A | D | B | E | C |
| * | A | B | C | D | E |

Nous avons tracé sur ces tables la diagonale passant par la case où se trouve la flèche.

On remarque que chacune de ces tables est symétrique par rapport à la diagonale tracée, c'est-à-dire que, si l'on plie les tables suivant la diagonale, dans les cases qui se superposent se trouvent les mêmes éléments.

Dans le cas général la case du couple (x, y) se superpose à celle du couple (y, x) à condition d'avoir écrit dans les deux entrées les éléments de l'ensemble dans le même ordre.

Constater alors que la table d'une loi de composition notée $*$ dans un ensemble E est symétrique par rapport à la diagonale passant dans la case où est la flèche, c'est constater que, **pour tout couple (x, y) de E $\times$ E on a**

$$x * y = y * x.$$

**On dit alors que la loi de composition $*$ est commutative dans E.**

Vous savez par exemple que, quels que soient les naturels a et b $a + b = b + a$. L'addition est commutative dans $\mathbb{N}$.

Examinons la table de Pythagore de la loi de composition qui dans l'ensemble {a, b, c, d} à tout couple de lettres fait correspondre son premier terme.

| T | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | a | a | a |
| b | b | b | b | b |
| c | c | c | c | c |
| d | d | d | d | d |

Il y a des couples (x, y) pour lesquels $x \top y \neq y \top x$. Par exemple

$$b \top c = b \ ; \ c \top b = c.$$

La loi $\top$ dans l'ensemble {a, b, c, d} n'est donc pas commutative.

Remarque.

Pour montrer qu'une loi de composition $*$ dans E n'est pas commutative il suffit de trouver un couple (x, y) d'éléments de E tel que

$$x * y \neq y * x.$$

Cherchez parmi les loi de composition précedemment rencontrées celles qui sont commutatives et celles qui ne le sont pas. (Réponses en fin d'article).

**4.2 Dans le cas de l'addition dans $\mathbb{N}$, on sait que**

$2 + 0 = 2$ ; $0 + 17 = 17$ ; $0 + 175 = 175$ ; etc...

Quel que soit le naturel a

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

On dit que 0 est élément neutre de l'addition dans $\mathbb{N}$.

Dans le cas de la multiplication dans $\mathbb{N}$

$1 \times 15 = 15$ ; $123 \times 1 = 123$ ; $0 \times 1 = 0$ ; etc...

Quel que soit le naturel a

$$a \times 1 = 1 \times a = a.$$

On dit que 1 est élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{N}$.

Dans la table de Pythagore de la loi «Max» dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, la ligne et la colonne du nombre 1 sont identiques aux entrées de la table (hachurées sur la figure) ce qui traduit le fait que, pour tout naturel a de $\{1, 2, 3, 4\}$ : Max(1, a) = a et Max(a, 1) = a.

| Max | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

1 est l'élément neutre de la loi «Max» dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.

**On dit que l'élément e de E est l'élément neutre de la loi de composition $*$ dans l'ensemble E si pour tout élément a de E :**

$$a * e = e * a = a.$$

1 est-il élément neutre de la loi «Max» dans l'ensemble {4, 5, 6} ? Dans $\mathbb{N}$ ?

Cherchez parmi les lois de composition précédemment rencontrées, celles qui ont un élément neutre et précisez lequel. (Réponses en fin d'article).

4.3 **Reprenons l'exemple 3.7 du paragraphe III. Dans l'ensemble** {A, B, C, D, E} (points situés sur un cercle tel que $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EA}$ aient pour mesure 72°) on a défini la loi de composition notée $\theta$ qui, à tout couple de points (x, y) associe le point de l'ensemble qui est au milieu d'un des deux arcs $\overset{\frown}{xy}$ (ou le point lui-même si x = y).

Voici la table de Pythagore de la loi $\theta$ :

| $\theta$ | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | A | D | B | E | C |
| B | D | B | E | C | A |
| C | B | E | C | A | D |
| D | E | C | A | D | B |
| E | C | A | D | B | E |

La table nous donne le composé de deux éléments par la loi $\theta$ ; ainsi : C $\theta$ B = E ; B $\theta$ D = C ; etc...

Peut-on composer trois éléments ? C, B, D par exemple.

On peut, soit composer C et B puis composer le résultat avec D ce qui se note :

$$(C\ \theta\ B)\ \theta\ D = E\ \theta\ D = B$$

soit composer C avec le résultat du composé de B et D ce qui se note :

$$C\ \theta\ (B\ \theta\ D) = C\ \theta\ C = C$$

ici $$(C\ \theta\ B)\ \theta\ D \neq C\ \theta\ (B\ \theta\ D).$$

Voici un autre exemple :

$$(A \;\theta\; B) \;\theta\; A = D \;\theta\; A = E$$

$$A \;\theta\; (B \;\theta\; A) = A \;\theta\; D = E$$

ici $$(A \;\theta\; B) \;\theta\; A = A \;\theta\; (B \;\theta\; A).$$

Les deux procédés de calcul ne donnent pas toujours le même résultat pour la loi de composition $\theta$ dans $\{A, B, C, D, E\}$.

Dans le cas de l'addition dans $\mathbb{N}$, on sait que, pour tous naturels a, b et c on a

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Les deux procédés de calcul donnant toujours le même résultat, on dit que l'addition dans $\mathbb{N}$ est associative. On parle alors de somme de trois naturels (ou de nombre de plus de trois éléments).

**Plus généralement, on dit qu'une loi de composition notée $\top$, dans un ensemble E est associative si, quel que soit le triplet (*) (a, b, c) d'élément de E :**

$$(a \top b) \top c = a \top (b \top c).$$

Les calculs faits ci-dessus montre que la loi $\theta$ définie dans l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$ n'est pas associative.

La multiplication dans $\mathbb{N}$ est associative car, quels que soient les naturels a, b et c :

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

On peut donc parler de produit de trois nombres.

La plupart des lois rencontrées précédemment sont associatives, c'est pourquoi on parle de l'intersection ou de la réunion de plusieurs ensembles, du p.g.c.d. du p.p.c.m. de plusieurs nombres.

**Pour prouver qu'une loi de composition notée $\Delta$ dans un ensemble E, n'est pas associative, il suffit de trouver trois éléments x, y, z de E tels que :**

$$(x \;\Delta\; y) \;\Delta\; z \neq x \;\Delta\; (y \;\Delta\; z).$$

(*) Il existe la même différence entre un triplet et un ensemble à trois éléments qu'entre un couple et une paire (ensemble à deux éléments).

Montrez que l'exponentiation dans $\mathbb{N}$ (exemple 3.6 du paragraphe III) n'est pas associative.

**4.4 Considérons l'addition dans $\mathbb{Z}$. 0 en est élément neutre. On sait que**

$$5 + (-5) = 0 \; ; \; (-3) + 3 = 0 \; ; \; 47 + (-47) = 0.$$

On dit que -5 est le symétrique de 5 pour l'addition et que 5 est le symétrique de -5 pour l'addition ou que -5 et 5 sont symétriques pour l'addition. De même 3 et -3 sont symétriques pour l'addition.

Deux nombres sont symétriques pour l'addition dans $\mathbb{Z}$ si leur somme est égale à l'élément neutre de l'addition, c'est-à-dire 0.

Dans le cas de la multiplication dans l'ensemble des nombres rationnels (entiers ou fractionnaires) deux nombres sont symétriques si leur produit est égal à l'élément neutre de la multiplication, c'est-à-dire 1.

Par exemple, 4 et $\frac{1}{4}$ sont symétriques pour la multiplication car $4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 4 = 1$ ; $\frac{1}{20}$ et 20 sont symétriques ; $\frac{7}{3}$ et $\frac{3}{7}$ aussi...

**En général, étant donné un ensemble E muni d'une loi de composition notée $*$ et d'un élément neutre e pour cette loi, on dit que l'élément a admet un symétrique $a'$ pour la loi $*$ si et seulement si**

$$a * a' = a' * a = e.$$

Remarque.

Pour l'addition le symétrique est parfois appelé opposé et pour la multiplication inverse.

**4.5 La multiplication dans $\mathbb{N}$, par exemple, présente la particularité suivante :**

$$0 \times 16 = 0 \; ; \; 47 \times 0 = 0 \; ; \; 1375 \times 0 = 0...$$

Quel que soit le naturel a : $a \times 0 = 0 \times a = a$.

On dit que 0 est élément absorbant pour la multiplication dans $\mathbb{N}$.

De même la loi Max définie dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ a un élément absorbant 4. En effet, pour tout élément x de $\{1, 2, 3, 4\}$ :

$$\mathrm{Max}(4, x) = \mathrm{Max}(x, 4) = 4.$$

La loi Max définie dans $\mathbb{N}$ possède-t-elle un élément absorbant ?

Parmi les lois précédemment rencontrées, quelles sont celles qui possèdent un élément absorbant ? Précisez cet élément s'il existe. (Réponses en fin d'article).

**4.6. Si nous nous limitons aux propriétés les plus courantes des lois** de composition il nous reste à étudier celle que l'on utilise très souvent en calcul mental et dans les techniques opératoires. Par exemple pour calculer le produit $25 \times 12$ on peut, entre autres, procéder de deux manières différentes.

**1ère méthode.**

$25 \times 12 = 25 \times (10 + 2)$
$25 \times (10 + 2) = (25 \times 10) + (25 \times 2)$
d'où $25 \times 12 = 300$.

**2ème méthode.**

$$\begin{aligned} 25 \times 12 &= (20 + 5) \times 12 \\ &= (20 \times 12) + (5 \times 12) \\ &= 300. \end{aligned}$$

Plus généralement, quels que soient les naturels a, b, c on sait que :

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \qquad (1)$$

De même, quels que soient les naturels x, y, z

$$(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z) \qquad (2).$$

On dit que dans $\mathbb{N}$ la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

**Etant donné un ensemble E muni de deux lois de composition notées $\theta$ et $\top$, on dit que la loi $\theta$ est distributive à droite par rapport à la loi $\top$ lorsque, quels que soient les éléments a, b, c de E**

$$(a \top b)\ \theta\ c = (a\ \theta\ c) \top (b\ \theta\ c)$$

**de même la loi $\theta$ est distributive à gauche par rapport à la loi $\top$ lorsque, quels que soient les éléments a, b, c de E**

$$a\ \theta\ (b \top c) = (a\ \theta\ b) \top (a\ \theta\ c).$$

Résumons : si la loi $\theta$ est commutative, si elle est distributive à droite par rapport à la loi $\top$ elle l'est également à gauche ; on dit plus simplement qu'elle est distributive par rapport à $\top$. C'est le cas de la multiplication par rapport à l'addition dans $\mathbb{N}$.

**Attention** ! l'addition n'est pas distributive par rapport à la multiplication. Vérifiez-le.

## V – EXERCICES.

Voici d'autres lois de composition dont vous pouvez chercher les propriétés. (Vérifiez vos résultats en consultant les réponses en fin d'article).

**5.1 Dans l'ensemble {a, b, c, d, e, f} de lettres de l'alphabet, la loi** qui à tout couple de lettres, associe la première lettre du couple ;
par exemple : (a, b) = a ; (e, f) = e ; (d, b) = d...

**5.2 Dans $\mathbb{N}$ la loi définie par**

$$\begin{cases} (x, y) \longmapsto \dfrac{x + y}{2} & \text{si } x + y \text{ est pair} \\ (x, y) \longmapsto \dfrac{x + y - 1}{2} & \text{si } x + y \text{ est impair} \end{cases}$$

par exemple : $(15, 7) \longmapsto 11$ car $\dfrac{15 + 7}{2} = 11$

$(24, 31) \longmapsto 27$ car $\dfrac{24 + 31 - 1}{2} = 27.$

**5.3 Dans $\mathbb{N}$ la loi définie par :**

$(x, y) \longmapsto 4xy + x + y.$

**5.4 Dans l'ensemble {a, b, c, d, e, f} la loi définie par la table de Pythagore.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f | e | a | b | f | d | f |
| e | b | f | e | e | d | a |
| d | a | b | c | d | e | f |
| c | d | d | e | c | c | d |
| b | a | b | d | b | f | b |
| a | c | a | d | a | b | d |
| $\perp$ | a | b | c | d | e | f |

**5.5 Inventez dans l'ensemble** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **une loi de composition** $\Delta$ respectant les règles suivantes :

- 5 est élément neutre de $\Delta$ ;
- 2 est élément absorbant de $\Delta$ ;
- 4 et 6 sont symétriques l'un de l'autre ;
- la loi $\Delta$ n'est ni commutative, ni associative ;
- $6 \Delta 4 = 5$
  $3 \Delta 3 = 6$
  $1 \Delta 4 = 6$.

**REPONSES.**

**III**

3.1 Loi de composition dans $\{-1, 0, 1\}$. Table de Pythagore immédiate.

3.2 Les couples $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ n'ont pas d'image : l'addition n'est pas une loi de composition dans $\{-1, 0, 1\}$.

3.3 Le couple $(2, 2)$ n'a pas d'image : la multiplication n'est pas une loi de composition dans $\{0, 1, 2\}$.

3.4 Le couple (maison, enfant) n'a pas d'image, la loi proposée n'est pas une loi de composition dans l'ensemble donné.

3.5 (A, B) n'a pas d'image, (F, D) non plus...

3.6 Ceci définit bien une loi de composition dans $\mathbb{N}$, on l'appelle «exponentiation».

3.7 La loi proposée est une loi de composition dans {A, B, C, D, E} que nous noterons : $*$ et dont vous trouverez la table de Pythagore en haut de la page ci-contre.

3.8 Dans l'ensemble {A, B, C, D, E, F} certains couples ((A, B) ; (E, B) ; etc...) n'ont pas d'image.

3.9 On a une loi de composition dans l'ensemble $M = \{a, b, c, d\}$. Nous la noterons $\alpha$, vous trouverez sa table de Pythagore en haut de la page ci-contre.

| * | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | A | D | B | E | C |
| B | D | B | E | C | A |
| C | B | E | C | A | D |
| D | E | C | A | D | B |
| E | C | A | D | B | E |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| d | a | b | c | d |
| c | a | b | c | d |
| b | a | b | c | d |
| a | a | b | c | d |
| $\alpha$ | a | b | c | d |

## IV Parmi les lois précédemment étudiées.

### 4.1 * Lois commutatives :

- l'addition dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$ ;
- la multiplication dans $\mathbb{N}$ ;
- l'addition des classes dans $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$ ;
- la multiplication des classes dans $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$ ;
- la loi «max» dans $\mathbb{N}$ ;
- l'intersection et la réunion dans E ;
- le p.g.c.d. et le p.p.c.m. dans $\mathbb{N}$.

*** Lois non commutatives :**

- la soustraction dans $\mathbb{Z}$ ;
- l'exponentiation dans $\mathbb{N}$ ;
- la loi $\alpha$ dans M.

### 4.2 Elément neutre.

1 n'est pas élément neutre de la loi max dans $\{4, 5, 6\}$. C'est 4 qui est élément neutre pour cette loi.

La loi max dans $\mathbb{N}$ a pour élément neutre 0, car pour tout naturel x : $\mathrm{Max}(0, x) = \mathrm{Max}(x, 0) = x$.

L'addition dans $\mathbb{Z}$ a pour élément neutre 0.

L'addition des classes dans $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$ a pour élément neutre $\dot{0}$.

La multiplication des classes dans $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$ a pour élément neutre $\dot{1}$

L'intersection dans E a pour élément neutre E.

La réunion dans E a pour élément neutre $\phi$.

Le p.p.c.m. dans $\mathbb{N}$ a pour élément neutre 1.

### 4.3 Lois associatives.

– La loi $\alpha$ dans $\{a, b, c, d\}$.
– La loi Max dans $\mathbb{N}$.

**L'exponentiation dans $\mathbb{N}$ n'est pas associative :**

car $(2^2)^3 \neq (2)^{2^3}$

en effet $(2^2)^3 = 4^3 = 64$

$(2)^{2^3} = 2^8 = 256$.

### 4.4 Elément absorbant.

La loi Max dans $\mathbb{N}$ ne possède pas d'élément absorbant

La multiplication dans $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$ a pour élément absorbant $\dot{0}$.

L'intersection dans E a pour élément absorbant $\phi$.

La réunion dans E a pour élément absorbant E.

Le p.g.c.d. dans $\mathbb{N}$ a pour élément absorbant 1.

## V Exercices.

5.1 Non commutative, associative, pas d'élément neutre, pas d'élément absorbant.

5.2 Commutative, non associative, pas d'élément neutre, pas d'élément absorbant.

5.3 Commutative, associative ; élément neutre 0, pas d'absorbant, aucun élément n'a de symétrique.

On peut montrer ainsi l'associativité de cette loi : $x * y = 4xy + x + y$.

Pour tous naturels x, y et z, on a :

$$
\begin{aligned}
(x * y) * z = (4xy + x + y) * z &= 4(4xy + x + y) z + (4xy + x + y) + z \\
&= 16xyz + 4xz + 4yz + 4xy + x + y + z \\
x * (y * z) = x * (4yz + y + z) &= 4x(4yz + y + z) + x + (4yz + y + z) \\
&= 16xyz + 4xy + 4xz + x + y + z
\end{aligned}
$$

donc : $(x * y) * z = x * (y * z)$.

5.4 Non commutative ($a \perp f \neq f \perp a$).

Non associative $[(c \perp b) \perp e \neq c \perp (b \perp e)]$.

Elément neutre : d.

Pas d'élément absorbant.

Eléments symétriques de a : c ; de b : c ; de c : a et b ; de d : d ; de e : e.

5.5 Voici deux réponses possibles.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 2 | 5 | 5 | 6 | 4 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 4 | 6 | 2 | 3 | 1 | 4 | 5 |
| 3 | 6 | 2 | 6 | 4 | 3 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 4 | 2 | 4 | 3 | 1 | 6 |
| Δ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 2 | 2 | 5 | 6 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 4 | 6 | 2 | 4 | 5 | 4 | 5 |
| 3 | 1 | 2 | 6 | 6 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 6 |
| Δ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Il en existe bien d'autres.