PRODUIT CARTESIEN

par Marie-Thérèse CHABROULET

I – QUELQUES EXEMPLES DE COUPLES ET DE PAIRES.

*** Score d'un match de football.**

A la lecture des résultats sportifs, les amateurs de football avertis ne confondent pas le score 3 - 1 du match Lyon-Bastia avec le score 1 - 3, lorsque Lyon reçoit Bastia.

Pour eux, le score 3 - 1 indique que Lyon a marqué trois buts et Bastia un seul alors que le score 1 - 3 indique que Lyon a marqué un but et Bastia trois.

Le score d'un match de football n'est autre qu'un couple de naturels noté dans ce cas là a – b (lu «ab» et non «a moins b») dans lequel a, le premier naturel écrit, indique le nombre de buts marqués par l'équipe qui reçoit et b, le deuxième naturel écrit, le nombre de buts marqués par l'équipe des visiteurs.

Avec cette convention, il apparaît clairement que les scores 1 – 3 et 3 – 1 sont distincts et que le score 2 – 2 correspond au match nul.

En mathématique, la notation a – b du score d'un match de football ne peut être conservée pour désigner un couple puisque traditionnellement, a – b est une écriture de la différence des nombres a et b.

Le couple de premier terme a et de second terme b est en général noté : (a, b).

∗ Description d'un lancer de deux dés.

Les deux dés sont lancés successivement.

Si le premier dé lancé indique 6 et le second 3 il est possible de décrire ce coup par le couple : (6, 3) en convenant que le premier terme écrit indique le résultat du dé lancé en premier et le deuxième terme écrit, celui du dé jeté ensuite.

Avec cette convention, (1, 4) indique un coup où le premier dé lancé a marqué 1 et le deuxième 4 ; il est différent du coup (4, 1). (3, 3) indique un coup où les deux dés ont marqué 3.

Les deux sont lancés simultanément.

Si les deux dés sont différenciables, par exemple par leur couleur, l'un étant vert l'autre rouge, on peut convenir de décrire un lancer des deux dés par un couple dans lequel le premier terme du couple indique le résultat du dé vert et le deuxième terme celui du dé rouge.

Que se passe-t-il si rien ne permet de différencier les deux dés ?

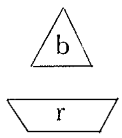
∗ Désignation de bateaux colorés.

Dans une série de bateaux qui ne diffèrent que par leur coloriage, deux d'entre-eux sont coloriés de la façon suivante :

b : bleu

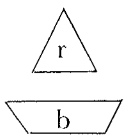
r : rouge

Il peut être commode de désigner ces bateaux



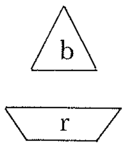
peut l'être par : coque rouge, voile bleue

et

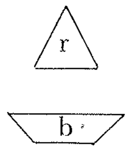


par voile rouge, coque bleue.

On peut convenir de les désigner en indiquant toujours en premier la couleur de la voile et, pour alléger les notations, de désigner

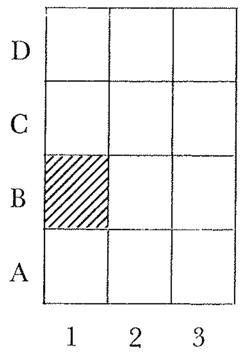


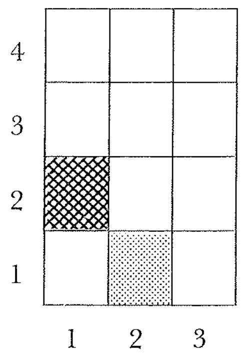
par (b, r) et



par (r, b).

* **Désignation de cases d'un quadrillage.**

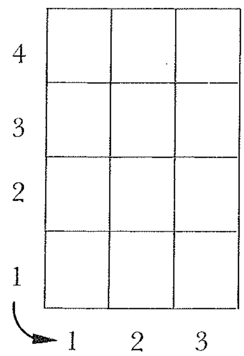




Dans le quadrillage de gauche la case hachurée peut être désignée par 1 - B ou B - 1.

Dans le quadrillage de droite, à quelle case correspond 1 - 2 ? Sans aucune précision, on ne peut pas dire s'il s'agit de la case quadrillée ou de la case sablée. Dans ce cas, pour désigner une case, il est nécessaire d'utiliser un couple en convenant, par exemple, d'écrire en premier le numéro de la ligne sur laquelle se trouve cette case, puis en second le numéro de la colonne.

Cette convention peut être précisée par une flèche de la façon suivante.



Avec cette convention la case quadrillée est désignée par le couple (2, 1) alors que le couple (1, 2) désigne la case sablée.

* **Dans le langage courant,** on parle de paire de boules, paire de dés, paire de lunettes. Si dans les deux premiers exemples, on peut considérer un ensemble de deux objets ce n'est pas le cas dans le dernier exemple.

Le mot «paire» du langage courant n'a pas toujours le sens que lui attribue le mathématicien. Pour lui, une paire est toujours un ensemble de deux éléments.

En reprenant l'exemple de la paire de boules, si l'une des boules est désignée par A et l'autre par B, la paire des boules A et B peut être désignée indifféremment par

$$\{A, B\} \quad \text{ou} \quad \{B, A\}.$$

Résumons-nous.

* **En mathématique, (x, y) est l'écriture d'un couple.**

Dans un couple on distingue le premier terme écrit du second. Une convention précise l'ordre d'écriture de ces termes. De ce fait : lorsque x et y désignent des objets différents les couples (x, y) et (y, x) sont différents.

L'écriture (x, x) a un sens.

* **{x, y} est l'écriture d'une paire** lorsque x et y désignent des éléments.

Puisqu'il n'existe pas d'ordre entre les éléments d'un ensemble :

$$\{x, y\} = \{y, x\}.$$

L'écriture {x, x} est sans intérêt, x désignant un seul objet, l'ensemble ayant pour élément x est noté {x}.

II – DEFINITION ET EXEMPLES DE PRODUIT CARTESIEN DE DEUX ENSEMBLES.

2.1 Définition.

Le produit cartésien d'un ensemble E par un ensemble F est l'ensemble de tous les couples (a, b) tels que le premier terme a soit un élément de E et le deuxième terme b, un élément de F.

On note cet ensemble E × F (lu «E croix F»).

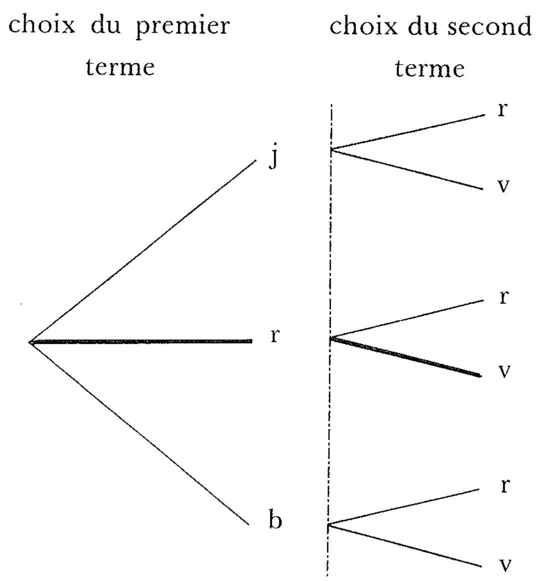
2.2 Exemples de produit cartésien.

Avec les conventions suivantes : j : jaune ; r : rouge ; b : bleu ; v : vert, on considère les ensembles de couleurs E et F définis par :

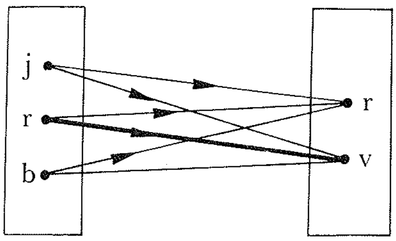
E = {j, r, b} ; F = {r, v}.

Cherchons tous les éléments de E × F, c'est-à-dire tous les couples dont le premier terme est une couleur de E et le deuxième terme une couleur de F. Plusieurs moyens peuvent être utilisés.

a) Arbre de choix.



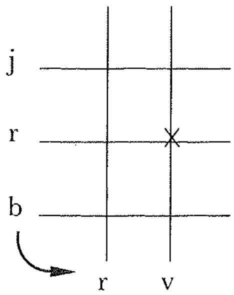
b) Diagramme sagittal.



c) Tableau cartésien.

	j	r	b
r			
v		X	

d) Diagramme cartésien.



— Le trait plus épais de a) avec lecture de gauche à droite ;
— la flèche plus épaisse de b) ;
— la case marquée d'une croix de c) ;
— le point marqué d'une croix de d) ;
matérialisent le couple (r, v) dans chacune des représentations précédentes de E X F.

Les éléments de E X F sont :

(j, r) ; (j, v) ; (r, r) ; (r, v) ; (b, r) et (b, v).

III – COMPARONS E X F ET F X E.

Les éléments de F X E sont tous les couples dont le premier terme appartient à F et le second à E. Il suffit, par exemple, de changer le sens des flèches du diagramme b) pour trouver tous ces couples : (r, j) ; (r, r) ; (r, b) ; (v, j) ; (v, r) et (v, b). Seul le couple (r, r) est commun aux deux ensembles. Les deux ensembles E X F et F X E sont donc différents.

Il est facile de voir que si, à chaque couple, on associe le bateau dont la couleur de la voile est indiquée par le premier terme et celle de la coque par le deuxième terme, les bateaux coloriés à partir des couples de E X F sont différents de ceux coloriés à partir des couples de F X E.