FONDEMENTS MATHÉMATIQUES DE LA PROPORTIONNALITÉ DANS LA PERSPECTIVE D'UN USAGE DIDACTIQUE

Arnaud SIMARD
IUFM de Franche Comté

Résumé. Pour justifier qu'une situation est conforme (ou non) au modèle proportionnel, les raisonnements heuristiques reposent sur des arguments de deux types. L'un concerne le retour à l'unité, l'autre concerne l'application de propriétés additive ou multiplicative. Ces arguments sont-ils valables mathématiquement ? C'est ce que nous cherchons à prouver dans cet article. Cette réflexion sur le modèle mathématique « proportionnalité » permet de catégoriser les procédures dans le but de les analyser. Dans un deuxième texte à venir, nous analyserons les réponses d'élèves de CM2-sixième confrontés à des problèmes de reconnaissance de situations de proportionnalité.

Mots-clés. Proportionnalité, théorie des proportions, fonctions linéaires.

Introduction

La proportionnalité est une notion qui traverse les programmes de mathématique de l'école et du collège. Son enseignement a été maintes fois discuté, critiqué et transformé (voir Hersant (2005)) et les réformes successives (dans l'enseignement français) semblent en partie responsables du manque de cohérence de sa forme actuelle (voir Brousseau (1995) ou Comin (2002)). Beaucoup d'écrits ont déjà été réalisés sur l'apprentissage de la proportionnalité, aussi bien d'un point de vue mathématique (Boisnard, Houdebine, Julo, Kerboeuf, Merri (1994) ou ERMEL (2001) par exemple) que didactique (Pfaff (2003), René de Cotret (1991), Bonnet (2011) par exemple) mais aussi psychologique (Levain, Vergnaud (1994) et Levain (1998) par exemple) ce qui prouve l'intense questionnement autour de cette notion. Dans son travail quotidien, l'enseignant de cycle 3 ou de collège utilise les programmes officiels et des manuels, il se trouve alors confronté à des choix qui ne sont pas toujours explicité (pourquoi utiliser le tableau de proportionnalité ? « Règle de trois » ou « produit en croix » ? Linéarité ou coefficient de proportionnalité ?...). Pour évaluer le degré de connaissance de ses élèves ou l'impact de son enseignement, l'enseignant doit également apprécier les compétences des élèves. Pour cela il doit pouvoir analyser les procédures des élèves, écrites ou orales. Il doit également être en mesure de valider ces procédures, de les classer, de les relier entre elles dans le but de les faire évoluer. C'est dans l'optique d'essayer de donner un nouvel éclairage sur les fondements mathématiques de la proportionnalité que cet article est rédigé. L'enseignant pourra ainsi trouver des pistes pour analyser les manuels et les productions de ses élèves. Dans un premier temps nous présenterons de manière synthétique les deux approches théoriques de la proportionnalité : « théorie des proportions » et « fonctions linéaires » en essayant de clarifier leurs liens. Ensuite nous tenterons de valider mathématiquement les raisonnements intuitifs (que nous pourrions qualifier d'heuristiques) des élèves confrontés à une situation de proportionnalité.
Pour illustrer notre propos nous allons nous référer au problème suivant :

Problème initial. Dans une recette de cuisine, on précise les quantités d'ingrédients pour un nombre de personnes donné. Cette situation est-elle modélisable par la notion de proportionnalité ?

Les arguments heuristiques pour justifier une réponse affirmative sont les suivants :
Argument 1 : « La situation relève du modèle proportionnel car si on multiplie le nombre de personnes dans une recette, on multiplie d'autant les quantités »
Argument 2 : « La situation relève du modèle proportionnel car si on connaît les quantités pour 5 personnes, on peut connaître les quantités pour une personne et ainsi connaître les quantités pour n'importe quel nombre de personne ».
Le problème que nous tentons de résoudre dans la deuxième partie de cet article est le suivant : ces arguments sont-ils valides mathématiquement pour justifier du modèle proportionnel ?

1. Théorie des proportions et fonctions linéaires

L'étude des programmes de l'école élémentaire montre que l'on est passé d'un enseignement de la proportionnalité basé sur la *théorie des proportions* à un enseignement basé sur la *linéarité*. On se réfèrera à l'article très documenté de Hersant (2005) pour de plus amples renseignements sur l'étude des programmes concernant la proportionnalité depuis 1887.
Jusque dans les années 1970, on enseignait les « problèmes de règle de trois », les « rapports de proportions » ainsi que les quantités « directement ou inversement proportionnelles ». L'utilisation du terme « proportionnalité » arrive avec les maths modernes en 1970 ainsi que le vocabulaire lié : « coefficient de proportionnalité », « suites proportionnelles », « tableau de proportionnalité » et surtout les « fonctions linaires » (qui structurent le modèle proportionnel). Brousseau (1995) montre comment l'enseignement de la proportionnalité a subi les différentes réformes des années 1970 à 1990. Après avoir insisté sur un enseignement global de la proportionnalité basé sur la linéarité, les programmes se sont vidés de l'architecture théorique conceptuelle des fonctions linéaires pour ne retenir qu'une part du vocabulaire associé ainsi que la présentation sous forme de tableaux de valeurs (les « tableaux de proportionnalité » dont l'utilisation trop précoce peut engendrer des obstacles comme on pourra le voir dans Brousseau (1995)). Nous référons également à Comin (2002) qui clarifie l'approche arithmétique de la théorie des proportions et l'approche algébrique des fonctions linéaires dans l'enseignement de la proportionnalité.

Nous choisissons de définir les situations de proportionnalité à partir des suites numériques finies. Cette définition de la proportionnalité a été donnée par Philippe et Dauchy dans leurs cours de 1920 sur la « théorie des proportions ». Le cadre arithmétique (lié à la théorie des proportions) semble plus naturel pour introduire les situations de proportionnalité, tandis que le cadre algébrique (fonctions linéaires) semble plus adapté pour parler du modèle proportionnel dans toute sa généralité, c'est ce que nous allons essayer de présenter dans ce paragraphe.

Définition. Deux suites de nombres qui se correspondent un à un sont proportionnelles lorsque les rapports de deux nombres correspondants sont égaux[1].

Nous avons choisi cette définition comme base de la proportionnalité car elle correspond, selon nous, à la plupart des contextes présentés à l'école et au collège (deux suites finies de nombres qui se correspondent). Bien entendu, la théorie des proportions n'a de sens que lorsque les rapports (correspondance entre écritures fractionnaires et quotient) ont été étudiés (programme de 6°/5°). Cette théorie insiste sur le rapport de deux termes se correspondant. La valeur de ce rapport (qui sera appelé coefficient de proportionnalité) est également la *valeur de l'unité* (qui correspond à la *valeur d'une part* dans le cadre des divisions partitions (voir

1 On notera que dans cette définition on passe sous silence le couple *(0, 0)*.

SCEREN 2010). Cette théorie débouche naturellement sur la technique du produit en croix dont la *règle de trois* est une expression contextualisée. En effet, le produit en croix donne la valeur d'une quatrième proportionnelle par application d'une technique sur les valeurs numériques : « si à a correspond b, dans le respect des proportions alors c correspond à bc/a » ($a/b = c/d$ implique $ad = bc$ puis $d = bc/a$). La règle de trois telle qu'on l'utilise dans les classes actuellement est généralement liée à un contexte et passe par une comptine en trois temps qui explicite le passage par la valeur de l'unité, par exemple : « Si *4* pains valent *2,40 euros*, alors *1* pain vaut *(2,40 euros / 4)* et *7* pains valent *7×(2,40 euros / 4)* » (ce qui donne le calcul *7×2,40/4* qui correspond au calcul donné par le produit en croix). Nous référons avec intérêt à la brochure SCEREN de Bonnet (2011) pour une analyse précise de la règle de trois.
Ainsi on associera les techniques dites du *retour à l'unité (calcul de la valeur de l'unité)* et la technique de *la règle de trois* avec la théorie des proportions.

Nous allons maintenant établir un lien avec les fonctions linéaires. Nous rappelons qu'une fonction f réelle de la variable réelle x est dite linéaire lorsqu'elle est du type $f(x) = ax$ où a est un nombre réel appelé coefficient de linéarité de la fonction (ou coefficient externe).
Si l'on se donne une situation de proportionnalité décrite par la théorie des proportions, le rapport commun (coefficient de proportionnalité) nous permet de définir une fonction linéaire dont le coefficient de linéarité est ce coefficient de proportionnalité. Cette fonction linéaire modélise mathématiquement la situation (les couples de données de la situation correspondent à des couples (antécédent, image) de la fonction linéaire). Réciproquement la donnée d'une fonction linéaire permet la construction de deux suites proportionnelles (ces deux suites coïncident avec un tableau de valeurs de la fonction linéaire).
Considérons l'ensemble de toutes les situations de proportionnalité. La relation « *possède le même coefficient de proportionnalité que* » permet de classer les situations selon leur coefficient de proportionnalité (le contexte n'étant plus qu'un « habillage » de la situation). Les fonctions linéaires peuvent ainsi être vues comme les représentants des classes d'équivalence des situations de proportionnalité. C'est l'argument qui nous permet de dire que les fonctions linéaires décrivent en toute généralité les situations de proportionnalité.
Les deux modèles « théorie des proportions » et « linéarité » modélisent les mêmes situations, la seule différence réside dans le champ d'action de ces théories. La théorie des proportions est adaptée au cadre discret (seulement une famille finie de valeurs) alors que la linéarité prolonge la théorie des proportions au cadre continu (fonction de la variable réelle)[2]. On peut illustrer cette distinction par les problèmes suivants :

Situation A. Dans la recette du poulet au citron il faut 2 citrons pour 5 personnes. Combien faut-il de citrons pour 20 personnes ?

Dans cette situation la variable « nombre de personnes » est forcément à valeur entière alors que dans la situation suivante :

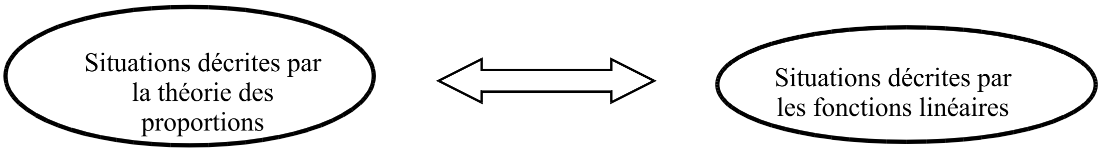
Situation A'. Sur un plan donné, 2 cm représentent 5 km. Par quelle distance représente-t-on une distance de 20 km ?

la variable « nombre de km » est à valeurs réelles (positives). On peut très bien se demander quelle est la circonférence sur le plan d'une parcelle circulaire de rayon 1 km, ce qui implique un travail dans l'ensemble des réels (et plus uniquement dans l'ensemble des entiers). Les

2 Dans le cadre graphique on trouve souvent « si des points sont alignés entre eux et avec l'origine du repère alors leurs coordonnées sont proportionnelles », cette phrase traduit graphiquement une situation de proportionnalité « discrète ». La droite qui relie les points et l'origine du repère représente la situation de proportionnalité « continue » associée à la fonction linéaire qui généralise la situation.

situations A et A' appartiennent toutes les deux à la classe d'équivalence des problèmes de proportionnalité représentée par la fonction linéaire définie par $f(x) = (2/5)x$ mais leur « domaine de définition » n'est pas le même.

L'équivalence ci-dessous est vraie moyennant le domaine de définition de ces théories.



Les deux modèles théoriques « théories des proportions » et « linéarité » ne sont pas enseignés pour eux mêmes ni à l'école élémentaire ni dans les premières années du collège (les rapports égaux n'ont de sens que lorsque la notion de rapport en tant que division en a un (6ème/5ème) et les fonctions linéaires sont enseignées en classe de 3ème). Pour autant la plupart des techniques issues de ces deux théories sont adaptées à l'école élémentaire et au collège.
Comme nous le verrons précisément dans la suite de cet article, les fonctions linéaires sont caractérisées par deux propriétés. La propriété additive $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (pour tout x et y réels) et la propriété multiplicative $f(k\times x) = k\times f(x)$ (pour tout x et k réels). Ces deux propriétés sont utilisées de façon implicite dans les procédures de résolution des problèmes de proportionnalité à l'école et au collège. On associera les propriétés additives et multiplicatives avec la linéarité. Il y a clairement un saut épistémologique entre l'utilisation des propriétés additives et multiplicatives (addition / multiplication) et le retour à l'unité (division) : les opérations mises en jeu ici dépendent du niveau de connaissance de l'élève.
Pour autant, les deux conceptions *théorie des proportions* et *linéarité* ne sont pas antinomiques et sont même appelées à coexister lorsque les élèves ont le bagage mathématique suffisant pour faire vivre ces deux théories (c'est-à-dire lorsque les fractions sont reconnues comme des divisions). L'important ne semble pas de choisir l'une ou l'autre des approches mais de développer une « culture professionnelle commune » qui devrait permettre aux professeurs de maîtriser progressivement les difficultés inhérentes à la notion de proportionnalité et de créer les instruments et les exercices nécessaires aux élèves pour les dépasser (voir Brousseau (1995)).

2. Propriétés caractéristiques de la proportionnalité

Pour que les lecteurs et l'auteur soient en accord sur les mêmes bases de savoirs et de notations, nous allons présenter des démonstrations qui reposent sur certains résultats mathématiques présentés en annexe.
Les fonctions linéaires (de l'ensemble des réels dans l'ensemble des réels) peuvent être caractérisées par une équation fonctionnelle, c'est l'objet du théorème suivant :

> **Théorème 1**. Soit f une fonction continue de R dans R. La fonction f vérifie la propriété « pour tous réels x et y $f(x+y) = f(x) + f(y)$ » si, et seulement si, elle est linéaire.

Le théorème 1 dit que la propriété additive est une propriété caractéristique des fonctions linéaires.

La démonstration de ce résultat repose sur trois arguments mathématiques. D'une part le principe de récurrence (voir annexe 1), la notion de continuité (voir annexe 3) et la densité de l'ensemble des rationnels dans l'ensemble des réels (voir annexe 4). La notion de continuité et celle de densité sont basées ici sur la notion de suite réelle (voir annexe 2).

Démonstration du théorème 1

Supposons que *f* soit une fonction continue de R dans R qui vérifie la propriété « pour tous réels x et y $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ». Montrons, en plusieurs étapes que cette c'est une fonction linéaire.

Première étape. Montrons que $f(0) = 0$.
On a $f(0) = f(0+0)$. On applique alors la propriété additive vérifiée par *f* pour obtenir $f(0) = f(0) + f(0)$ ce qui implique $f(0) = 0$.

Deuxième étape. Montrons que pour tout réel x on a $f(-x) = -f(x)$.
Soit un réel x. On a $f(x-x) = f(x+(-x))$. On applique alors la propriété additive vérifiée par *f* pour obtenir $f(x-x) = f(x) + f(-x)$ or $f(x-x) = f(0)$ et $f(0) = 0$. On peut en déduire que $f(x) + f(-x) = 0$ et ainsi $f(-x) = -f(x)$.

Troisième étape. Montrons que pour tout entier relatif n on a $f(n) = nf(1)$ (Propriété P_1).

On montre cette propriété en deux temps : d'une part pour les entiers (par récurrence) puis pour les entiers relatifs négatifs. On a $f(0)= 0\times f(1)$ ce qui initialise la démonstration par récurrence (la propriété est vraie pour $n = 0$).
Soit un entier n, on suppose que $f(n)= nf(1)$ (hypothèse de récurrence). Au rang $(n+1)$ on a $f(n+1) = f(n) + f(1)$ et par application de l'hypothèse de récurrence on obtient $f(n+1) = nf(1) + f(1)$ et ainsi $f(n+1) = (n+1)f(1)$ (ceci prouve l'hérédité de la propriété).
Le principe de récurrence nous permet de conclure que la propriété est vraie pour tout entier n.
D'autre part, si n est un entier relatif négatif, $(-n)$ est un entier, donc $f(-n) = (-n)f(1)$. Or la deuxième étape de la démonstration nous dit que pour tout réel x on a $f(-x) = -f(x)$ donc $f(n)=nf(1)$.
Nous allons maintenant prolonger cette propriété P_1 en une propriété plus générale P_2 : « si n est un entier relatif et que x est un réel, on a : $f(n\times x)= n\times f(x)$ ». Pour démontrer cette propriété, on reprend la démonstration précédente en où l'on remplace *1* par x.

Quatrième étape. Montrons que pour tout rationnel p/q on a $f(p/q) = p/q\times f(1)$ (Propriété P_3).

Soit un entier non nul q. La propriété P_2 donne : $f(q\times 1/q) = qf(1/q)$ or $f(q\times 1/q) = f(1)$ d'où $f(1/q) = 1/q\times f(1)$. Maintenant, pour tout entier relatif p et tout entier non nul q la propriétés P_2 donne $f(p/q) = p\times f(1/q)$ et le résultat précédent donne $p\times f(1/q) = p\times 1/q\times f(1)$. On en déduit que $f(p/q) = p/q\times f(1)$.

Cinquième étape. Montrons que pour tout réel x on a $f(x) = x\times f(1)$ (appelée propriété P_4).

Soit x un réel. On sait que l'ensemble des rationnels est dense dans l'ensemble des réels (annexe 4). Ainsi il existe une suite de rationnels (x_n) dont la limite est x. La propriété P_3 affirme que pour tous les rationnels x_n on a $f(x_n) = x_n\times f(1)$. La fonction f est supposée continue sur l'ensemble des réels, ainsi $f(x_n)$ tend vers $f(x)$ lorsque n tends vers l'infini (annexe 2 et 3). D'autre part $x_n\times f(1)$ tend vers $x\times f(1)$ lorsque n tend vers l'infini. Par unicité de la limite, on en déduit que $f(x) = x\times f(1)$.

Conclusion. Si on note $a = f(1)$ alors la fonction *f* est définie par $f(x) = ax$. La fonction *f* est bien une fonction linéaire.

Sixième étape (réciproque). Si l'on considère une fonction *f* linéaire de coefficient de linéarité a, alors pour tout couple de réel (x,y) on a : $f(x+y) = a(x+y)$ or $a(x+y)= ax + ay$ donc $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
Ceci achève la démonstration du théorème 1.

Le point crucial de la démonstration précédente est le suivant : si une fonction *f* (continue) vérifie la propriété additive alors elle est linéaire et son coefficient de linéarité est $f(1)$ « la valeur de l'unité ». Ceci clarifie le fait que la proportion commune, le coefficient de proportionnalité, le coefficient de linéarité de la fonction linéaire sous-jacente, la valeur de l'unité et $f(1)$ sont tous une expression de la même valeur.

Les fonctions linéaires vérifient également une seconde propriété que l'on retrouve très souvent en pratique de résolution de problème de proportionnalité : la propriété multiplicative[3].
On dit d'une fonction f qu'elle vérifie la propriété multiplicative lorsque pour tout couple de réels x et y on a $f(xy) = xf(y)$. Même si, en pratique, nous distinguons les propriétés additives et multiplicatives, nous allons prouver que ces deux propriétés sont équivalentes.

Théorème 2. Soit f une fonction continue. La fonction f vérifie la propriété additive si, et seulement si, elle vérifie la propriété multiplicative.

Démonstration du théorème 2

Première étape. Toute fonction linéaire vérifie la propriété multiplicative. (Propriété P_5)

En effet, soit f une fonction linéaire de coefficient de linéarité a alors, pour tout couple de réels x et y on a : $f(xy) = axy$ or $axy = xay$ donc $f(xy) = xf(y)$.

Deuxième étape. Si une fonction f continue vérifie la propriété additive, le théorème 1 implique que f est une fonction linéaire et la propriété P_5 implique qu'elle vérifie la propriété multiplicative.

Troisième étape (réciproque). Soit f une fonction continue qui vérifie la propriété multiplicative.
Montrons que $f(0) = 0$. On a $f(0) = f(0\times0)$. On applique alors la propriété multiplicative pour trouver $f(0\times0) = 0\times f(0)$ et donc $f(0) = 0$.
Soit (x,y) un couple de réels. Si x et y sont nuls alors $f(0) = 0$ implique $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$.
Supposons que x soit un réel non nul. Soit y un autre réel. On a :
$f(x+y) = f((1+y/x)\times x)$
$= (1 + y/x) f(x)$ (par application de la propriété multiplicative)
$= f(x) + (y/x)\times f(x)$
$= f(x) + f(y/x\times x)$ (par application de la propriété multiplicative)
$= f(x) + f(y)$

Ceci prouve que la fonction f vérifie la propriété additive.

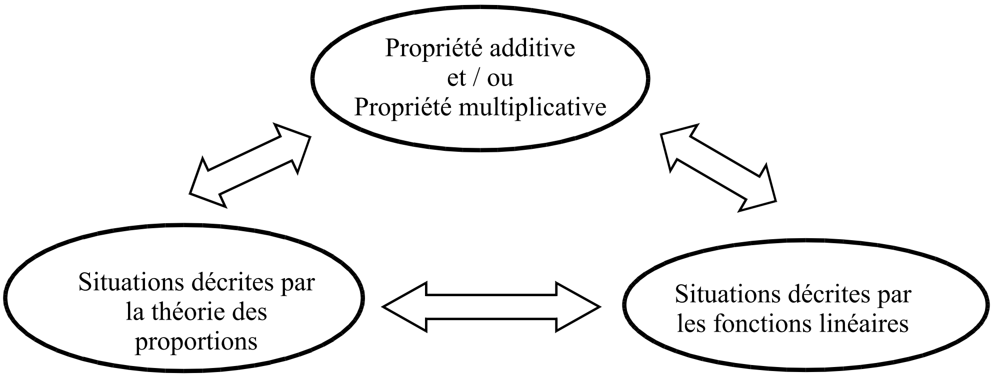
Le théorème 2 prouve que la propriété multiplicative est également une propriété caractéristique des fonctions linéaires.

Modéliser une situation par la notion de proportionnalité, c'est reconnaître (au moins implicitement) que de manière sous-jacente, une fonction linéaire régit la situation[4]. Or nous venons de prouver que les fonctions linéaires sont caractérisées par les propriétés additive et/ou multiplicative. Ainsi nous pouvons conclure que les propriétés additive et/ou multiplicative caractérisent les situations de proportionnalité.

3 La propriété multiplicative s'appelle également la propriété d'homogénéité ou la propriété scalaire.
4 Nous renvoyons au chapitre V de la thèse de Sophie René de Cotret (1991) pour un essai sur l'enseignement de la modélisation des situations de proportionnalité.

3. Validation mathématique des raisonnements heuristiques de reconnaissance des situations de proportionnalité

Les deux premières parties peuvent se résumer par le schéma suivant :



Nous allons maintenant voir comment ce schéma permet de valider les raisonnements heuristiques cités en introduction.

> **Problème initial.** Dans une recette de cuisine, on précise les quantités d'ingrédients pour un nombre de personnes donné. Cette situation est-elle modélisable par la notion de proportionnalité ?

Argument 1. « La situation relève du modèle proportionnel car si on multiplie le nombre de personnes dans une recette, on multiplie d'autant les quantités »
Argument 2. « La situation relève du modèle proportionnel car si on connaît les quantités pour 5 personnes, on peut connaître les quantités pour une personne et ainsi connaître les quantités pour n'importe quel nombre de personne ».

L'argument 1 est relatif à la propriété multiplicative. Cet argument est valable car on sait que si la situation est modélisée par une fonction continue qui vérifie la propriété multiplicative, alors elle est modélisée par une fonction linéaire. Donc c'est bien une situation de proportionnalité. L'argument 1 contient cependant les implicites suivants :

- la situation peut se modéliser par une fonction
- la fonction modélisante est continue

L'argument 2 est relatif au passage à l'unité. Cet argument est également pertinent mais il cache également les mêmes implicites que l'argument 1. En effet, dire que l'on peut connaître les quantités pour une personne (quand on les connaît pour 5) est déjà une application de la propriété multiplicative (on divise tout par 5). Or la propriété multiplicative est une caractérisation de la proportionnalité.

Les arguments heuristiques pour prouver qu'une situation relève du modèle proportionnel se justifient mathématiquement (la situation est « proportionnelle » car elle vérifie les propriétés caractéristiques de la proportionnalité). Ces mêmes arguments seront nettement plus convaincants pour montrer qu'une situation ne relève pas du modèle proportionnel. En effet, il suffit d'utiliser un raisonnement par contraposition[5] : il s'agit de mettre en défaut une propriété de la proportionnalité pour pouvoir conclure à la non proportionnalité. La contraposée la plus utilisée est la suivante « si on ne peut pas utiliser les propriétés additive ou

5 Soient deux propriétés P et Q. On souhaite montrer que P implique Q. Le raisonnement par contraposition consiste à prouver que « non Q » implique « non P ».

multiplicative, alors la situation n'est pas proportionnelle » qui est la contraposée de l'implication « si la situation est proportionnelle alors on peut utiliser les propriétés additive ou multiplicative ».

4. Conclusion

La proportionnalité est une notion mathématique centrale pour l'élève de primaire et du collège. Sa maîtrise est indispensable à la compréhension de la société dans laquelle nous évoluons. A ce titre, l'enseignement de cette notion doit être pensé et sans cesse renouvelé. L'apprentissage des techniques de la proportionnalité (tableau, règle de trois, produit en croix…) n'a de sens que si l'élève sait reconnaître, au moins intuitivement les situations de proportionnalité. En effet, tout élève peut être très compétent techniquement mais ne pas savoir quand utiliser ces techniques ou alors les utiliser à mauvais escient. Ainsi, parallèlement à l'apprentissage de techniques, le rôle de l'enseignant est de faire acquérir le sens de la proportionnalité aux élèves. Pour cela, le maître doit confronter ses élèves à des situations de proportionnalité et à des situations de non proportionnalité. Et il doit savoir gérer les débats entre élèves pour justifier si telle ou telle situation relève ou non du modèle proportionnel. Ceci pose le problème de la modélisation et de la justification de cette modélisation. Les raisonnements heuristiques qui consistent à se référer aux propriétés additive et multiplicative (ce qui inclut le retour à l'unité) sont valides mathématiquement car ils sont caractéristiques de la notion de proportionnalité. L'enseignant peut ainsi interpréter les productions des élèves en les reliant aux deux idées maîtresses : le passage à l'unité (orienté théorie des proportions) ou utilisation des propriétés additive et multiplicative (orienté linéarité). Ce classement peut lui servir pour diagnostiquer les représentations initiales de ses élèves face au raisonnement proportionnel et ainsi faire des choix didactiques pour orienter l'évolution des procédures des élèves.

Dans un texte à venir, nous présenterons des travaux d'élèves de CM2-6° confrontés à des problèmes de reconnaissance de situations de proportionnalité. Nous étudierons, en référence au cadre théorique développé dans cet article, les procédures intuitives de retour à l'unité ou de linéarité adoptées par les jeunes élèves ainsi que les arguments développés pour justifier de la non-proportionnalité.

Bibliographie

Socle Commun (2006) Le socle commun des connaissances et des compétences – décret n° 2006-830 du 11 juillet 2006.

BOHS (2004) Bulletin Officiel hors-série n° 5 du 9 septembre 2004.

BOHS (2008) Bulletin Officiel hors-série n° 3 du 19 juin 2008.

BOISNARD D., HOUDEBINE J., JULO J., KERBOEUF M-P., MERRI M. (1994) La proportionnalité et ses problèmes, Hachette.

BONNET N. (2011) *La proportionnalité sans problème*, SCEREN.

BOOS (2008) Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008.

BROUSSEAU G. (1995) Les Mathématiques à l'école, APM.

BROUSSEAU G. (1988) *Théorie des Situations Didactiques*, La Pensée Sauvage.

COMIN E. (2002) L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège, *Recherche en didactique des mathématiques,* 22 (2.3), 135-182, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CNDP (2002) *Document d'application des programmes, Mathématiques cycle des approfondissements cycle 3*, CNDP.

DUFETEL A., LACROIX-SONRIER M.T. (1997) *Analyse : cours et exercices résolus*, Vuibert.

EDU (2005) Ressources pour les classes de 6°, 5°, 4° et 3° du collège, Proportionnalité au collège, Eduscol.

ERMEL (2001) *Apprentissages mathématiques en 6°*, Institut National de Recherche en Pédagogie, Hatier.

GILLE E. (2008),Proportionnalité en Seconde … et apprentissage de la citoyenneté, *Bulletin de l'APME,* Num. 474. p. 11-19.

HERSANT M. (2005) La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui, *Repère – IREM* n°59, pp 5 à 41.

HOUDEMENT C. (1999), Le choix des problèmes pour la « résolution de problèmes », Grand N n°63, pp. 59 à 76.

HOUDEMENT C. (2003) La résolution de problème en question, Grand N n°71, pp. 7 à 23.

PFAFF N. (2003) Différencier par les procédures : un exemple pour la proportionnalité au cycle 3, *Grand N* n°71, pp. 49 à 59.

PHILIPPE, DAUCHY *cours d'arithmétique*, Dunod, 1920.

LEVAIN J.P. (1998) *Faire des maths autrement, Développement cognitif et proportionnalité*, L'Harmattan.

LEVAIN J.P., VERGNAUD G. (1994), Proportionnalité simple, proportionnalité multiple, *Grand N* n°56, pp. 55 à 66.

SCEREN (2010) *Le nombre au cycle 2*, SCEREN.

RENE DE COTRET S. (1991), *Étude de l'influence des variables indice de proportionnalité du thème et nombre de couples de données sur la reconnaissance, le traitement et la compréhension de problèmes de proportionnalité chez des élèves de 13-14 ans*, thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10. n° 23.

Annexe 1. Le principe de récurrence

Le principe de récurrence est basé sur l'axiome de Peano qui définit l'ensemble des entiers naturels.

Axiome de Peano
On postule l'existence d'un triplet *(0, N, S)* où *N* est un ensemble, 0 est un élément particulier de *N* et *S : N→N* une application qui vérifie les propriétés suivantes :

P_1 : *S* est injective ;

P_2 : l'image de *N* par *S* est *N\{0}* noté *N** ;

P_3 : si *A* est une partie de N qui vérifie

A contient 0

A est telle que pour tout élément *n* de *N*, si *n* est dans *A* alors *S(n)* est dans *A*

Alors *A = N*.

Par définition, cet ensemble *N* s'appelle l'ensemble des entiers naturels. L'élément *0* s'appelle « zéro », l'application *S* s'appelle application successeur (si *n* est un élément de *N* alors *S(n)* est le successeur de *n*) ; la propriété P_3 s'appelle axiome de récurrence.

Théorème. Soit *P(n)* une assertion qui dépend d'une variable *n* de *N*. Si ces assertions vérifient les propriétés suivantes :

P(0) est vraie ;

Pour tout élément *n* de *N*, si *P(n)* est vraie alors *P(S(n))* est vraie ;

alors pour tout élément *n* de *N, P(n)* est vraie.

Preuve
Soit *A* l'ensemble des éléments *n* de *N* tels que *P(n)* est vraie.
A est un sous ensemble de *N*.
0 appartient à *A* par hypothèse.
De plus, si *n* appartient à *A* alors *S(n)* appartient à *A* par hypothèse également.
L'axiome de Peano implique directement *A = N* ce qui prouve que pour tout élément *n* de *N*, *P(n)* est vraie.

Remarque
- C'est ce théorème qui est utilisé pour rédiger des preuves par récurrence.
- On peut « améliorer » le principe de récurrence pour produire d'autre raisonnement (récurrence faible et récurrence forte).

Annexe 2. Rappel sur les suites réelles

Nous donnons dans cette annexe des résultats et des définitions classiques sans démonstrations (le lecteur intéressé trouvera tous ces résultats démontré dans tout livre d'analyse de première année de licence). Les résultats présentés ici servent en particulier à la compréhension des annexes 3 et 4.

Définition. Une suite est une injection de *N* dans *R*.

Remarque. On note généralement (a_n) une suite de réel. L'injection correspondante est l'application $a : N \rightarrow N$ telle que $a(n) = a_n$.

Définition. On dit que la suite (a_n) est croissante (respectivement décroissante) lorsque pour tout entier n on a $a_{n+1} \geq a_n$ (respectivement $a_{n+1} \leq a_n$).

Définition. On dit que la suite (a_n) converge vers le réel a si pour tout réel $\varepsilon>0$ il existe un entier N de *N* tel que pour tout entier $n \geq N$ on a $\left| a_n - a \right| < \varepsilon$.

Théorème. Toute suite réelle croissante et majorée converge.

Définition. On dit que les suites réelles (a_n) et (b_n) sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et que leur différence tends vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Théorème. Deux suites réelles adjacentes convergent. De plus elles ont la même limite.

Annexe 3. La continuité des fonctions réelles de la variable réelle

Nous présentons ici une définition de la continuité dans le cadre particulier des fonctions réelles de la variable réelle. Cette définition est équivalente à la définition générale d'une fonction continue dans le cadre des fonctions entre espaces métriques (l'important étant que l'on puisse définir et utiliser la notion de suite).

Définition. Soit f une fonction de *R* dans *R*. Soit a un réel. On dira que la fonction f est continue en a lorsque pour toute suite (a_n) qui converge vers a alors la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(a)$.

Annexe 4. Densité de l'ensemble des rationnels dans l'ensemble des réels

La notion de densité est une notion topologique que nous allons présenter dans une version simplifiée et adaptée au cadre dans lequel nous travaillons.

Propriété. Pour tout réel a il existe une suite de rationnels (a_n) qui converge vers a.

Remarque. Cette propriété définit la densité de l'ensemble des rationnels dans l'ensemble des réels.

Preuve de la propriété
La preuve proposée de cette propriété repose sur l'utilisation de la fonction « partie entière ». Cette fonction est définie de la manière suivante $E : R \rightarrow N$ et vérifie, pour tout réel x la propriété suivante $E(x) \leq x < E(x)+1$ (cette fonction fait correspondre à tout réel l'entier directement inférieur).
On se donne un réel x.

Première étape. Montrons que la suite $(E(10^n x) / 10^n)$ est une suite croissante. (il s'agit de la suite des troncatures par défaut de x).
On a $E(x) \leq x$ donc $10E(x) \leq 10x$. Or $10E(x)$ est un entier inférieur à $10x$ donc il est inférieur à $E(10x)$ soit $10E(x) \leq E(10x)$ donc $E(x) \leq E(10x) / 10$. Soit un entier n, on remplace x par $10^n x$ dans l'inégalité trouvée précédemment, on a donc : $E(10^n x) \leq E(10 \times 10^n x) / 10$ donc $E(10^n x) \leq E(10^{n+1} x) / 10$ et, en divisant les deux membres de cette inégalité par 10^n *on trouve* $E(10^n x) / 10^n \leq E(10^{n+1} x) / 10^{n+1}$. Ceci prouve que la suite $(E(10^n x) / 10^n)$ est une suite croissante.

Deuxième étape. Montrons que la suite $(E(10^n x) / 10^n + 1 / 10^n)$ est une suite décroissante. (il s'agit de la suite des troncatures par excès de x).
On a $x < E(x)+1$ donc $10x < 10E(x) + 10$. Or $10E(x) + 10$ est un entier, donc $E(10E(x) + 10) = 10E(x) + 10$. On prend la partie entière de chaque côté de l'inégalité (la fonction partie entière est évidemment croissante) pour obtenir $E(10x) < 10E(x) + 10$. Nous obtenons ici une inégalité stricte entre deux entiers. Donc, cette inégalité implique que $E(10x) + 1 \leq 10E(x) + 10$ puis, en divisant chaque membre par 10 on trouve : $E(10x) / 10 + 1 / 10 < E(x)+1$. On remplace x par $10^n x$ dans l'inégalité trouvée précédemment, on a donc : $E(10^{n+1} x) / 10 + 1 / 10 < E(10^n x) + 1$. Et enfin on divise chaque membre de l'inégalité par 10^n ainsi : $E(10^{n+1} x) / 10^{n+1} + 1 / 10^{n+1} < E(10^n x) / 10^n + 1 / 10^n$. Ceci prouve que la suite $(E(10^n x) / 10^n + 1 / 10^n)$ est une suite décroissante.

Troisième étape. Les deux suites $(E(10^n x) / 10^n)$ et $(E(10^n x) / 10^n + 1 / 10^n)$ sont adjacentes.
En effet, l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux
$E(10^n x) / 10^n + 1 / 10^n - E(10^n x) / 1 = 1 / 10^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Par le théorème des suites adjacentes, les deux suites $(E(10^n x) / 10^n)$ et $(E(10^n x) / 10^n + 1 / 10^n)$ convergent et elles ont même limite.

Quatrième étape. On a $E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1$ donc, en divisant tous les membres de cette inégalité par $10^n x$ on obtient $E(10^n x) / 10^n \leq x < E(10^n x) / 10^n + 1 / 10^n$ il suffit de conclure par le théorème des encadrements (ou par unicité de la limite) que les deux suites $(E(10^n x) / 10^n)$ et $(E(10^n x) / 10^n + 1 / 10^n)$ convergent vers x.

Conclusion. Les suites $(E(10^n x) / 10^n)$ et $(E(10^n x) / 10^n + 1 / 10^n)$ sont des suites de rationnels qui convergent vers le réel x. Il existe donc au moins deux suites de rationnels dont la limite est x, ce qui démontre la propriété souhaitée.