ACTIVITÉ … AIRE D'UN TRIANGLE : LA FORMULE DE HÉRON

Denise GRENIER
Institut Fourier - UJF et IREM de Grenoble

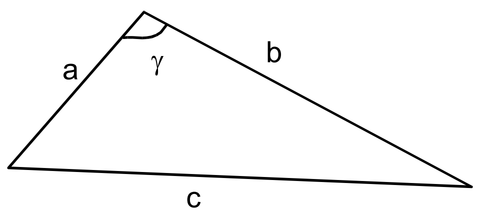
En géométrie, les structures métriques sont fondamentales. Les propriétés de la distance euclidienne telles que spécifiées par la formule de Pythagore suffisent à entraîner toutes les autres propriétés de la géométrie (euclidienne comme affine). En particulier, l'aire qui est une notion affine doit théoriquement pouvoir se calculer par une expression faisant intervenir seulement les distances.

Dans le cas du calcul de l'aire d'un triangle quelconque (abordée maintenant dès le CM2), la seule formule donnée – y compris jusqu'à la fin du collège – est celle utilisant la mesure d'une hauteur relative à un des côtés*. Or cette formule, accessible dès que l'on connaît celle de l'aire d'un rectangle, n'est pas si « naturelle » que cela, car ce que l'on connaît le plus souvent d'un triangle est la donnée des mesures de ses trois côtés.

L'activité suggérée ici consiste à établir la formule de Héron, qui donne l'aire d'un triangle quelconque à partir uniquement des mesures *a, b* et *c* des trois côtés.

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{où} \quad p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

Proposition de calcul**.



Choisissons l'un quelconque des angles du triangle, par exemple γ. On peut utiliser les propriétés suivantes (cf. les notations de la figure ci-dessus).

- A= ½ a.*b*. sin γ (on retrouve cette formule en utilisant celle usuelle A=½ *b.h*, où *h* est la mesure de la hauteur relative au côté de mesure *b*, et l'égalité $h=a \sin\gamma$, sans pour autant avoir besoin de calculer *h*).
- $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ pour tout angle *x*.
- $c^2=a^2+b^2-2a.b.\cos\gamma$, où γ est l'angle du triangle opposé au côté noté *c*.

On obtient la formule de Héron, écrite uniquement en fonction des mesures *a, b et c* des trois côtés.

Cette formule (déjà connue des Grecs) a de plus l'intérêt d'être symétrique relativement aux trois côtés du triangle.

* On trouve même parfois des écritures évoquant « la » base par « la » hauteur du triangle, sans explication sur le choix et la non unicité de ces deux éléments.
** Un autre calcul est possible, qui utilise les propriétés du cercle inscrit au triangle.