

CONSOLIDER LA MAÎTRISE DE LA NUMÉRATION ET DES GRANDEURS À L'ENTRÉE AU COLLÈGE. LE SYSTÈME MÉTRIQUE PEUT-IL ÊTRE UTILE ?

Christine CHAMBRIS

Laboratoire de Didactique André Revuz - Université Paris-Diderot
IUFM - Université de Cergy-Pontoise

Résumé. Dans ce texte, nous partons du constat de l'insuffisance de la maîtrise de la numération chez beaucoup d'élèves de Sixième, et poursuivons trois objectifs : montrer comment on peut consolider ces savoirs sur la numération, notamment celle des entiers, en exploitant les relations entre système métrique et numération, et par là même consolider la maîtrise des grandeurs ; montrer qu'il est donc aussi possible d'inscrire les objectifs d'étude du système métrique dans d'autres, relatifs à l'étude des nombres et des grandeurs. Enfin dans cet article nous insistons notamment sur l'importance de l'enseignement des unités de numération et des relations entre elles. Nous proposons aussi des pistes pour développer le travail des ordres de grandeurs des unités métriques, et les tâches d'estimation.

Mots-clés. Numération, grandeurs, unités, système métrique.

***Remerciements.** Ce texte et ses versions préliminaires ont bénéficié de nombreuses relectures. Il constitue en effet une reprise d'un projet de document d'accompagnement des programmes 2008 pour le cycle 3. A ce titre, il a bénéficié des relectures de Marie Mégard (Inspectrice Générale de l'Enseignement Primaire). Il a aussi été discuté au sein du groupe de recherche M 615 : ressource et continuité des apprentissages (LDAR – Université Paris-Diderot Paris 7, LML – Université d'Artois) et par les membres de la commission calcul du groupe départemental maths de l'Essonne. Enfin, il a été relu par les rédactions de Grand N et de Petit X. Je remercie vivement tous ces relecteurs pour leurs remarques fructueuses.*

Introduction

Les enquêtes diligentées par le ministère de l'éducation nationale depuis une quinzaine d'années (évaluations nationales à l'entrée en 6^e notamment), des recherches plus spécifiques (Chambris 2008) laissent apparaître une connaissance médiocre du système métrique par les élèves de fin de primaire. Par ailleurs, des résultats de recherches (Parouty 2005, Chambris 2008, Tempier 2009) convergent et permettent d'identifier des difficultés dans l'enseignement et l'apprentissage de la numération en France.

La numération décimale de position - notre numération écrite en chiffres - est un système de désignation des nombres. Elle est essentielle dans les mathématiques dès l'école primaire. Elle permet de désigner à la fois les entiers et les décimaux. Elle simplifie notamment les calculs des différentes opérations. Pour s'en convaincre, il suffit d'essayer de calculer une multiplication de deux nombres à plusieurs chiffres en chiffres romains !

Par ailleurs, la numération orale et le système métrique sont deux thèmes qui constituent aussi des objectifs d'enseignement. Tout comme celles de la numération décimale de position, leurs fondations sont en base dix. Ils constituent ainsi deux autres systèmes de désignation des nombres (ou des grandeurs) à base dix. Un enjeu est alors de les utiliser pour consolider la connaissance de la numération décimale de position. Comment les liens peuvent-ils se faire ?

Fondamentalement, ce texte¹ a pour ambition de contribuer à trois objectifs :

- montrer comment consolider la maîtrise de la numération des entiers notamment en exploitant au mieux les relations favorables entre système métrique et numération ;
- étudier comment consolider la maîtrise des grandeurs en exploitant au mieux l'étude du système métrique ;
- inscrire les objectifs d'étude du système métrique dans d'autres, relatifs à l'étude des nombres et des grandeurs.

Autrement dit, il s'agit d'étudier comment il est possible, d'une part de consolider l'enseignement de la numération des entiers, d'autre part de consolider l'étude du système métrique et d'en faire un outil au service de la numération des entiers, des grandeurs et du sens des nombres.

Pour poursuivre les buts annoncés, les questions étudiées sont alors les suivantes. Que peut-on dire de l'enseignement actuel de ces deux thèmes ? Quels en sont les enjeux ? Quelles sont leurs logiques respectives ? Quelles en sont les difficultés connues d'enseignement ou d'apprentissage ? Quels leviers peut-on utiliser pour faire évoluer ces enseignements ? Et aussi, en quoi le rapprochement des deux thèmes est-il pertinent pour cette double étude : ébaucher un état des lieux de l'enseignement actuel de chacun de ces thèmes et envisager des actions sur l'enseignement ?

Sur le plan méthodologique, pour étudier ces questions, nous utilisons les moyens suivants : des analyses de textes (programmes, manuels scolaires, ressources pour la formation des enseignants), des questionnaires réalisés auprès d'élèves et plusieurs années d'expérience comme formateur pour le premier degré qui nous renseignent indirectement sur les pratiques des enseignants. Ces moyens permettent d'abord d'ébaucher un état des lieux de la situation actuelle, pour la comprendre et pour la caractériser. Cet état des lieux et des analyses épistémologiques et didactiques permettent ensuite d'identifier des leviers pour faire évoluer la situation et de décliner des pistes plus précises pour agir sur l'enseignement.

La première section rassemble des éléments sur les savoirs en jeu en numération et indique des raisons d'enseigner le système métrique aujourd'hui. La deuxième section, en introduisant une perspective historique, donne des éléments pour caractériser l'enseignement de la numération et celui des relations entre système métrique et numération actuellement. Les troisième, quatrième et cinquième sections, en explicitant un parallèle entre les deux domaines, mettent en avant la complémentarité possible des apprentissages. Ce sont d'abord l'introduction des unités qui est envisagée, puis deux dimensions du travail de la numération : la position et les relations entre unités. La sixième section est consacrée à la question des ordres de grandeur des grandeurs. Les estimations de grandeurs et l'utilisation des instruments de mesure interviennent alors pour consolider tel ou tel aspect de la numération et développer davantage le sens des nombres... et la connaissance des grandeurs.

1. Identifier les savoirs en jeu

Une analyse de manuels scolaires et de ressources pour la formation montre qu'il est nécessaire de reconstituer ou de rassembler, dans un texte à destination des enseignants, les savoirs en jeu dans l'enseignement de la numération. Pour ce qui concerne le système métrique, ce sont des raisons de l'enseigner qui semblent manquer le plus.

¹ Ce texte constitue une reprise d'un projet de document d'accompagnement des programmes 2008 pour le cycle 3.

1.1 Savoirs en jeu en numération

Le paragraphe qui suit n'est pas exhaustif. En particulier, il ne contient rien qui concerne la numération orale ou les grands nombres car notre étude n'est pas suffisamment aboutie sur ce point. D'autres éléments sont cependant disséminés dans la suite du texte.

Théorème de décomposition polynomiale d'un entier dans une base

Le savoir de référence pour la numération de position est souvent formulé à l'aide du théorème fondamental de décomposition polynomiale d'un entier dans une base qui peut s'énoncer comme suit :

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2. Tout entier naturel non nul a s'écrit de façon unique sous la forme $a = a_n b^n + \dots + a_1 b^1 + a_0$ où n est un entier naturel et pour tout i a_i est un entier compris entre 0 et $b - 1$, et $a_n \neq 0$.

Ce théorème de décomposition des nombres est utile pour toute numération ayant une base unique, qu'elle soit positionnelle ou non.

Les unités de numération

Tout au long de ce texte les mots et expressions unités, dizaines, centaines, milliers, dizaines de milliers... sont très largement utilisés. Ils désignent des unités de compte. On les appellera les *unités de numération* (Chambris 2008)². De même qu'on a compté 1, 2, 3, 4, 5 unités, on compte 1, 2, 3, 4, 5 dizaines³. Ces unités de numération désignent donc les puissances de dix sans recours aux notations de type 10^n ou 1000.

Les relations entre les unités

Les unités de numération ne sont pas indépendantes les unes des autres et la maîtrise des relations entre elles constitue, comme on le verra, un enjeu important pour l'enseignement. Parmi ces relations, il y a donc : 1 dizaine = dix unités, 1 centaine = dix dizaines, 1 millier = dix centaines, 1 dizaine de millier = dix milliers... et aussi mille milliers = un million...

D'autres relations plus complexes sont aussi nécessaires, par exemple : 4 milliers = quarante centaines ou 1 millier = cent dizaines. Pour prouver la première, on peut par exemple dire qu'un millier, c'est dix centaines, 4 milliers, c'est 4 fois plus. Donc, 4 milliers, c'est quarante centaines. Et aussi, quarante, c'est 4 dizaines ; quarante centaines, c'est 4 dizaines de centaines. Donc quarante centaines, c'est 4 milliers. Le même type de raisonnement permet d'établir qu'un millier c'est cent dizaines. Un millier c'est une dizaine de centaines et une centaine est une dizaine de dizaines, donc un millier est une centaine de dizaines.

2 Le mot *unité* est polysémique. En particulier, l'unité désigne d'abord la quantité qui sert de référence pour établir une mesure (ou un dénombrement). En numération, le mot désigne aussi les unités successives qu'on est amené à fabriquer pour les besoins du système de désignation, c'est-à-dire les *différents ordres* d'unités (voir par exemple Reynaud 1821, §2). L'unité de référence est l'unité du 1^{er} ordre, on l'appelle parfois unité simple. La dizaine est l'unité du 2^e ordre, elle est constituée par dix unités du 1^{er} ordre, la centaine est l'unité du 3^e ordre constituée par dix unités du 2^e ordre, etc. Contrairement à une période plus ancienne, dans l'école actuelle, la référence aux *différents ordres d'unités* a quasiment disparu et nous introduisons l'expression *unités de numération* pour évoquer spécifiquement les unités utilisées dans l'étude de la numération de position.

3 L'apprentissage de la numération (et de la multiplication) nécessite ainsi de concevoir au moins implicitement des unités composites, c'est-à-dire constituées de plusieurs éléments : la dizaine qui contient dix unités ou la centaine qui en contient cent... Les élèves doivent ainsi apprendre à voir **dix** quand ils comptent **un** (une dizaine).

Une décomposition particulière en unités de numération

Toute quantité se décompose de manière unique en une somme d'unités de numération dans laquelle chaque unité est présente en au plus 9 exemplaires (par exemple 5 centaines 6 dizaines), cette décomposition est souvent qualifiée de canonique (la plus simple). Cet énoncé n'est autre qu'une formulation, utilisant les unités de numération, du théorème de décomposition polynomiale d'un entier en base dix. Ce qu'on appelle le « chiffre des dizaines » est ainsi le coefficient des dizaines dans la décomposition canonique (le 6 dans 560 ou dans 5 centaines 6 dizaines)⁴. D'autres décompositions en unités existent (par exemple 4 centaines 16 dizaines ou encore 3 centaines 17 dizaines 90 unités).

Principes de la numération écrite chiffrée : position et décimalité

Notre système écrit de numération lie deux aspects : position et décimalité (Serfati 2005, Tempier 2010). Dans l'aspect positionnel, ce qui importe c'est le fait que chaque position indique une unité de numération. Pour un nombre entier en écriture chiffrée, il y a deux façons de repérer les positions : de droite à gauche ou de gauche à droite. Chacune a ses avantages et ses inconvénients. Dans ce texte la première position désigne le chiffre de droite, le chiffre des unités. Dans l'aspect décimal, ce qui importe c'est la relation entre les unités : deux unités consécutives sont dans le rapport dix.

Ces deux aspects sont condensés dans la phrase : chaque chiffre indique une unité qui est dix fois plus grande que celle qui est à sa droite. Il importe de travailler spécifiquement chacun de ces aspects, car ils sont très liés dans le système écrit. Ce n'est pas le cas dans toutes les numérations rencontrées à l'école. Ainsi, comme le suggère la suite du texte, utiliser d'autres systèmes de numération (en unités, orale, métrique...) constitue un moyen pour le faire.

Propriété de la troncature

Conséquence des aspects position et décimalité, une propriété fondamentale de l'écriture chiffrée est la *propriété de la troncature*⁵ : « Pour qu'un nombre exprime des unités d'un certain ordre, il suffit que son chiffre des unités exprime des unités de cet ordre. » (Reynaud 1821, §2) Par exemple 2345 est formé de 2 milliers et 345 unités, de 23 centaines et 45 unités ou encore de 234 dizaines et 5 unités.

L'examen de la signification de chaque chiffre d'une écriture chiffrée et les relations entre unités permettent de prouver cette propriété. Par exemple, pour un raisonnement pas à pas : dans 2345, 2 en 4^e position signifie 2 milliers d'unités, 3 signifie 3 centaines d'unités, 4 signifie 4 dizaines d'unités. Mais 1 millier est une centaine de dizaines et 1 centaine est une dizaine de dizaines. Finalement, 2345 contient 2 centaines de dizaines, 3 dizaines de dizaines, 4 dizaines et 5 unités. En utilisant, à nouveau mais dans l'autre sens, le principe de position pour *compter ensemble les dizaines*, on obtient qu'il y a 234 dizaines et 5 unités dans 2345.

Le principe de position et la propriété de la troncature se généralisent ainsi à tous les ordres d'unité. Par exemple : dans 1234 centaines, le chiffre qui est en 2^e position à partir de la droite indique des dizaines de centaines, c'est-à-dire des milliers. Et, 1234 centaines est aussi 123 milliers 4 centaines. Cette propriété fournit une façon « automatique » d'obtenir le « nombre de » à partir d'une écriture chiffrée. Elle est d'ailleurs parfois amalgamée avec lui. Pourtant, le nombre de centaines de 4 milliers est 40. Il ne convient donc pas toujours de « couper le nombre » pour trouver le « nombre de ». Aussi, une utilisation généralisée précoce et

4 Le « chiffre des dizaines » est donc un nombre.

5 Cette propriété de la numération décimale de position n'a apparemment pas de nom dans la littérature mathématique (Chambris 2008).

« automatique » de cette propriété n'aide probablement pas à comprendre la numération. En revanche, l'utiliser, avec précaution, en variant les formulations et les usages, d'abord pour les nombres de 3 chiffres, puis pour ceux de 4 chiffres, etc. est sans doute pertinent.

1.2 Savoirs en jeu : grandeurs et système métrique

*Grandeur*⁶

Très tôt dans l'histoire, les hommes ont appris à compter des choses, des cailloux, des moutons, des quantités discrètes... On peut toujours déterminer combien un ensemble fini contient d'objets, il y a une unité privilégiée mais on ne peut pas toujours diviser un tel ensemble en parts égales. Qu'est-ce que partager trois dictionnaires en deux parties égales ? Par ailleurs, dès la plus haute antiquité, les hommes ont manié des objets possédant diverses grandeurs. Et si, à l'inverse de ce qui se passe pour les ensembles finis (ensembles d'objets discrets), un fil par exemple peut être partagé en parts égales (du point de vue de sa longueur), on ne peut pas dire de prime abord combien il contient d'unités. Il n'y a pas d'unité privilégiée pour décrire la longueur d'un fil. Plus généralement, il n'y a pas d'unité privilégiée pour « compter » ou « mesurer » les grandeurs, qui sont continues.

Comprendre ce que c'est qu'être long, lourd, volumineux, comprendre comment se comparent, s'additionnent, se fractionnent en parts égales, se mesurent les grandeurs, tout cela participe de la conceptualisation des grandeurs. Cette étude s'engage dès le cycle 1, elle se poursuit au cycle 2, puis au cycle 3, et au collège. Concernant les relations entre grandeurs et nombres, on trouve sur Eduscol notamment deux documents : l'un centré sur les nombres qui parle aussi des grandeurs (DGESCO 2006), l'autre centré sur les grandeurs qui parle aussi des nombres (DGESCO 2007).

Pourquoi enseigner le système métrique aujourd'hui ?

Le système métrique est un système d'unités inventé pour unifier le système de mesure sur tout le territoire français mais surtout pour que la résolution des problèmes de mesurage et de calcul des grandeurs bénéficie des propriétés de la numération décimale de position. Le choix des préfixes métriques tant d'origines grecque que latine en témoigne : *kilo-* pour mille, *hecto-* pour cent, *deca-* pour dix, *deci-* pour dixième, *centi-* pour centième et *milli-* pour millième.

Avec l'évolution des technologies de mesurage et de calcul, la maîtrise des relations entre numération et système métrique n'est sans doute plus aussi cruciale qu'elle l'a été. L'enjeu de l'enseignement du système métrique pour la société actuelle est de développer une bonne maîtrise des unités métriques usuelles pour traiter les problèmes de la vie courante. Pour atteindre cet objectif à l'école, une explicitation des relations avec la numération semble favorable à l'apprentissage. En retour, la numération bénéficierait du temps passé à étudier le système métrique. De plus, réaliser des tâches d'estimation de grandeurs est une activité reconnue comme favorable au développement du « sens des nombres ». Réaliser certaines de ces tâches en unités métriques permet là encore d'espérer un bénéfice double : mieux maîtriser les unités métriques usuelles du point de vue des ordres de grandeurs, mieux connaître les nombres.

6 Ce paragraphe doit beaucoup à Rouche (2007).

Que sont des articulations possibles entre numération et système métrique ?

Pour continuer à répondre à cette question, considérons les quatre exercices suivants :

- 1) Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ?
- 2) Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 8 kg de farine ?
- 3) Le nombre de centaines de 8734 est ...
- 4) 8 kg = hg

On peut effectivement interpréter ces exercices comme quatre variations du même exercice de numération : convertir 8 milliers en centaines. Ceci n'est possible qu'à condition de repérer que la relation entre milliers et centaines est en jeu dans chacun d'eux : un millier c'est dix centaines ou dix centaines c'est un millier.

Par exemple, trouver le « nombre de » centaines de 8734 consiste à trouver combien il y a de centaines dans 8734. Le 8 (4^e position) indique 8 milliers qui sont aussi 80 centaines. Le 7 (3^e position) indique 7 centaines. En tout, il y a donc 87 centaines. De la même façon, trouver le nombre de paquets de 100 feuilles qu'il faut pour avoir 8564 feuilles revient à trouver combien il y a de centaines (100 feuilles, le 1 est en 3^e position, c'est une centaine de feuille) dans 8563 feuilles. La technique de l'exercice précédent donne 85 centaines. Il faut bien sûr ajouter 1 paquet qui ne sera qu'entamé, soit 86 paquets.

Pour déterminer combien de fois de 100 g sont contenues dans 4 kg, on peut interpréter 4 kg comme 4 milliers de g et 100 g comme 1 centaine de g (1 en 3^e position) puis convertir 4 milliers en centaines ou encore interpréter 100 g comme 1 hg et convertir les 4 kg en hg comme dans l'exercice suivant. En effet, 8 kg = hg peut se traduire dans les unités de numération en 8 milliers de grammes à convertir en centaines de grammes, soit 8 milliers en centaines. Les raisonnements précédents reposent tous sur la relation entre millier et centaine. En outre, selon les exercices, le principe de position ou la signification des préfixes métriques sont sollicités.

2. Comprendre les logiques institutionnelles actuelles

La première section a fourni des éléments pour repenser les logiques de l'enseignement de la numération et du système métrique. Dans cette deuxième section, il s'agit de mettre en évidence les logiques actuellement à l'œuvre. Quelles sont-elles ? Comment se sont-elles développées ?

2.1 Éléments d'histoire de l'enseignement

Pour comprendre les logiques respectives de l'enseignement actuel de la numération et du système métrique un détour historique est utile (Chambris 2008). Pour diverses raisons, la réforme des mathématiques modernes -au début des années 1970 en primaire- apparaît comme un moment clé. A cette époque des modifications profondes de l'enseignement des mathématiques ont lieu, d'autres sont seulement amorcées. De plus, même si certains changements impulsés au moment de la réforme ont fait long feu, ce n'est pas le cas de tous. Des analyses de textes, notamment de manuels scolaires et de textes officiels du 20^e siècle, permettent de mettre en évidence des évolutions qui concernent soit les relations entre numération et système métrique, soit spécifiquement la numération.

Une des ambitions de la réforme réside dans la volonté d'enseigner des « mathématiques modernes ». Pour ce qui concerne la numération de position des entiers, cela se manifeste notamment par le changement de théorie mathématique de référence : les manuels abandonnent ainsi progressivement la référence à la théorie classique qui fait appel aux « unités », « dizaines », « centaines » ... (voir par exemple Reynaud 1821, §2) pour référer de plus en plus exclusivement à la théorie savante – le théorème de décomposition polynomiale d'un entier dans une base qui ne nécessite aucune autre unité que le nombre un. La référence à la théorie savante, très présente dans les années 1980, est moins visible dans les livres pour le maître aujourd'hui.

Le domaine mesure est une création de la réforme. Auparavant, depuis 1923 au moins, l'enseignement du système métrique est mêlé à celui des nombres et constitue un contexte pour l'étude de la numération. Certains types de tâches et leurs techniques de traitement sont communs à la numération et au système métrique : par exemple décomposer en ses unités 5040, décomposer en ses unités 5040 m. Ces techniques reposent sur les unités de numération : dans 5040 le 5 représente des milliers et le 4 des dizaines, de même dans 5040 m le 5 représente des milliers de mètres qui sont des *kilo* - mètres et le 4 des dizaines de mètres donc des *déca* - mètres.

Ces exemples montrent aussi que pour mener à bien la technique, il est nécessaire non seulement de faire appel aux unités de numération, mais aussi à la signification des préfixes métriques lorsque la tâche relève de l'étude du système métrique. Pour diverses raisons, notamment l'introduction du travail en bases, la création du domaine mesure et l'introduction de la théorie savante, le maillage serré entre numération et système métrique ne survit pas à la réforme. Le système métrique va alors vivre dans le nouveau domaine mesure et la numération dans le domaine numérique, chacun évoluant séparément, les liens entre les deux devenant de plus en plus ténus.

Plus précisément, depuis les années 1960, malgré un appauvrissement probable, l'enseignement du système métrique (et non celui des grandeurs) est relativement stable comparativement à celui de la numération. Certaines tâches « anciennes » de « numération » ont survécu dans l'étude du système métrique alors qu'elles ont disparu de l'étude de la « numération » : il s'agit surtout du travail des relations entre unités. Par exemple convertir 5 km en hm a survécu alors que convertir 5 milliers en centaines a disparu. Dans le même temps, de nouvelles tâches ont été introduites en numération : notamment le dénombrement de grandes collections. Pour ce qui concerne les « décompositions », celles « en unités de numération » (du type 5 milliers 4 dizaines) ont plus ou moins disparu de l'enseignement de la numération au profit d'autres en « écritures chiffrées des puissances de dix » (du type $5 \times 1000 + 4 \times 10$) qui ont émergé à la fin des années 1970 alors que les décompositions correspondantes en unités métriques (5 km 4 dam) ont perduré malgré un enseignement devenu probablement marginal de la signification des préfixes métriques.

2.2 Sur les relations actuelles entre système métrique et numération

Quels liens entre les deux thèmes les manuels scolaires actuels proposent-ils ?

Une étude de manuels scolaires actuels montre peu de liens entre ce qui est proposé en système métrique et ce qui est proposé en numération. Voici deux exemples courants liés aux tableaux dans chacun des domaines au début du cycle 3.

En numération :

m	c	d	u
4	5	2	3

4 523

4 523 =
4 000 + 500 + 20 + 3
(4 x 1 000) + (5 x 100) + (2 x 10) + (3 x 1)

4	0	0	0	→	4 000
	5	0	0	→	500
		2	0	→	20
			3	→	3

Figure 1. Tableau des nombres et exemples de décompositions associées

En système métrique :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
5	6	8	3			
		4	2	7		

5 km 6 hm 8 dam 3 m = 5 683 m
427 cm = 4 m 2 dm 7 cm

Figure 2. Tableau des unités de longueur et exemples de décompositions associées

A chaque tableau sont associées des décompositions (ou recompositions) de formes différentes et les deux tableaux sont remplis différemment. Par exemple, les nombres sont « calés à droite » dans le tableau de numération alors qu'ils « flottent » au milieu du tableau de conversion. En système métrique, il n'y a de zéro ni dans les décompositions, ni dans le tableau alors qu'en numération ils sont présents aux deux endroits.

Quels liens entre les deux thèmes les élèves font-ils ?

Pour étudier les connaissances des élèves actuels sur numération et système métrique, les quatre exercices déjà cités ont été proposés à 273 élèves de fin de CM2, nous les redonnons ci-dessous :

- 1) Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ?
- 2) Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ?
- 3) Le nombre de centaines de 8734 est ...
- 4) 8 kg =hg

En fin de cycle 3, les élèves reconnaissent majoritairement des exercices de division dans les deux premiers. Ils associent le troisième à la numération : il faut « couper » le nombre ; et le quatrième au système métrique : une conversion qui se résout en utilisant un tableau. L'étude des productions montre en outre que la relation entre milliers et centaines n'est utilisée que très marginalement et seulement pour traiter les deux premiers.

Quels liens les manuels et les élèves pourraient-ils faire ?

On l'a vu, on peut considérer ces quatre exercices comme quatre variantes du même exercice de numération sur la relation entre centaines et milliers dans différents contextes. À ce titre,

ils ont leur place dès le début du cycle 3 (sauf le 4^e, pour lequel l'unité « hectogramme » doit être connue). Le contexte clé pour percevoir le lien entre eux, pratiquement inexistant dans les manuels scolaires actuels de primaire, n'est pas non plus présent dans ces exercices. C'est celui des unités de numération : « combien 4 milliers font-ils de centaines ? » et aussi « combien quarante centaines font-elles de milliers ? ». Ces deux questions peuvent se formuler de diverses façons notamment : « convertir 4 milliers en centaines » et « convertir quarante centaines en milliers ».

Utiliser des tableaux ou des divisions pour traiter l'un ou l'autre de ces exercices est pertinent à certains moments de l'étude. **Quelle qu'elle soit, disposer d'une « même » technique pour traiter les quatre exercices favorise les liens entre les différentes connaissances (division, numération, système métrique).** Disposer d'une technique commune qui utilise le fait que 1 millier = 10 centaines consolide cette connaissance de numération. La question de l'élaboration de cette technique sera étudiée dans la section suivante.

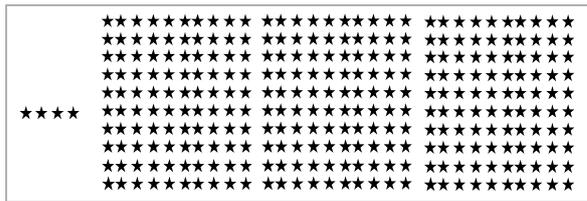
Fondamentalement, être capable de mobiliser, dans les différents contextes, le rapport dix sous-jacent (sans nécessairement expliciter le passage par centaine et millier) est un bon indicateur de la perception du lien entre les questions. D'ailleurs, à terme, pour traiter « 8 kg =hg », il est sans doute préférable d'utiliser directement le fait que « un kilogramme, c'est une dizaine d'hectogrammes » et donc que 8 kg sont 8 dizaines d'hg, soit 80 hg, plutôt que référer à la relation entre milliers et centaines.

2.3 Sur l'enseignement actuel de la numération : les unités de numération

Un diagnostic : la seule unité est le nombre 1

Résultant des évolutions depuis la réforme, la situation actuelle des unités de numération apparaît comme un nœud pour élaborer un état des lieux de l'enseignement de la numération. Des recherches récentes sur les manuels scolaires (Chambris 2008, Tempier 2010), sur les connaissances des élèves (Parouty 2005, Chambris 2008) et sur les pratiques des enseignants (Parouty 2005, Tempier 2009) sont convergentes. En faire la synthèse permet de caractériser la situation de ces unités et d'arriver à la conclusion que les unités de numération vivent très mal dans l'enseignement français actuel. Ainsi, ces unités vivent-elles dans le tableau de numération et dans quelques décompositions réglées dont « chiffre des », « nombre de » mais les relations entre unités du type « 1 millier = 10 centaines » ne sont pas systématiquement enseignées. Les problèmes du type « Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ? » qu'on peut donc résoudre en mobilisant cette relation sont massivement échoués avant l'apprentissage de la division par un nombre à 3 chiffres et sont majoritairement considérés comme des problèmes de division par les enseignants de cycle 3 (Parouty 2005). Fondamentalement, la seule unité présente dans l'enseignement de la numération semble être le « nombre 1 ».

La figure 3 présente un support, des étoiles, et deux exercices de dénombrement de grandes collections. Le premier comporte trois tâches : combien y a-t-il de dizaines d'étoiles ? Combien y a-t-il de centaines d'étoiles ? Combien y a-t-il d'étoiles ? Dans le deuxième, on demande seulement d'entourer 23 dizaines d'étoiles. On peut noter des éléments qui les distinguent : dans le premier exercice collection et unités sont données et il faut trouver le nombre, alors que dans le second, nombre et unité sont donnés et il faut construire la collection. Aujourd'hui, dans le meilleur des cas, les manuels scolaires de cycle 3 proposent seulement la tâche « combien y a-t-il d'étoiles ? ».

**Exercice 1 :**

Combien y a-t-il de dizaines d'étoiles ?

Combien y a-t-il de centaines d'étoiles ?

Combien y a-t-il d'étoiles ?

Exercice 2 :

Entoure 23 dizaines d'étoiles.

Figure 3. Tâches de dénombrement de grandes collections

Les unités de numération sont en fait actuellement bien davantage utilisées pour repérer un rang dans une écriture chiffrée -la dizaine pour la deuxième position à partir de la droite par exemple- que comme des unités de compte. Ces éléments sont à rapprocher de ceux de Ma (1999) et Tempier (2010) mais ils les précisent. Pour l'enseignement français, l'utilisation exclusive de l'unité "un" et la disparition des unités "composites" (cf. note 3) dans l'apprentissage de la numération apparaissent ainsi comme les deux facettes d'un même phénomène.

Une perspective pour faire évoluer l'enseignement actuel de la numération consiste alors à restaurer d'une part les unités de numération en tant qu'unités de compte et d'autre part l'enseignement des relations entre ces unités, comme le suggère le paragraphe suivant.

Des relations entre unités potentiellement omniprésentes

En effet, une analyse des savoirs en jeu dans les mathématiques en primaire montre l'importance des unités de numération et des conversions entre ces unités, elles interviennent dans de nombreuses tâches connexes à l'étude de la numération (système métrique, justification des techniques de calcul posé, calcul mental, décimaux...). Pour faire un état des lieux des relations entre unités dans l'enseignement actuel, il est nécessaire de distinguer si ces relations sont explicites ou implicites. Ensuite, par des analyses, à titre prospectif, on peut envisager de rendre explicites dans l'enseignement certaines de ces relations et des raisons de le faire.

Avec les quatre exercices impliquant la relation de millier à centaines, nous avons déjà vu comment la même relation pourrait intervenir en système métrique et en numération pour unifier le point de vue sur plusieurs objets. Actuellement, les tâches du type « convertir 40 centaines en milliers » et « convertir 4 milliers en centaines » sont courantes dans l'étude du système métrique par exemple sous la forme $4 \text{ kg} = \dots \text{ hg}$ et $40 \text{ hg} = \dots \text{ kg}$ et rares dans celle de la numération. C'est un exemple de relations actuellement implicites entre unités de numération dont on peut penser que l'explicitation serait favorable à l'apprentissage.

Les conversions entre unités sont souvent implicitement nécessaires, sur le plan mathématique, pour justifier les techniques utilisées en numération ou en calcul. Même si les énoncés des suites numériques écrites ou orales de 1 en 1, dix en dix, cent en cent etc. doivent progressivement être automatisés, à un moment il est pertinent d'apprendre aux élèves à justifier les changements de dizaines, centaines, milliers dans ces suites. C'est le rapport dix entre unités successives qui permet de le faire. Par exemple, s'il s'agit de justifier la suite croissante de cent en cent - 3800, 3900, 4000, 4100 -, on peut dire qu'on ajoute une centaine à chaque fois : 3 milliers 8 centaines, 3 milliers 9 centaines, 3 milliers dix centaines – mais dix centaines, c'est 1 millier, 3 milliers et un millier, c'est 4 milliers -, puis 4 milliers 1 centaine⁷.

7 On peut aussi compter les centaines (38, 39, 40, 41) en utilisant la propriété de la troncature, la difficulté est alors reportée sur les changements de dizaines.

De même, c'est le rapport « dix » entre unités successives (associé au principe de position) qui permet de justifier que $800 + 200 = 1\ 000$ car 8 centaines (3^e position) et 2 centaines font dix centaines qui font 1 millier (4^e position).

Comme le montre Tempier (2010), l'utilisation de ces relations devrait être incontournable pour justifier les retenues dans les techniques de l'addition ou de la soustraction, de la multiplication et aussi pour justifier l'algorithme de la division par les unités successives si c'est celui-ci qui est enseigné. Elle est en fait souvent évitée ou contournée.

Ainsi, dans la justification des techniques de calcul posé, ces relations sont souvent nécessaires sous la forme : 24 dizaines = 2 centaines 4 dizaines. Pour justifier par exemple, la multiplication posée par un nombre d'un chiffre 182×3 , on peut écrire : 2 unités $\times 3 = 6$ unités (3 fois 2, 6) ; 8 dizaines $\times 3 = 24$ dizaines (3 fois 8, 24) et 24 dizaines = 2 centaines + 4 dizaines (on pose 4 et on retient 2) ; 1 centaine $\times 3 = 3$ centaines (3 fois 1, 3), 3 centaines + 2 centaines = 5 centaines (3 et 2, 5) ; $182 \times 3 = 546$.

Les relations entre unités du système de numération (ou, plus directement, la propriété de la troncature) permettent de justifier l'écriture des zéros à droite (ou les déplacements de virgule) dans les multiplications par 10, 100, 1000 : $23 \times 100 = 23$ centaines = 2 milliers 3 centaines = 2 300.

Pour justifier les retenues dans la technique de l'addition ou de la soustraction, certains manuels rendent explicites les relations du type 12 dizaines = 1 centaine 2 dizaines au moment de cette justification alors que ces relations n'ont jamais été travaillées au préalable (et ne le seront jamais par la suite dans le manuel). Ce besoin même peut être contourné par les enseignants ou les manuels. Un argument spatial, extrêmement efficace sur le plan pragmatique mais sans fondement sur le plan mathématique, permet parfois de « justifier » la retenue : on ne met qu'un chiffre par colonne dans le tableau de numération⁸. Pour les autres techniques opératoires, les mêmes arguments ou d'autres moyens permettent de contourner le besoin notamment en s'appuyant sur la technique de l'addition : par exemple introduire la soustraction comme une addition à trou, poser une addition itérée pour établir la technique de la multiplication par les nombres d'un chiffre.

« Le calcul de $238 + 69$ peut s'effectuer, sans support écrit, en interprétant 69 comme 7 dizaines moins 1. La somme est alors de 30 dizaines ($23 + 7$) et de 7 unités ($8 - 1$) soit 307. » Cette citation tirée de *Le nombre au cycle 2* (Durpaire et Mégard 2010, p. 44) indique qu'une lecture directe du nombre de dizaines de 238 est pertinente pour réaliser ce calcul mentalement. On pourrait aussi dire 3 dizaines et 7 dizaines donnent dix dizaines qui sont une centaine, en mobilisant la relation entre dizaine et centaine sans utiliser la propriété de la troncature.

Dans l'étude des décimaux, les unités de numération sont plus présentes qu'avec celle des entiers, en particulier parce que ces unités sont utilisées dans certaines désignations orales. Mobiliser les relations entre unités peut renforcer la compréhension de l'écriture à virgule : par exemple 0,34 se lit usuellement « 34 centièmes ». La lecture « chiffre par chiffre » donne « 3 dixièmes 4 centièmes ». La relation 3 dixièmes = 30 centièmes (tirée de 1 dixième = 10 centièmes) relie les deux lectures. Parouty (2005) montre que l'enseignement de problèmes de numération en contexte fait progresser les élèves dans toute la numération. Il se trouve que les problèmes donnés en exemple dans le texte pré-cité sollicitent implicitement les relations entre unités.

8 Cet argument spatial est discuté dans la section suivante.

Pour de multiples raisons, il semble ainsi important et nécessaire d'enseigner ces unités en numération et les relations entre elles : c'est-à-dire des tâches et des techniques qui les font fonctionner. Il semble tout autant nécessaire de prolonger les recherches de Parouty pour étudier précisément les effets d'un tel enseignement sur la compréhension globale de la numération, du système métrique et du calcul.

La suite du texte tout en poursuivant l'état des lieux sur l'enseignement de la numération et du système métrique envisage des pistes pour l'action. Ces pistes tiennent compte de l'état des lieux. Elles résultent d'analyses épistémologiques et didactiques.

3. Introduire les unités de numération et les unités métriques

Cette section concerne les premiers apprentissages sur les unités tant métriques que de numération. Des éléments de programmation y précèdent des indications sur l'introduction de ces unités, laquelle ne peut être pensée indépendamment des relations entre les différentes unités. L'enseignement de ces relations est envisagé sur le plan matériel et sur celui des formulations. L'élaboration des techniques de conversion et le rôle possible des tableaux sont aussi envisagés.

3.1 Éléments de programmation

Actuellement, certains manuels ne formulent pas les relations entre unités de numération. Pourtant pour être maîtrisées par les élèves, ces relations doivent être explicitées et travaillées (à l'oral et à l'écrit) au fur et à mesure que les unités sont enseignées, dès le cycle 2 pour celles qui concernent ce cycle, au cycle 3 pour les autres : en particulier celles exprimant le rapport dix entre deux unités successives, une dizaine = dix unités, une centaine = dix dizaines, un millier = dix centaines ; et aussi un million = mille milliers.

Les relations entre unités métriques doivent aussi être enseignées. Les progressions choisies permettent de décider le moment d'enseignement de telle ou telle relation. Par exemple, à la fin du CP, les élèves peuvent estimer des longueurs d'objets en mètres, d'autres en centimètres et cela peut n'être que plus tard au cours du CE1 qu'ils apprennent qu'un mètre c'est aussi cent centimètres, après qu'ils ont appris (ou repris) le nombre cent – consolidant ainsi cette dernière connaissance.

3.2 Matérialiser les relations entre unités

Des situations particulières de dénombrement

Au CE2, voire au début du CM1, dénombrer des ensembles finis d'objets – éventuellement organisés et/ou représentés – continue à être le premier moyen d'apprendre les unités de numération et les relations entre elles. Compter « un » pour une pluralité semble nécessaire pour comprendre que ce sont des unités et pour mettre en relation les unités successives, jusqu'au millier. La représentation de la figure 4 permet d'expliciter qu'une, deux, trois..., dix étoiles font une dizaine d'étoiles. Une dizaine, deux dizaines..., dix dizaines d'étoiles font une centaine d'étoiles. Une centaine, deux centaines... dix centaines d'étoiles font un millier d'étoiles.

En s'appuyant par exemple sur ce support, selon les progressions choisies, on peut poser différentes questions aux élèves. « Combien y a-t-il de dizaines d'étoiles dans un millier d'étoiles ? ». On peut y répondre en comptant une par une les dizaines ou en constatant qu'il y a dix dizaines de dizaines d'étoiles ou encore dix fois, dix dizaines d'étoiles. Pour introduire le millier, si les élèves ont appris seulement les nombres de 3 chiffres, on peut demander

combien il y a de dizaines d'étoiles, combien il y a de centaines d'étoiles, enfin combien il y a d'étoiles sur la feuille ($999 + 1$). Une trace écrite pourrait être : 1 millier = 10 centaines, 1 millier = 100 dizaines, 1 millier = mille unités, mille est le nombre qui suit 999⁹. Cette tâche consolide la connaissance de la relation entre dizaine et centaine et permet de créer un nouvel ordre d'unité : le millier, comme dix unités de l'ordre précédent.

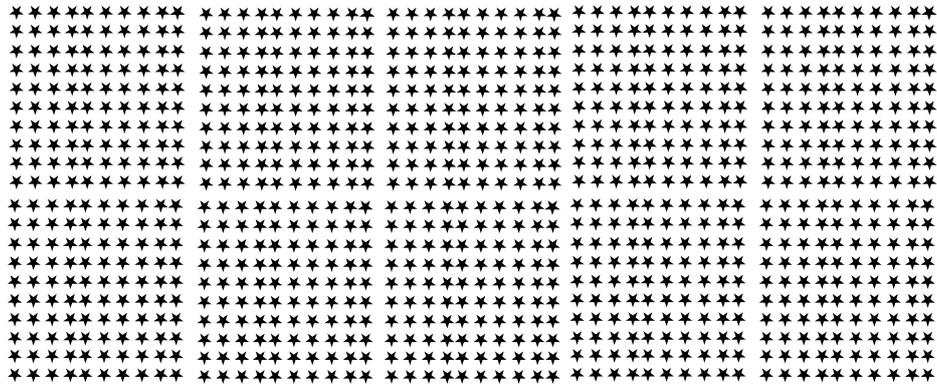


Figure 4. Étoiles (collection organisée)

Manipuler des grandeurs et des instruments de mesure

Des connaissances de la vie courante qu'il convient si besoin d'enseigner au préalable permettent de mémoriser, de retrouver rapidement ou plus simplement de contrôler certaines relations. Savoir que le mètre est plus long que le centimètre permet de choisir que un m = cent cm et non l'inverse¹⁰. Le fait qu'un double décimètre (la règle graduée) comporte vingt centimètres peut être un moyen de vérifier, constater ou apprendre qu'un décimètre c'est aussi dix centimètres. Les élèves de CE1 ne sont pas tous convaincus que les règles de 20 cm de tous les élèves de la classe se superposent exactement. C'est une chose qu'ils peuvent éprouver et vérifier. En relation avec la règle graduée, le décimètre peut ainsi être introduit dès le cycle 2. La règle de l'élève peut aussi constituer un « référent » pour la longueur de 2 dm ou 20 cm. Plus généralement, la matérialisation des relations élémentaires entre les unités métriques peut consolider l'aspect décimal des unités. Par exemple, vérifier – en juxtaposant plusieurs ou en reportant un – que dix décimètres mis bout à bout sont aussi long qu'un mètre ; vérifier sur une balance à plateau un équilibre entre des masses : une masse de 1 kg et 10 paquets de 100 g ou une masse de 1 kg et d'autres masses – une de 500 g (pour 5 centaines de g ou 5 hg), deux de 200 g (pour 2 centaines de g ou 2 hg) et une de 100 g ; observer que courir dix fois cent mètres (ou un hectomètre), c'est aussi courir un kilomètre. De même, estimer successivement la même longueur (d'environ dix mètres) en mètres puis en décimètres est à la fois un moyen de consolider les ordres de grandeur des unités métriques et les relations entre unités successives. Au CE2, associer transvasements et lecture des étiquettes présentes sur les bouteilles a pu permettre de mettre en relation 100 centilitres (50 cL + 50 cL) et 1 litre. Ce constat doit être relié à une certaine matérialisation de la grandeur d'un centilitre. En Sixième, ces expériences peuvent être évoquées, et certaines reproduites lorsque le temps disponible et les moyens à disposition des professeurs le permettent.

9 Utiliser l'écriture 1000 introduit une autre connaissance : l'aspect positionnel (cf. section suivante).

10 Des élèves très jeunes peuvent interpréter de façon erronée la racine *centi* de centimètre et l'associer à quelque chose de « grand » comme le nombre « cent ». (DeBlois et Larivière à paraître)

Le cas particulier de la monnaie

Il est connu qu'appréhender les équivalences entre unités monétaires est complexe pour les jeunes élèves (pour une référence récente voir Chandler et Kamii (2009). En revanche, aucune recherche, à notre connaissance, n'a montré que comprendre la monnaie ou les échanges constitue un préalable pour comprendre la numération ou les relations entre unités de numération. Cela ne doit pas être confondu avec les éléments suivants qui semblent nécessaires pour comprendre la numération (DeBlois 1996) : savoir qu'une unité peut comporter plusieurs éléments et savoir qu'une même quantité peut être évaluée dans plusieurs unités. D'autres grandeurs que la monnaie peuvent être utilisées à ces fins (le discret avec différentes sortes d'objets, la longueur...). Ces éléments impliquent que, s'il est nécessaire de travailler avec les élèves la grandeur « valeur marchande » via des échanges au moins virtuels pour qu'ils apprennent cette grandeur, il ne semble pas judicieux de faire reposer sur elle l'enseignement de la numération.

3.3 Élaborer les techniques de conversion

Connaître certaines relations entre unités et être capable d'en élaborer de nouvelles est fondamental dans l'apprentissage de la numération et du système métrique.

Tout d'abord, quelle que soit la technique enseignée et sa justification, on ne devrait pas faire l'économie d'enseigner le sens de ces relations : il s'agit d'exprimer le cardinal d'une même collection ou la mesure d'une même grandeur dans des unités différentes.

Ensuite, dans la première section sur les savoirs en jeu en numération, un discours justifiant la relation 4 milliers = quarante centaines a été indiqué. Enseigner un tel discours ne va pas de soi. Les lignes qui suivent donnent des éléments qui pourraient contribuer à l'élaboration ou à l'enseignement de cette technique de conversion.

Une certaine progressivité dans l'élaboration d'une technique pour convertir

Le support « étoiles » (figures 3 ou 4) peut constituer un appui pour élaborer des techniques pour convertir. Par exemple, pour convertir 3 centaines en dizaines : prendre 3 centaines d'étoiles et compter les dizaines d'étoiles à l'intérieur : soit une par une 1, 2, 3, 4, 5... jusqu'à 30, soit dix par dix 10, 20, 30, soit avec une multiplication 3 fois 10. Même si on continue à évoquer ou à utiliser le matériel, il semble aussi nécessaire, à un moment, de ne plus compter les dizaines dans les centaines « sur le matériel » mais de se référer à la relation 1 centaine = 10 dizaines et d'effectuer un raisonnement par exemple en évoquant dix dizaines dans chaque centaine. Ces jalons permettent d'élaborer les raisonnements suivants. Une centaine, c'est dix dizaines. Trois centaines, c'est trois fois plus donc 3 centaines c'est trente dizaines. Et aussi trente c'est 3 dizaines, donc trente dizaines, c'est 3 fois dix dizaines. Comme dix dizaines, c'est une centaine. Trente dizaines, c'est 3 centaines¹¹.

Le tableau

Si l'on y tient, le tableau de numération peut aider à constituer une synthèse de ces conversions, par exemple comme sur la figure 5. La dernière ligne de ce tableau permet de mettre en évidence et de résumer plusieurs lectures et interprétations possibles de l'écriture décimale positionnelle : 30 dizaines en juxtaposant tous les chiffres et 3 centaines 0 dizaine en lisant par colonne. En supprimant les zéros « inutiles », c'est-à-dire les unités non représentées explicitement dans la décomposition, cela donne : 30 dizaines = 3 centaines.

¹¹ Dans cette élaboration, l'écriture positionnelle 30 («trois» «zéro») n'est pas questionnée, elle est naturalisée. Elle sera discutée dans la section suivante.

centaine	dizaine	unité
3	30	
3	0	

Figure 5. Exemple de tableau de synthèse pour la conversion de 3 centaines en dizaines

Si l'on redoute de déstabiliser ses pratiques en écrivant plusieurs chiffres par colonne et que l'on souhaite quand même introduire un tableau pour faire une synthèse de ces conversions, on peut utiliser un tableau usuel, c'est-à-dire qui ne comporte que la dernière ligne du précédent (figure 6) et montrer les lectures par colonnes et par juxtaposition.

centaine	dizaine	unité
3	0	

Figure 6. Tableau usuel pour la conversion de 3 centaines en dizaines

Contrairement à un usage actuellement répandu, on voit que ces tableaux ne sont pas complétés par des zéros (à droite). En effet, comme on a converti des centaines en dizaines, l'unité la plus à droite (ici, l'unité simple) n'est pas sollicitée dans cette tâche et il n'est pas utile de compléter le tableau avec des zéros à droite.

Un autre moyen semble parfois être utilisé pour établir que 3 centaines = 30 dizaines. Il s'agit d'énoncer *a priori* une règle d'utilisation du tableau de numération – *on écrit un seul chiffre par colonne dans le tableau de numération* – et de croiser ensuite deux lectures du tableau : par colonne et en juxtaposant. Cette règle permet bien d'obtenir la « bonne réponse » mais, en tant que justification donnée *a priori*, elle ne semble pas pertinente. Il y a plusieurs raisons à cela.

Tout d'abord, l'énoncé « on écrit un seul chiffre par colonne dans le tableau de numération » n'est pas fondé sur le plan mathématique¹² comme le montre le remplissage du tableau de la figure 5. Ensuite, sur le plan des apprentissages, l'énoncé *a priori* d'une telle règle court-circuite l'énoncé et la mise en fonctionnement de la relation fondamentale 1 centaine = dix dizaines qui risque ainsi de ne pas être enseignée, de ne pas être apprise ou dont la portée risque de n'être pas comprise. Enfin, et par suite, les élèves risquent d'être démunis si on leur demande par exemple de compléter : 5c 10 d = c.

Un peu comme pour l'utilisation de la calculatrice vis à vis du calcul, il convient aussi de s'interroger sur les outils pertinents selon les tâches de conversion à effectuer. Si, à certains moments, utiliser le tableau peut être pertinent par exemple pour déterminer combien 7 m 54 c 780 d contient de centaines, une tâche telle que 5 c 10 d = c devrait être réalisée *sans* le tableau en mobilisant la relation 1 c = 10 d, puis en ajoutant 5 c et 1 c qui font 6 c.

3.4 Formuler les relations entre unités

Dans le paragraphe précédent, il s'est agi d'élaborer des techniques pour certaines conversions élémentaires. Ici, on poursuit ce travail mais on s'intéresse à d'autres relations : il s'agit de généraliser l'étude des relations unitaires entre unités métriques et de numération.

¹² En revanche, réunir la double condition « avoir un seul chiffre par colonne et toutes les colonnes contiguës occupées -éventuellement par des 0- » est nécessaire pour « sortir » les nombres du tableau en juxtaposant les chiffres.

Les relations entre unités de numération

Outre le rapport dix entre les premières unités et le rapport mille entre millier et million, d'autres relations doivent être connues ou facilement reconstruites, par exemple cent dizaines = un millier, dix centaines de milliers = un million. Elles sont ici exprimées en utilisant quelques mots de la numération orale : un, dix, cent, mille. D'autres formulations sont possibles : une dizaine de dizaines = une centaine, une dizaine de centaines = un millier...

Les élèves doivent avoir des occasions multiples et variées de mobiliser ces relations car il ne suffit pas en général d'expliciter telle ou telle relation pour qu'ils s'en emparent. Notamment, ils doivent être confrontés aux deux « sens » d'une relation : un millier c'est dix centaines, dix centaines c'est un millier. En particulier, dans une activité de dénombrement, les élèves risquent de n'être confrontés qu'au second sens et de n'apprendre alors que cette « moitié » de la relation (thèse en cours de Tempier).

La signification des préfixes métriques

En référence aux préfixes, on peut repérer trois types de relations entre unités métriques. Un premier type est le rapport de l'unité considérée à l'unité de référence (par exemple, le préfixe kilo indique que le kilomètre se réfère au mètre dans un rapport mille), un deuxième concerne le rapport dix entre unités successives, un troisième concerne les rapports entre unités quelconques. La signification des préfixes métriques d'origines grecque ou latine : déca – dix, hecto – cent, kilo – mille, déci – dix, centi – cent, milli – mille permet donc de repérer le rapport à l'unité de référence (pour les unités monodimensionnelles, et non les unités d'aire « carré » ou de volume « cube »).

À certains moments de l'apprentissage, les préfixes déci, centi, milli peuvent ainsi être utilisés pour mettre en évidence le rapport entier plutôt que le rapport fractionnaire : mille millimètres = un mètre (le millier d'unités est le mètre lorsque l'unité est le millimètre) plutôt que un millimètre = un millième de mètre (le millième d'unité est le millimètre lorsque l'unité est le mètre). De même, les préfixes déca, hecto, kilo pourront être utilisés avec des fractions : un mètre = un millième de kilomètre, par exemple. Connaître l'ordre de succession des unités peut aider à se souvenir de la signification des préfixes et permet aussi de percevoir rapidement le rapport dix entre deux unités métriques successives ou le rapport cent (dizaine de dizaines) lorsqu'il y a une unité intermédiaire. Ainsi, 1 décimètre c'est une dizaine de centimètres, un centimètre c'est une dizaine de millimètres donc 1 décimètre c'est une centaine de millimètres. Enfin, comme un hectomètre c'est une centaine de mètres et un mètre c'est dix décimètres, un hectomètre c'est cent dizaines de décimètres. Un hectomètre c'est donc mille décimètres. Dans la vie courante, la plupart de ces dernières relations ne sont pas très utiles. En classe elles peuvent être retrouvées par des raisonnements et, selon les progressions mises en place, les élèves peuvent être amenés à mémoriser certaines d'entre elles.

4. Système métrique et numération : enseigner l'aspect positionnel

Même si les relations entre unités y interviennent, cette section se centre sur l'aspect positionnel de la numération. En revenant sur l'absence de liens visibles entre numération et système métrique dans les tableaux et les décompositions des figures 1 et 2 (2^e section), l'étude de quatre exercices et de leurs techniques de traitement permet de mieux comprendre la situation actuelle et d'envisager de nouveaux liens entre système métrique et numération.

4.1 Dénombrer une collection organisée

Voici pour commencer une nouvelle tâche de numération. Il faut répondre à la question : « combien y a-t-il de petits cubes ? » (figure 7).

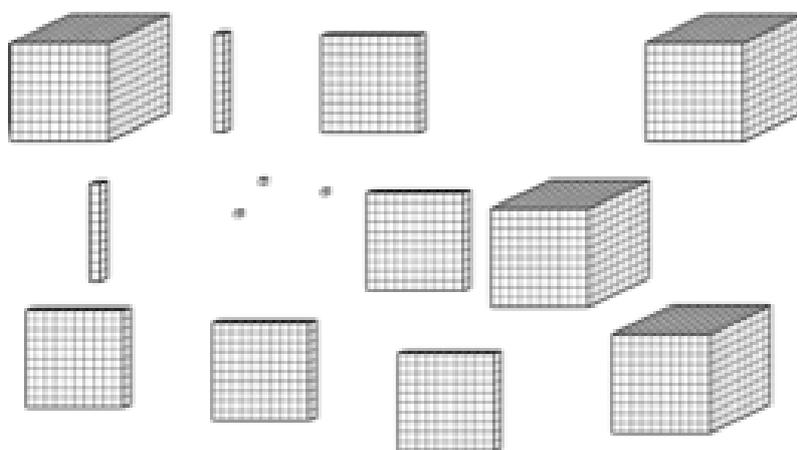


Figure 7. Assemblage de petits cubes (matériel multibase représenté en perspective)

C'est une tâche de dénombrement. Elle est simple à condition de savoir que dans chaque barre il y a dix petits cubes, dans chaque plaque il y a cent petits cubes, dans chaque gros cube il y a mille petits cubes, c'est ce que nous supposons ici.

Identifier la logique actuelle de l'enseignement de la numération

Une étude de manuels scolaires montre deux techniques courantes pour traiter cette tâche. Elles sont présentées ci-dessous, chacune en deux étapes qui s'enchaînent.

Première étape :

Technique courante n°1	Technique courante n°2
- Compter les petits cubes dans les gros cubes : mille, deux mille, trois mille, quatre mille puis écrire 4000 ;	- Compter les gros cubes : un, deux, trois, quatre puis écrire $4 \times 1\ 000$;
- Compter les cubes dans les plaques : cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents puis écrire 500 ;	- Compter les plaques : un, deux, trois, quatre, cinq puis écrire 5×100 ;
- Compter les cubes dans les barres : dix, vingt petits cubes puis écrire 20 ;	- Compter les barres : un, deux, puis écrire 2×10 ;
- Compter les petits cubes : un, deux, trois petits cubes puis écrire 3.	- Compter les petits cubes : un, deux, trois petits cubes puis écrire 3.

Pour chacune des deux méthodes, l'étape se termine par la production d'une somme obtenue en utilisant les différents termes. Selon le cas, la somme est $4000 + 500 + 20 + 3$ ou $(4 \times 1000) + (5 \times 100) + (2 \times 10) + 3$. La deuxième étape consiste alors à réduire cette somme. Remplir dans un tableau de nombres (figure 1) avec 4000, 500, 20 et 3 constitue un moyen de justifier le calcul de la première somme et de produire l'écriture 4523.

Utiliser les unités de numération

Voici maintenant une technique alternative à ces techniques, découpée aussi en deux étapes.

Étape 1 : Compter les différentes unités :

- Compter les milliers de cubes : un, deux, trois, quatre milliers de cubes ;
- Compter les centaines de cubes : une, deux, trois, quatre, cinq centaines de cubes ;
- Compter les dizaines de cubes : une, deux dizaines de cubes ;
- Compter les cubes : un, deux, trois cubes.

Il y a donc 4 milliers de cubes, 5 centaines de cubes, 2 dizaines de cubes, 3 cubes.

La deuxième étape consiste alors à traduire directement en chiffres cette expression en unités de numération. Elle utilise un petit discours qui découle d'un autre discours plus général qui s'applique à la fois aux entiers et aux décimaux : dans l'écriture d'un nombre, un chiffre placé à gauche d'un autre désigne des unités dix fois plus grandes. Pour les entiers, il peut être décliné comme suit : à partir de la droite, les unités sont en 1^e position, les dizaines en 2^e, les centaines en 3^e, les milliers en 4^e. Il y a donc 4523 cubes¹³.

4.2 Décomposer, recomposer dans le système métrique

Identifier la logique actuelle des techniques de conversion en système métrique

Deux tâches accompagnaient le tableau des unités de longueur de la 2^e section (figure 2). Pour recomposer 5 km 6 hm 8 dam 3 m en mètres, la technique suggérée dans beaucoup de manuels actuels consiste à placer chaque chiffre dans sa colonne puis à combler si besoin les cases vides intermédiaires par des zéros, enfin à exhiber, en juxtaposant les chiffres qui sont dans les différentes colonnes, le nombre dont le chiffre des unités se trouve dans la colonne qui porte le nom de l'unité demandée. Inversement, pour décomposer 427 cm en ses unités (m, dm, cm), on place chaque chiffre successivement dans une colonne en commençant par le chiffre des unités, le 7, dans celle des centimètres.

Voici maintenant des techniques alternatives pour ces tâches. Pour mettre en évidence les connaissances en jeu et le parallèle possible entre les exercices, une première présentation distingue deux étapes toujours possibles. L'une consiste à associer unités métriques et unités de numération. L'autre est commune à la dernière étape de la technique alternative de dénombrement, elle associe unités de numération et écriture chiffrée.

Utiliser les unités de numération pour compléter 5 km 6 hm 8 dam 3 m = ... m

Étape 1 : associer unités métriques et unités de numération. Un décamètre est une dizaine de mètres, un hectomètre est une centaine de mètres, un kilomètre est un millier de mètres. Donc 5 km 6 hm 8 dam 3 m signifie 5 milliers de mètres, 6 centaines de mètres, 8 dizaines de mètres, 3 mètres.

Étape 2 : associer écriture chiffrée et unités de numération. Comme l'unité est le mètre, on utilise le discours précédemment cité : en partant de la droite, les unités sont en 1^e position, les dizaines en 2^e, etc. Donc 5 km 6 hm 8 dam 3 m = 5683 m.

Dans la pratique, les deux étapes sont souvent mêlées : comme l'unité est le mètre, le 3 est en première position à partir de la droite, les décamètres sont des dizaines de mètres donc le 8 est

¹³ C'est pour mettre en évidence le parallèle entre les différents domaines que les valeurs numériques de cet exemple ont été retenues. Néanmoins, dans une situation d'apprentissage, remplacer cinq plaques par douze plaques par exemple aurait l'avantage de consolider la connaissance de la relation entre millier et centaines, même si les regroupements sont partiellement déjà faits grâce au matériel utilisé.

en 2^e position, le 6 désigne des hm qui sont des centaines de mètres donc en 3^e position et les kilomètres (le 5) sont des milliers de mètres donc en 4^e position.

Utiliser les unités de numération pour « décomposer 427 cm en m, dm et cm.

En mêlant les deux étapes, on peut dire :

Dans 427 cm, le 7 en première position indique des unités, donc des centimètres ; le 2, en 2^e position indique des dizaines de centimètres (donc des décimètres) ; le 4 en 3^e position indique des centaines de centimètres (donc des mètres).

Donc, $427 \text{ cm} = 4 \text{ m } 2 \text{ dm } 7 \text{ cm}$.

Pour ce dernier exemple, selon les progressions adoptées, des techniques diverses peuvent être utilisées pour déterminer les relations entre le cm et les unités dm et m. (cf. 3^e section)

4.3 Déterminer la masse d'un objet

Revenons au premier exercice (figure 7) et imaginons maintenant qu'un petit cube pèse 1 gramme. Quelle est, en grammes, la masse totale des cubes ? Pour la connaître, on peut compter les milliers de grammes, les centaines de grammes, les dizaines de grammes, les grammes (comme on avait compté les cubes), trouver que les cubes pèsent : 4 milliers de g, 5 centaines de g, 2 dizaines de g, 3 g, soit $4 \text{ kg } 5 \text{ hg } 2 \text{ dag } 3 \text{ g}$ et conclure avec un des discours précédents. Si les cubes ont été dénombrés au préalable, on peut bien sûr affirmer directement que 1 cube pèse 1 gramme donc 4523 cubes pèsent 4523 g. Cela ne met pas en évidence les relations entre unités métriques et unités de numération.

4.4 Des techniques reliées par des discours communs

Connaître des « façons de faire » qui se ressemblent pour des tâches apparemment différentes, être capable d'adapter des techniques ou de justifier les adaptations réalisées, pour passer de l'une à l'autre sont des signes de la qualité de l'appropriation des connaissances. Dans ces quatre tâches qui font travailler l'aspect positionnel de la numération, les techniques alternatives introduisent plus ou moins explicitement une expression intermédiaire du même type en unités de numération. Ensuite, un discours commun, relatif aux positions de ces différentes unités (en nombre inférieur à dix) dans l'écriture chiffrée, est utilisé. Dans cette perspective, le zéro apparaît comme un zéro de position : il permet à chaque chiffre d'occuper la position qui doit être la sienne compte-tenu de l'unité de numération qu'il représente.

Bien sûr un exercice tel que « Quel est le chiffre des dizaines de 6 529 ? » peut aussi être traité avec ce même type de technique. Il en va de même de « décomposer 46 003 en ses unités » (réponse : 4 dizaines de milliers 6 milliers 3 unités). Dans cette perspective, pour calculer $4000 + 500 + 20 + 3$, une explication cohérente avec les techniques alternatives consiste à indiquer qu'il y a 4 milliers dans 4000 (car le 4 est en 4^e position), il y a 5 centaines dans 500 (5 en 3^e position), il y a 2 dizaines dans 20 (2 en 2^e position) et 3 unités (3 en 1^e position). La somme s'écrit donc 4523.

Dans les techniques précédentes, lorsque c'est nécessaire, la signification des préfixes métriques, les relations entre les unités métriques, notamment le rapport dix, permettent de faire le lien avec la numération. Pour faire fonctionner le principe de position, tant en numération qu'en système métrique, des recompositions « mélangeant » l'ordre des unités doivent aussi être proposées : écrire en chiffres (ou convertir en unités) : 2 unités 9 centaines¹⁴, écrire en mètres (ou convertir en mètres) : 5 m 2 km.

14 Tempier (2010) décrit précisément les connaissances en jeu dans ces différentes décompositions.

Par ailleurs, la rédaction des différentes techniques et l'indication d'étapes ne doivent pas laisser croire que les techniques sont rigides, ni qu'il faut enseigner une seule façon de faire, ni qu'il faut imposer le respect de toutes les étapes. Par exemple pour compléter $5000 \text{ g} = \dots \text{ kg}$, on peut se référer au 5 en 4^e position qui représente des milliers (de grammes) ou passer par l'intermédiaire de la numération orale cinq mille (si la lecture de 5000 est immédiate et plus encore si l'exercice est donné oralement). Toutefois, tant qu'elle n'est pas maîtrisée, il semble souhaitable d'évoquer la signification du préfixe kilo (mille ou millier) pour cette tâche¹⁵.

5. Diversifier les tâches en numération et système métrique

Dans cette section, il s'agit de continuer à enrichir les propositions pour travailler la numération dans ses dimensions positionnelle et décimale. Un des moyens consiste à développer les relations entre numération et système métrique. En effet, une analyse de manuels scolaires montre notamment que certains types de tâches courants en système métrique sont rares en numération alors qu'ils ont une bonne potentialité pour le travail de la numération. Il importe alors de les mettre en évidence et d'indiquer des façons de les travailler. Un autre moyen relève de la numération orale. Pour ce qui la concerne, rappelons qu'elle n'a pas d'équivalent métrique. A notre connaissance, les tâches et techniques proposées ci-après n'existent pas dans l'enseignement actuel (ou seulement de façon exceptionnelle) et proviennent d'une analyse didactique. Pour compléter cet ensemble, l'enseignement des relations entre unités est regardé de façon plus précise. Certaines variables permettent ainsi de distinguer les techniques pour différentes tâches qui se ressemblent.

5.1 Comparer deux grandeurs ou deux nombres

L'enseignement actuel du système métrique comporte des tâches telles que « Quel est le plus long entre 4 dm et 3 m ? » Au cours de cette comparaison, des objets longs peuvent être évoqués (par exemple parmi le matériel de la classe : quatre craies mises bout à bout et le report de la règle d'un mètre) ; on peut aussi être amené à pointer que 1 mètre contient 10 décimètres qui sont donc plus longs que 4 dm. La relation dix dm = un m permet d'affirmer que la longueur du mètre est intermédiaire entre les deux longueurs de 4 dm et 3 m et donc de conclure.

Bien que formellement analogue à la précédente, la tâche « comparer 4 dizaines et 3 centaines » est peu répandue dans l'étude de la numération des entiers. Ainsi, pour la traiter, il n'est pas indispensable d'utiliser les écritures chiffrées de 4 dizaines et 3 centaines (40 et 300) ni de se référer à la longueur des nombres¹⁶ : solliciter la relation 1 centaine = dix dizaines et exprimer que 4 dizaines c'est moins que dix dizaines est tout à fait adapté. Il peut être intéressant d'enrichir les pratiques sur ce point. Cela prépare en outre le travail avec les décimaux où cette technique se prolonge.

Dans les comparaisons précédentes ce sont les relations du type « un pour dix » ou « dix pour un » (dix dm = un m) utilisées comme intermédiaires qui permettent de conclure. Avec

15 Seulement les deux tiers des élèves de fin de cycle 3 complètent correctement $5 \text{ kg} = \dots \text{ g}$. Environ 15% des élèves écrivent $5 \text{ kg} = 500 \text{ g}$ (Chambris 2008).

16 Il faut être prudent avec cette technique de comparaison des longueurs des écritures (ou du nombre de chiffres) pour comparer les nombres. Elle est correcte lorsque les nombres à comparer sont exprimés comme des nombres entiers d'une même unité (par exemple 57 et 124 ou encore 34 dixièmes et 216 dixièmes) : c'est notamment le cas lorsqu'on a des entiers en écriture positionnelle, ça ne l'est plus en général lorsqu'il s'agit de décimaux en écriture positionnelle, de mesures ou d'entiers exprimés avec des unités métriques ou de numération diverses.

d'autres nombres, des relations plus complexes doivent être sollicitées : il s'agit des relations du type X pour $X0^{17}$ et aussi 1 pour 100, 1 pour 1000. C'est le cas par exemple comparer 30 dam et 4 hm, 50 hm et 4 km, 30 euros et 400 centimes et aussi 37 dizaines et 4 centaines, 52 centaines et 4 milliers.

Si exprimer les deux nombres ou les deux grandeurs dans la plus petite unité, puis comparer les nombres à partir de leur écriture chiffrée, fonctionne toujours et ne fait intervenir que des comparaisons d'entiers en écritures chiffrées, il peut être utile de savoir jouer à la fois sur l'unité et le nombre écrit en chiffres et de savoir introduire une grandeur intermédiaire comme pour l'exemple précédent entre dm et m. Par exemple, 52 centaines, c'est plus que 50 centaines qui sont 5 milliers. Donc 52 centaines est plus grand que 4 milliers.

Concernant ces tâches de comparaison, des contextes peuvent être proposés. « Qui a le plus de bûchettes : Paul qui en a 40 centaines ou Sacha qui en a 5 milliers ? ». Une tâche telle que « quel est le plus long entre 1 m, 99 cm et 9 dm ? » peut être traitée en sollicitant les relations entre unités formellement ou avec un appui sur les tracés des diverses longueurs.

Concernant les comparaisons comportant plusieurs unités, les réponses – juste ou fausse – des élèves peuvent être parfois difficiles à interpréter. Ainsi un élève peut affirmer avec raison que 500 cm est plus long que 1 m en considérant, à tort, que c'est parce que 500 est plus grand que 1. Il répondra alors avec la même logique que 50 cm est plus long que 1 m. Un autre élève peut affirmer avec raison que 50 cm est plus court que 1 m en considérant, à tort, que c'est parce que les centimètres sont plus courts que les mètres. Dans la même logique, il répondra que 500 cm est plus court qu'un mètre. Ainsi, la réussite à une seule des deux tâches n'informe pas sur le fait que l'élève a bien coordonné nombre et unité.

5.2 De multiples tâches pour solliciter les relations entre unités de numération

On le voit, des tâches de comparaison bien choisies sollicitent des relations entre unités. En revanche, selon les expressions retenues pour les grandeurs ou les nombres à comparer et selon les techniques mises en œuvre, les relations activées dans le traitement de ces tâches sont très variées. On l'a vu dans la 1^e section de ce texte, les relations entre unités (par exemple entre milliers et centaines) peuvent être présentées dans des contextes multiples. Le but de ce paragraphe consiste à pointer différents types de décompositions et différentes techniques qui peuvent être utilisés pour enseigner les relations entre unités.

Si « écrire en chiffres 3 centaines 4 milliers » sollicite uniquement la position, les aspects décimal et position sont nécessaires pour « écrire en chiffres 56 centaines 2 milliers ». Cette tâche ne peut être traitée par la technique usuelle dans le tableau de numération. Ce peut être une raison de la prescrire. Il y a alors plusieurs façons de la traiter mais il semble nécessaire de séparer les deux parties “56 centaines” et “2 milliers”. Pour solliciter plus nettement les relations entre unités et éventuellement éviter le recours à la propriété de la troncature, on peut préférer les tâches « compléter : 4 c 10 d = ... c et 5 c 10 d = ... d ».

La tâche « convertir 600 dizaines en milliers » sollicite une relation entre unités non consécutives (entre dizaines et milliers). Utiliser un tableau de numération permet de la traiter mais elle peut être utilisée pour consolider la maîtrise de la relation élémentaire 1 millier = cent dizaines. A cette fin, l'utilisation d'un raisonnement passant par la formulation de cette relation semble souhaitable. Un tableau peut d'ailleurs être un moyen pour retrouver rapidement cette relation élémentaire si elle a été oubliée.

17 X désigne un chiffre différent de 0.

La plupart des tâches qui sollicitent les relations entre unités peuvent être contextualisées dans des situations du type « jeu de commandes » en faisant varier les contraintes et les matériels disponibles¹⁸. Des bâchettes sont vendues à l'unité et par paquets de dix, cent, mille. Combien faut-il commander de paquets de chaque sorte pour avoir 3400 bâchettes ? Des contraintes favorables aux apprentissages peuvent être introduites au fur et à mesure. Par exemple, 1) il faut commander le moins de paquets possibles, 2) il n'y a plus de paquet de mille, 3) il n'y a plus de paquet de cent, 4) il ne reste que des paquets de dix. Ou encore, des bâchettes sont vendues à l'unité, par dizaines, centaines et milliers. On doit commander 30 centaines de bâchettes. Il n'y a plus de centaines. Que peut-on commander ? Dans ce dernier cas, l'unité simple (la bâchette) n'apparaît explicitement dans aucun des deux termes de la conversion.

Pour comprendre l'écriture chiffrée des « grands nombres », certaines décompositions ou recompositions semblent particulièrement utiles. Ce sont celles qui « cassent » les groupements en classe de trois chiffres. Par exemple : « écrire en chiffres 25 centaines de milliers »¹⁹ et aussi « décomposer 25 centaines de milliers en ses unités » ou encore « combien y a-t-il de millions dans 25 centaines de milliers ? ».

5.3 La numération orale et les décompositions en unités

Ce paragraphe évoque brièvement des potentialités de la numération orale pour travailler les aspects positionnel et décimal de la numération écrite chiffrée. Des tâches utilisant les unités de numération peuvent consolider la numération orale : « décomposer le nombre cinq mille trois dans ses unités » (réponse : 5 milliers 3 unités), « quel est le chiffre des dizaines, celui des unités dans trois cent vingt ? » ou une tâche inverse « en utilisant les noms habituels des nombres, dire 4 milliers 5 dizaines ». Il n'est pas nécessaire de passer par l'écriture chiffrée pour traiter ces exercices. Il suffit d'utiliser les correspondances entre numération orale et unités de numération : mille – millier, cent – centaine, dix – 1 dizaine, vingt – 2 dizaines, etc. Pour les nombres de 1 à 4 chiffres, excepté pour les dizaines et les nombres de onze à seize, ces correspondances sont faciles à retenir.

Plus généralement, une façon d'expliquer les relations entre numération décimale de position et numération orale consiste à utiliser une décomposition intermédiaire en unités de numération et le discours positionnel déjà cité : trois mille cinquante, c'est trois milliers cinq dizaines, c'est donc, à partir de la droite, 3 en 4^e position et 5 en 2^e position, c'est 3 050. En sens inverse, cette technique fonctionne pour « lire 3 050 ».

Pour les nombres de plus de 4 chiffres – les « grands nombres » –, par exemple pour décomposer trois cent vingt mille en ses unités, l'intermédiaire trois cent mille et vingt mille peut être utile pour élaborer 3 centaines de mille, 2 dizaines de mille. D'ailleurs, le regroupement des chiffres par paquets de trois à partir de la droite, utilisé pour la numération orale correspond à une décomposition canonique en base mille du nombre : 1 032 000, c'est 1 million et 32 milliers (cf. 1^e section).

Enfin, une tâche telle que « combien deux millions cinq cent mille font-ils de centaines de milliers ? » permet de travailler spécifiquement la relation entre centaine de mille et million.

5.4 L'utilisation des différents tableaux

Les tableaux tant de numération que de système métrique rendent visibles l'ordre de succession des unités. De plus, une façon de montrer les liens entre numération et système

18 Cette idée est empruntée à Tempier (2011).

19 Cette idée est due à Catherine Houdement (LDAR). Voir aussi (Ligozat et Leutenegger 2006).

métrique peut consister à élaborer des tableaux « glissants » l'un par rapport à l'autre :

dam	m	dm	cm	mm	dam	m	dm	cm	mm
dizaine	unité				millier	centaine	dizaine	unité	

Figure 8. Tableaux de système métrique et de numération imbriqués

Pourtant si des tableaux peuvent être utilisés pour montrer ces successions d'unités, leur utilisation pour convertir ou décomposer rend inutiles à la fois le discours sur la position – les unités en première position, les dizaines en 2^e, etc. – et le discours sur les relations entre les unités : une centaine = dix dizaines. C'est pour cette raison qu'il n'est sans doute pas souhaitable d'apprendre trop vite aux élèves à les utiliser. Il semble en effet nécessaire que les discours – sur la position et les relations entre unités – et leur utilisation soient installés au préalable.

6. Les grandeurs des nombres ...

6.1 Estimer en unités métriques

L'énoncé proposé est le suivant :

Complète avec l'unité qui convient : **mètres, centimètres, grammes, kilogrammes, minutes, heures.**

Au stade, Antoine a fait un saut en hauteur de 60

Il a réussi à soulever une caisse qui pesait 8

Il a lancé une balle lestée de 200..... à une distance de 6

Il a fait un tour de piste en 4

Les résultats à cet exercice (figure 9 ci-après) proposé au début du cycle 3 montrent que plus de 6 élèves sur 7 reconnaissent la grandeur en jeu lorsque le contexte est simple : ils choisissent une unité de longueur et non de masse pour la première ligne et l'inverse pour la deuxième. Ils ne répondent pas que le saut en hauteur mesure 60 kg par exemple. Ce qui fait la difficulté de l'exercice n'est donc pas tant la reconnaissance de la grandeur en jeu que celle des ordres de grandeur, en particulier la prise en compte de la relation entre nombre et unité. Comment travailler cette relation ?

	Réponses en %			
saut en hauteur	60 cm : 30,38	60 m : 52,45	autre : 7,99	sans : 3,17
caisse soulevée	8 kg : 46,34	8 g : 39,79	autre : 10,37	sans : 3,51
balle lestée	200 g : 42,84	200 kg : 20,67	autre : 29,47	sans : 7,01
lancée à une distance de	6 m : 36,63	6 cm : 25,12	autre : 24,76	sans : 13,50
un tour de piste en	4 min : 61,10	4 h : 16,66	autre : 11,82	sans : 10,42

Figure 9. Extrait des évaluations CE2 (2001)

6.2 Compréhension de la numération et ordres de grandeur

Des recherches (DeBlois 1996) montrent que le fait que les élèves attribuent des ordres de grandeurs aux chiffres d'une écriture chiffrée est un indice de leur compréhension de la numération de position. Une façon d'utiliser cette connaissance didactique pour renforcer la

compréhension de la numération consiste alors à associer des ordres de grandeur métriques aux différents chiffres d'une écriture chiffrée : par exemple associer à 305 cm deux longueurs mises bout à bout, l'une de 3 m et l'autre de 5 cm. La connaissance des ordres de grandeur des petits nombres (de 1 à 9) d'unités métriques est alors déterminante et il importe de choisir les ordres de grandeur des objets à mesurer ou à estimer en fonction des unités et des nombres à travailler.

6.3 Apprendre les unités métriques et la mesure

La lecture de graduations ou de cadrans numériques ne sont pas *a priori* des situations favorables pour la conceptualisation des grandeurs. En revanche, les situations de comparaison de grandeurs sans instrument prévu pour mesurer le sont. Dans certaines conditions, le maniement d'instruments de mesure analogiques et le report d'unités peuvent contribuer à développer simultanément des connaissances conceptuelles sur les grandeurs et sur les unités métriques.

Pour ce qui concerne les longueurs, masses et volumes notamment, des tâches de comparaison aux unités métriques peuvent aider à conceptualiser les grandeurs. Par exemple, si on dispose d'une bouteille d'un litre, on peut se demander si le contenu de tel autre récipient va remplir ou non la bouteille, si on va déborder beaucoup ou peu quand on va transvaser. Ces questions d'anticipation qui précèdent la réalisation – si possible – du transvasement sont favorables à la conceptualisation des capacités et à la perception de la grandeur du litre. On peut vérifier que différentes « formes » de litres (notamment le cube d'un décimètre d'arête) contiennent la même quantité de matière (et varier éventuellement les matériaux : liquides ou solides divisés tels que le sable). De plus, pour affiner leur représentation du litre, les élèves de cycle 2 ont pu vérifier qu'on peut remplir une bouteille d'un litre avec deux petites bouteilles d'un certain type, avec trois bouteilles d'un autre type par exemple. En Sixième, on pourra évoquer cette expérience.

Quand les élèves ont acquis une certaine idée de ce qu'est un litre, il importe de travailler le « report » de l'unité pour appréhender les questions de mesure en nombre entier. C'est l'addition des grandeurs qui est sous-jacente. Là encore des tâches de comparaison et d'estimation sont utiles. On peut se demander si tel objet contiendra deux fois le litre et la mesure pourra ainsi être définie.

Des référents peuvent être introduits pour aider à mémoriser les « tailles » des petites unités et leurs petits multiples (de 1 à 9) au fur et à mesure qu'elles sont introduites. Les élèves peuvent savoir qu'un stylo mesure plus qu'un dm et moins que 2 dm, de même leur empan (à vérifier toutefois selon les élèves !). La profondeur de leur table est environ de 5 dm. Un élève de Sixième mesure en général entre 1 et 2 m.

Pour les masses par exemple, des objets dont on dispose en plusieurs exemplaires (le livre de mathématiques, une chaise, une craie, une pièce ...) et que chacun peut soupeser en un temps raisonnable peuvent permettre de construire des référents communs à la classe. Les élèves peuvent soupeser les différents objets (ou assemblages d'objets), faire des hypothèses sur leur masse. Certaines tâches peuvent être conduites sous la forme de paris. Une vérification, collective, avec un instrument de mesure peut être réalisée.

Dans certaines limites, ces activités peuvent être adaptées aux différentes grandeurs et à plusieurs unités. Une telle adaptation ne va pas de soi. Il est notamment nécessaire de prendre en compte la diversité des contextes dans lesquels une grandeur se manifeste. Ces contextes sont en effet très divers. Rien que pour la longueur, il peut s'agir par exemple des trois

dimensions d'un meuble, mais aussi de l'épaisseur d'un livre, de l'altitude d'une montagne, de la longueur d'un chemin... En outre, les tâches d'estimation de masse, capacité, aire sont en général beaucoup plus difficiles que celles d'estimation de longueur.

6.4 Les nombres avec un seul chiffre non nul et les petits nombres d'unités métriques

Les nombres avec un seul chiffre non nul interviennent à de nombreux endroits dans l'étude des nombres et du calcul. En particulier, ils constituent souvent des estimations plutôt que des mesures précises – il mesure environ 60 cm, il pèse environ 200 g. Il importe de développer des techniques pour se représenter ces grandeurs, d'autant plus que lorsque plusieurs chiffres sont non nuls, le procédé peut être itéré pour chacun d'eux. Il y a souvent plusieurs façons de faire : certaines techniques mobilisent plutôt la numération, d'autres plutôt le calcul.

Pour revenir à l'exemple tiré des évaluations (figure 9), imaginer 60 reports successifs d'une longueur d'un centimètre n'est pas un moyen raisonnable pour se représenter 60 cm. Voir 6 dm dans l'écriture 60 cm (6 indiquant des dizaines de cm, c'est-à-dire des dm) et imaginer une longueur de 6 décimètres – en imaginant le report de 6 fois un dm – constitue un moyen de le traiter et de consolider la numération. Avant d'être imaginée, une telle manipulation doit être effective. Dès le cycle 2, les élèves peuvent mettre bout à bout des bandes de papier d'un dm. Une autre façon de faire, en sollicitant des connaissances de calcul, voire de numération, consiste à décomposer 60 (ou 6 dizaines) en 2 fois 30 (ou 2 fois 3 dizaines) ou 3 fois 20 et à interpréter 30 cm ou 20 cm comme la longueur d'une règle graduée.

Une tâche telle que « compléter avec la bonne unité (kg ou g) : pour faire le gâteau, il faut 1 ... de pommes et 200 ... de farine » est pertinente. Avoir une idée de ce que ce sont 1 g et 1 kg ne suffit pas pour la traiter. Elle doit s'insérer dans un contexte où l'apprentissage des ordres de grandeur des grandeurs est organisé. Il semble nécessaire que les élèves aient une représentation de ce que sont 1 g, 10 g (ou une dizaine de g ou un dag), 100 g (ou une centaine de grammes ou un hg), 1 kg et de certains petits multiples de ces masses. Là encore, des procédures assez différentes permettent de se représenter 200 g, elles dépendent des connaissances qu'on mobilise (ou dont on dispose) :

- du calcul ($100\text{ g} + 100\text{ g} = 200\text{ g}$ ou 1 centaine de g + 1 centaine de g), un référent de 100 g et la connaissance de l'addition des masses,
- ou la numération avec la lecture de 2 centaines de g soit 2 hg dans 200 g, un référent pour l'hg et le « report » de l'unité de masse.

Progressivement, pour différents ordres de grandeur, des référents peuvent être mis en place. Une plaquette de beurre du commerce pèse entre 200 g et 300 g (entre 2 et 3 centaines de grammes), si les élèves ont appris l'unité hg, elle peut y être associée. Cinq kilogrammes peuvent être associés à 5 paquets de 1 kg de sucre et aussi à un bidon (léger) de 5 L d'eau (puisque un litre d'eau pèse un kg). Il s'agit à la fois de consolider le principe d'additivité des mesures de masses et de développer des connaissances sensorielles.

6.5 Éprouver les relations entre les unités métriques

Ce point a été abordé avec la matérialisation des relations entre unités métriques dans la première section. Il s'agit par exemple d'estimer une même longueur d'environ 10 cm successivement en centimètres et en décimètres.

6.6 Associer à chaque chiffre un ordre de grandeur

Associer, par exemple pour 305 cm, 3 centaines de cm au 3 et 5 centimètres au 5 et se représenter – au moins grossièrement – ces 3 centaines de centimètres et ces 5 centimètres,

c'est à dire deux longueurs bout à bout, l'une de 3 m, l'autre de 5 cm, permettent d'enrichir la compréhension de la numération et de développer le sens des nombres. Les systèmes d'unités à considérer dépendent des unités étudiées : dès le cycle 2, ce peuvent être les couples cm, dm et/ou dm, m, puis cm, dm, m et d'autres systèmes. En Sixième ; on consultera par exemple les documents Eduscol sur nombres et grandeurs.

Pour conclure

Système métrique et numération semblent effectivement séparés dans l'enseignement actuel mais des leviers existent pour que les deux enseignements se nourrissent mutuellement. Cela nécessite de faire des adaptations dans chacun des domaines de façon à ce que les tâches et les techniques qui s'y enseignent se ressemblent davantage.

Adapter les techniques, unifier les questions

Les différentes techniques présentées dans ce texte reposent sur trois types de discours, plus ou moins imbriqués, et dans lesquels les unités de numération interviennent :

- un premier type de discours sur le rapport dix entre les unités successives : 1 millier, c'est dix centaines, dix centaines c'est un millier, 1 unité, c'est dix dixièmes,
- un deuxième type de discours sur la position des chiffres : le 1^e, à partir de la droite est le chiffre des unités, le 2^e est le chiffre des dizaines...,
- un troisième type de discours sur la signification des préfixes métriques.

Savoir adapter une technique pour l'utiliser dans des contextes multiples est un signe du lien entre les connaissances, savoir que des techniques tirées de différents domaines permettent de traiter un même exercice en est un autre.

L'importance des unités de numération

Pour consolider les connaissances des élèves relativement aux unités de numération et aux rapports entre elles, il est nécessaire de diversifier leur utilisation dans les énoncés des exercices, de les « faire sortir » du tableau de numération. Elles seront ainsi plus disponibles notamment pour le calcul mental, les décimaux et le système métrique. En particulier, on peut demander aux élèves de dénombrer une même collection dans des unités différentes. On peut aussi leur demander de prévoir, étant acquis le résultat d'un dénombrement dans une unité, ce que sera le résultat du dénombrement dans une autre unité. On peut ensuite vérifier soit en recomptant, soit avec des raisonnements.

Les occasions de travailler les relations entre les unités, c'est-à-dire aussi l'aspect décimal de la numération, sont multiples. Les tâches du type « convertir 4 milliers en centaines » et « convertir 40 centaines en milliers » sont des leviers pour développer des techniques pour traiter des tâches dans plusieurs domaines des mathématiques.

Les ordres de grandeur des nombres

L'utilisation des unités métriques, notamment leurs ordres de grandeur, associées aux unités de numération tant pour l'aspect décimal que positionnel permet d'apprendre le système métrique mais aussi de consolider la numération et d'enrichir les représentations des nombres.

Références bibliographiques

- CHAMBRIS C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse. Paris : Université Paris–Diderot.
- CHANDLER C., KAMII C. (2009) Giving change when payment is made with a dime: The difficulty of tens and ones. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40, 97-118.
- DEBLOIS L. (1996). Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(1), 71-128.
- DEBLOIS L., LARIVIÈRE A. (à paraître) Une analyse du contrat didactique pour interpréter les comportements des élèves au primaire. *Actes du colloque EMF 2012. Genève*.
- DGESCO (2006) *Les nombres au collège. Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e, et 3^e du collège*.
- DGESCO (2007) *Grandeurs et mesures au collège. Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e, et 3^e du collège*.
- DURPAIRE J.L., MÉGARD M. (dir) (2010) *Le Nombre au cycle 2. Ressources pour faire la classe*. Chasseneuil du Poitou : CNDP.
- LIGOZAT F., LEUTENEGGER F. (2006). La bivalence mathématique et langagière dans les pratiques d'enseignement sur la numération. In Falardeau E., Fisher C., Simard C., Sorin N. (Eds.), *Le français, discipline singulière, plurielle ou transversale? Actes du 9^{ème} Colloque de l'AIRDF, Québec, 26 - 29 Aout 2004*. Canada : Université de Laval.
http://www.colloqueairdf.fse.ulaval.ca/fichier/Symposium_Bernie/Ligozat_Leutenegge.pdf
 (consulté sur Internet le 27 avril 2012)
- MA L. (1999) *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*, éditions Lawrence Erlbaum Associates.
- PAROUTY V. (2005) Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3. In Commission Inter-IREM COPIRELEM (Ed.), *Actes du XXXI^{ème} colloque sur la formation des maîtres (Cédérom)*. Toulouse : IREM de Toulouse.
- REYNAUD A. (1821) Notes sur l'arithmétique. In Bezout E., Reynaud A. *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, 9^e édition*. Consulté sur Internet le 13 décembre 2011, <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table>
- ROUCHE N. (dir) (2007) *Du quotidien aux mathématiques - Nombres, grandeurs, proportions*. Paris : Ellipses.
- SERFATI M. (2005) *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Paris : Pétra.
- TEMPIER F. (2009) L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : étude des relations entre contraintes et libertés institutionnelles et pratiques des enseignants, *Cahier Didirem, n°60*, IREM Paris 7.
- TEMPIER F. (2010) Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, 86, 59-90.
- TEMPIER F. (2011) *Enseigner la numération décimale. Une ressource pour les enseignants du CE2*. (Site internet) Consulté le 13 décembre 2011, <http://numerationdecimale.free.fr/>