DES OUTILS AUX SIGNES : CONSTRUIRE DES REPRÉSENTATIONS ARITHMÉTIQUES DU QUOTIDIEN AU CP

Pierre BRIGNON[1]

École élémentaire Marius Roussel, Simiane-Collongue (13)

Pierre EYSSERIC

IUFM Aix Marseille Université

Un constat

Au CP, les élèves sont amenés à ordonner et systématiser les acquis de la maternelle *à travers leur initiation au langage mathématique (notamment sous les formes symboliques) et ses caractéristiques fonctionnelles*.

Deux grandes difficultés surgissent en particulier : d'une part, la compréhension de la notion de dizaine, dans les écritures et dans les pratiques de dénombrement ; d'autre part, la lecture et l'utilisation des symboles qui traduisent les opérations et les relations entre les nombres, premiers pas vers l'algèbre.

L'environnement quotidien des enfants est susceptible d'être appréhendé à travers le prisme des mathématiques en général, de la numération en particulier. Ainsi en va-t-il des objets ludiques comme les dés, les cartes, les dominos, mais également d'autres objets quotidiens comme les cailloux, les allumettes, les boîtes d'œufs, le miroir, le tambour, voire même d'éléments naturels, décoratifs ou architecturaux (feuilles d'arbres, fresques), sans oublier, bien sûr, les instruments spécifiquement mathématiques (bouliers, abaques, balances).

Problématique

Partant de ce double constat, il convient de resituer la problématique de l'enseignement dans le cadre des programmes de l'école primaire. Si la « *connaissance des nombres et le*

[1] Cet article, écrit à partir du mémoire de CAFIPEMF de Pierre Brignon, a été finalisé dans le cadre d'un groupe de production de ressources pour la formation des enseignants au sein de l'IUFM d'Aix Marseille Université.

Grand N n° 89, 2012, pp. 71 à 102

calcul » y « *constituent les objectifs prioritaires du CP et du CE1* », il est également rappelé que « *l'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification* ». Or, force est de constater que ces programmes ne délivrent que peu d'éléments concrets de mise en œuvre de ce précepte en dehors des catalogues de compétences techniques « *attendues* » à la fin de chaque « *palier* » du cursus scolaire. On serait donc tenté de reformuler en question ce qui était présenté comme une évidence, à savoir : comment associer l'acquisition des mécanismes en mathématiques à une intelligence de leur signification ?

Des calendriers mayas aux cailloux latins, c'est l'observation du monde, le désir d'interprétation et la volonté de dépasser des difficultés techniques qui motivent et déterminent la construction des mathématiques comme un « *long travail d'abstraction de la pensée* » (Guedj, 1996). Les hommes construisent des outils pour s'approprier le monde et y vivre mieux. Ainsi, lorsque la multitude du bétail ne se laisse pas aisément compter à l'œil nu, l'astucieux inventera un procédé de marquage, et le scribe développera un système d'enregistrement selon un code partagé par ses pairs.

Alors, en prenant appui sur les nombreux exemples fournis par l'histoire des sciences nous souhaitons avancer l'idée que les observations comparées, les interprétations contradictoires et la construction de procédés techniques partagés réalisées à l'aide de supports et objets numériques variés peuvent donner du sens au système décimal et aux énoncés mathématiques abordés à l'école en général, et au CP en particulier.

Ainsi la problématique du travail que nous présentons pourrait s'énoncer : en quoi un questionnement ouvert à propos de supports techniques choisis (objets et instruments) peut-il susciter le développement de procédés de manipulation variés qui permettent de construire à partir de là des interprétations arithmétiques favorisant la compréhension des nombres et du système de numération ?

Cet article tente d'apporter quelques éléments de réponse.

Nous présentons tout d'abord les grandes lignes d'une séquence relative à la compréhension du sens des nombres, telle qu'elle a été proposée à une classe de CP de septembre à décembre 2008. Elle combine des séances construites autour de l'objet d'étude « nombre » avec d'autres ayant pour point de départ un matériel issu du quotidien des élèves, sur lequel on va prendre appui pour conceptualiser le nombre.

Nous analysons certaines séances emblématiques afin de mieux cerner les types de tâches proposés aux élèves, les difficultés rencontrées et les apprentissages réalisés. À partir de ces exemples, nous revenons sur la démarche retenue dans cette séquence.

Puis, nous donnons un aperçu des autres supports matériels utilisés durant l'année pour favoriser la compréhension des nombres et du système de numération.

Enfin, nous terminons par un retour sur la démarche proposée en dégageant son intérêt pour les apprentissages numériques ainsi que les limites identifiées.

Des nombres partout !

Une séquence pour les apprentissages numériques au CP au cours du premier trimestre

Lien avec le programme officiel

« *Les élèves apprennent la numération décimale (…). Ils dénombrent des collections, connaissent la suite des nombres, comparent et rangent.* » (BO Spécial n°3, juin 2008, p. 18)

« *- connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100.*

- comparer, ranger, encadrer ces nombres.

- écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.

- lire ou compléter un tableau dans des situations concrètes simples. » (BO Spécial n°3, juin 2008, p. 33)

Choix didactique

Le monde qui nous entoure peut être apprécié en termes numériques. Encore faut-il pouvoir le faire percevoir aux élèves, puis rendre leurs observations intelligibles.

Les élèves sont impatients d'accéder aux codes mathématiques oraux et écrits des adultes. Mais comment donner du sens à cette parole numérale « trente-six » et à sa traduction en chiffres « 36 » qui organise la représentation des quantités et les rend perceptibles, quelle que soient leur taille, en si peu de signes ?

Objectif

- Susciter l'observation, la manipulation et l'analyse d'outils et d'objets variés, porteurs de potentialités numériques pour développer « *l'imagination, la rigueur et la précision* » (BO Spécial n°3, juin 2008, p. 18) de leurs observations numériques.
- S'appuyer sur les régularités dans l'organisation de la numération décimale orale avant de traiter ses exceptions.

Résonnance dans les différents domaines d'apprentissage

- Mathématiques : manipulation, dénomination et représentation des nombres.
- Découverte du monde : la date et le calendrier ; le quartier : numérotation urbaine.
- Lecture/production d'écrits : lecture des mots nombres ; rédaction d'un « répertoire » mathématique.
- EPS : lecture et écriture de score ; mesures de longueurs avec le décamètre.
- Éducation musicale : codage rythmique.

Séance 1 : DES NOMBRES PARTOUT

Objectif

Faire prendre conscience aux élèves que leur environnement direct peut être analysé en termes numériques, à condition de bien associer les « nombres » qui désignent une quantité à des « termes transitifs », c'est-à-dire des mots qui désignent les objets que l'on dénombre.

Tâches proposées

- Repérer dans la classe des objets ou des parties d'objets « porteurs » de collections dénombrables qui permettent de faire apparaître les « nombres cachés ».
- Aboutir à des propositions du type « *quatre, comme les quatre pieds d'une chaise*. »

Compétences travaillées en particulier

- Observer et décrire pour mener des investigations.
- Désigner l'objet d'un dénombrement avec précision.
- Dénombrer la collection préalablement délimitée.

Prolongements

Inventer une comptine numérique de un à dix en associant un nombre à une collection qui le représente *(un comme le soleil, deux comme les yeux, ...).*

Séance 2 : LE TRÉSOR DES SOURIS

Objectif

Aborder la notion de nombre pair comme une introduction au partage équitable et à la division par deux.

Tâches proposées

- Dresser une liste des objets usuels associés par paires par opposition à ceux qui ne le sont pas.
- Établir deux catégories de nombres, pairs ou impairs, en fonction de la possibilité de partager équitablement les collections dont ils sont le cardinal ; cette tâche est mise en scène via le partage d'une collection de cubes de fromage (le trésor) entre deux souris.

Compétences travaillées en particulier

- Discriminer les objets fonctionnant par paire.
- Regrouper par deux les éléments d'une collection pour établir la parité de son cardinal.

Prolongements

Danse : on fait apparaître la parité du nombre de danseurs au fil de leur répartition dans l'espace, par exemple en deux lignes qui se font face, ou en suscitant des duos.

Séance 3 : DES ALLUMETTES POUR Y VOIR CLAIR

Objectif

Proposer aux élèves de réfléchir sur les différentes possibilités d'organiser une collection de cardinal inférieur à 19 (ou la dizaine n'est pas réitérée) pour la rendre aisément et rapidement dénombrable.

Tâches proposées

- Disposer des allumettes pour les dénombrer facilement (« subitizing »).
- Comparer la lisibilité de différentes représentations des nombres jusqu'à 19.

Compétences travaillées en particulier

- Produire et reconnaître des décompositions additives de nombres inférieurs à 19.
- Reconnaître des doubles et des moitiés pour des nombres inférieurs à 19.
- Comparer des nombres inférieurs à 19 à l'aide des regroupements effectués.
- Écouter les arguments des pairs, formuler les siens.

Prolongements

Certains types d'organisation des allumettes permettent de figurer les côtés des rectangles, carrés et autres polygones : une idée de séance de géométrie !

Séance 4 : JEU DE PISTE

Objectif

Associer aux mots nombres mémorisés au fil de la comptine numérique orale leurs écritures chiffrées ; la suite des écritures chiffrées des nombres (bande numérique) sera ensuite un pour les tâches liées à l'ordre, en particulier la comparaison des nombres et leur rangement.

Tâches proposées

Jouer à un « jeu de l'oie » en duo en nommant les nombres.

Compétences travaillées en particulier

- Nommer un nombre écrit en chiffres.
- Déplacer un pion sur une « bande numérique » au fil du lancement d'un dé.
- Pratiquer un jeu en respectant les règles.

Prolongements

Les cases du jeu de l'oie peuvent raconter une histoire.

Leur « habillage » est donc aussi bien propice à une séance de production de phrases injonctives liées à certaines cases « spéciales » qu'à une séance d'arts plastiques en rapport avec une œuvre « foisonnant » de personnages (Brueghel par exemple).

Séance 5 : NOMBRE OU NUMÉRO

Objectif

Faire distinguer les numéros (ordinaux) des nombres (cardinaux).

Tâches proposées

- Distinguer un nombre ou un numéro sur une image représentant un élément familier : maillot de joueur, téléphone à touches, araignée ou insecte (à 8 ou 6 pattes), bus surmonté de son numéro,…
- Trier des images en fonction du critère de discrimination précédent.

Compétences travaillées en particulier

- Utiliser un critère précis de discrimination : « ce qui est dénombrable ».
- Fournir des éléments simples de preuve d'un choix.
- Préciser le « terme transitif » du dénombrement: « ce que l'on compte » (des billes, des pétales, ...).

Prolongements

Étudier la numérotation des rues du quartier.

Séance 6 : CHÂTEAU DE NOMBRES

Objectif

Amener les élèves à reconnaître et repérer les écritures chiffrées des nombres dans un tableau à double entrée.

Tâches proposées

- Replacer des nombres dans la suite numérique de un à quarante, organisée en tableau à double entrée organisé par dizaines.
- Reconstruire le tableau des nombres de un à cent à partir d'une dizaine de morceaux découpés.

Compétences travaillées en particulier

- Désigner/nommer des nombres à partir de leur écriture chiffrée.
- Savoir utiliser un tableau à double entrée.
- Écouter les arguments des pairs, formuler les siens.

Prolongements

Il sera intéressant de proposer d'autres modèles de représentation des nombres jusqu'à cent, notamment en spirale, et sous forme de « compteur » à bandes.

Séance 7 : TRADUCTEUR DE NOMBRES

Objectif

Amener les élèves à associer différentes désignations et représentations des nombres afin de se constituer un répertoire numérique qui leur permette d'apprécier et comparer les quantités. On y fera apparaître l'écriture en chiffres, en lettres, la représentation sous forme de carrés barrés et de mains (groupement par cinq) et toute représentation qui aura été retenue par la classe.

Tâches proposées

- Manipuler des outils permettant de représenter les nombres.
- Ranger des affiches représentant des nombres pour créer un répertoire.

Compétences travaillées en particulier

- S'associer pour produire une collection demandée.
- Faire correspondre une collection avec l'écriture en chiffre de son cardinal.
- Savoir utiliser un tableau à double entrée.

Séance 8 : LE BOULIER[2]

Objectif

Systématiser chez les élèves l'usage du groupement par dix pour passer du « dix fois un » au « une fois dix ».

Tâches proposées

- Lire des nombres sur un boulier en se référant au « Château des nombres ».
- Coller des gommettes représentant une ligne de dix boules ou une boule simple pour représenter un nombre.

Compétences travaillées en particulier

- Distinguer le chiffre des dizaines et celui des unités dans l'écriture en chiffres.
- Dénombrer une collection en comptant « de dix en dix ».

Séance 9 : PORTRAIT DE NOMBRES

Objectif

Amener les enfants à décrire ou reconnaître un nombre en fonction de ses caractéristiques ordinales, cardinales ou arithmétiques.

Tâches proposées

Deviner un nombre grâce à une description comportant des caractéristiques ordinales (« *entre cinquante et soixante* ») ou cardinales (« *Il a cinq dizaines* »), voire à ses propriétés arithmétiques (« *Il est pair* »).

Compétences travaillées en particulier

- Tenir compte de plusieurs critères à la fois pour repérer un nombre.

---

[2] Il ne s'agit pas ici d'un boulier de calcul mais d'un matériel pédagogique constitué de dix rangées de dix boules qui permet la représentation des nombres de un à cent, en mettant en évidence la décomposition en dizaines (nombre de rangées complètes) et unités (nombre de boules dans la rangée incomplète).

- Poser des questions pertinentes.
- Nommer les nombres jusqu'à soixante-neuf.

Prolongements

Les jeux de portrait peuvent s'appliquer en lecture et en production d'écrit. Des phrases courtes peuvent permettre de distinguer des personnages, des animaux, ...

Séance 10 : LA TRIBU NUMÉRIQUE

Objectif

Faire comprendre aux élèves le sens du nom des nombres à sept, huit et neuf dizaines en faisant référence aux liens arithmétiques : soixante-dix, c'est 60 + 10, quatre-vingts c'est 4 fois 20 ou 20 + 20 + 20 + 20, etc.

Tâches proposées

- Représenter un nombre en équipe en « se donnant l'accolade » pour respecter le nom des nombres.
- Traduire le nom des nombres de soixante-dix à quatre-vingt-dix-neuf en suisse français.

Compétences travaillées en particulier

- Tracer des accolades pour faire apparaître la somme des dizaines ou des vingtaines.
- Faire correspondre une collection avec l'écriture en chiffres de son cardinal.
- Savoir utiliser un tableau à double entrée.

Prolongements

Cette séance est directement liée à l'avancement de la séquence de calcul. Elle peut en particulier s'articuler avec un travail sur la technique de l'addition en colonnes.

Séance 11 : LE PORTE-MONNAIE

Objectif

Initier les élèves à la notion de valeur à travers des activités d'échange pour la distinguer de la notion de quantité.

Tâches proposées

- Comparer différents porte-monnaie remplis de pièces de valeurs différentes.
- « Acheter » des objets avec le moins de monnaie possible.

Compétences travaillées en particulier

- Échanger de la monnaie et des billets en fonction de leur valeur.
- Distinguer la valeur de la quantité pour évaluer un capital.

Retour sur quelques séances

Séance 1 : Des nombres partout !

Enseignant, on oublierait presque que les nombres n'apparaissent pas que dans les manuels de mathématiques. Pour un élève, à qui l'on promet que l'école lui apprendra à compter, voire même à calculer, ce n'est pas non plus une évidence. Alors pourquoi ne pas commencer l'année d'arithmétique en CP en se libérant un peu l'esprit, et en proposant aux élèves dès le mois de septembre cette question faussement triviale : « *Qu'est-ce qu'un nombre ?* » (Baruk, 2003). Passé un moment de perplexité, certains se lancent : « *C'est où il y a des chiffres.* » « *Ça sert à être écrit.* » « *C'est des vrais chiffres.* » « *Ça sert à compter.* » « *C'est un numéro.* »

L'angoisse de l'inconnu est à peine dissipée. Afin de ne pas en rester à ces quelques propositions courageuses mais réductrices, les élèves sont donc invités à enquêter sur leur quotidien à travers cette reformulation : « *Parfois, les nombres ne sont pas encore écrits en chiffres. Mais on peut les trouver si on compte… **Où trouve-t-on des nombres dans la classe ?*** » Cette fois, de nombreux doigts se lèvent : « *Les étiquettes des présents. Il y en a … vingt et un.* » « *Là, je vois quatre. Il y a quatre fleurs.* » « *Les sept jours de la semaine sur les étiquettes.* »

La séance se poursuit avec une véritable chasse aux nombres à travers l'école, dont la plupart des élèves reviendront avec une certitude toute pythagoricienne : il y a des nombres partout ! Ils se manifestent au quotidien à l'improviste, pour peu qu'on se donne la peine d'imaginer ou de se représenter une quantité. La subjectivité des nombres apparaît d'évidence au cours de la séance suivante, lorsque l'on soumet une image complexe à l'appréciation de plusieurs élèves, auxquels on donne pour consigne : « Qu'est-ce que l'on peut compter ? Chercher et écrire les nombres correspondants. »

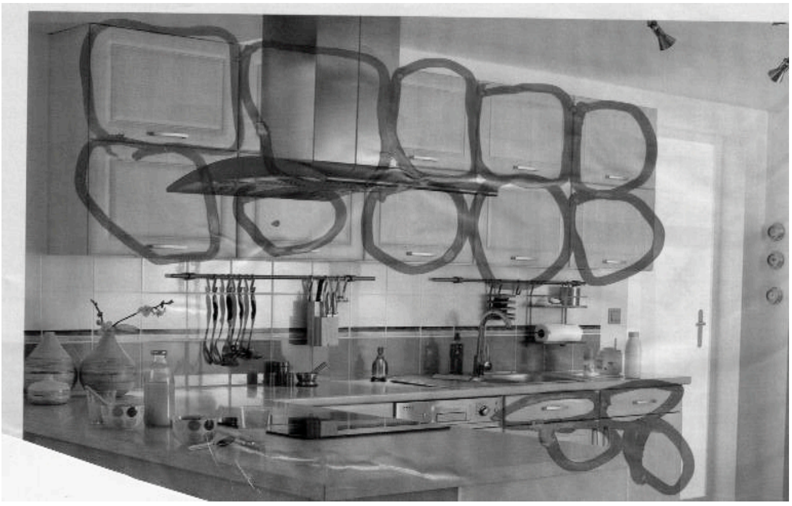


Figure 1 : Dénombrer les éléments d'une cuisine

« - *Quel nombre avez-vous trouvé ?*

- *On a trouvé quatorze.*

- *Mais c'est quatorze quoi ?*

- *Quatorze « tiroirs ».*

- *Mais moi j'en vois treize…*

- *Mais c'est lui (*le binôme*) qui m'a dit quatorze ; moi j'avais dit treize.*

- *Là, y en a un qui est caché par le truc mais on voit un peu, alors ça veut dire qu'y en a quatorze.* »

Cet élève prolonge encore l'expérience proposée : l'objectif qui était de choisir puis discriminer des éléments d'une image pour les dénombrer est dépassé. Il s'avère que l'on peut dénombrer des objets dont on suppose logiquement l'existence en fonction d'indices visuels…

Ce premier contact empirique avec l'arithmétique est caractéristique de la démarche utilisée tout au long de l'année : partir de l'observation d'un objet afin d'en expliciter ses potentialités numériques.

Séance 3 : Des allumettes pour y voir plus clair

Puisque l'on doit aux romains de « calculer » avec des cailloux, pourquoi pas avec des allumettes ? (Ronan, 1988)

Cette séance amorce la séquence d'arithmétique qui doit permettre de travailler la représentation des nombres de zéro à neuf en mettant à la disposition des élèves divers matériaux de plus en plus inducteurs pour construire la collection demandée.

Les programmes officiels enjoignent aux enseignants d'enseigner à « *écrire, nommer, comparer, ranger les nombres entiers naturels* ». L'objectif de cette séance consiste à inciter les élèves à ordonner les éléments d'un ensemble pour le comparer instantanément à d'autres et initier ainsi les élèves à l'usage de « *collections-témoins organisées* » (Brissiaud, 2005). La séance prend ses racines dans le travail d'observation qui avait amené la classe à traquer les nombres partout autour de nous. Il leur est cette fois proposé de passer de la chasse à l'élevage, c'est-à-dire de créer eux-mêmes des nombres.

Problématisation collective

La séance s'ouvre avec ce défi : « Pouvez-vous fabriquer des nombres ? »

Cette question suppose une réponse implicite à la question « Qu'est-ce qu'un nombre ? » de la séance 1. On est ici au cœur du processus proposé par Vergnaud (1991) pour comprendre le développement d'un concept : il est nécessaire de le replacer dans un système, appelé champ conceptuel, mettant en jeu non seulement signifié et signifiants (ensemble des formes langagières ou non qui permettent de représenter le concept), mais aussi l'ensemble des situations lui donnant du sens.

Plusieurs élèves réagissent aussitôt et viennent écrire des symboles correspondants à des nombres au tableau. J'attire l'attention sur le fait que ces élèves ont plutôt « *écrit un signe qui veut dire le nombre* ». J'introduis alors une restriction en précisant qu'ils doivent s'adresser à une personne (plus jeune qu'eux) qui ne connaît pas ces signes. Une élève montre alors trois doigts levés. Une provocation utile consistera alors à ne compter que deux doigts, ceux qui sont baissés. Au risque de passer pour un demeuré, on attire ainsi l'attention sur le fait que c'est toujours le nombre de doigts levés qui est immédiatement « pris en compte ». Or, il est bon de rapidement sensibiliser les élèves au fait qu'il s'agit d'une convention sur le référent, mais que l'on peut aussi compter le nombre de doigts baissés et ouvrir ainsi la voie à la notion de « complément à… ».

Le reste de la classe est invité à poursuivre l'expérience en duo en précisant la question « Combien y a-t-il de doigts levés ? ». Un élève s'acharne à décomposer les nombres qu’il montre sur ses deux mains afin de perturber son collègue, montrant « quatre et un » pour cinq. Là encore, il est intéressant d’intervenir pour signaler à l’ensemble des élèves ce qui se passe : « *On voit quatre et un doigts levés, ça fait cinq doigts levés en tout.* » Ce faisant, on amorce la conceptualisation du nombre cinq par une « décomposition-recomposition » sous la forme « 4 + 1 = 5 ».

Après avoir profité de cet épisode pour montrer que les doigts, accrochés aux mains, ne pouvaient pas être déplacés tout à fait librement, on lance le cœur de l’activité de la séance avec cette hypothèse de travail : on peut montrer un nombre avec une collection d’objets que l’on peut ranger de différentes manières. La consigne est la suivante : « Vous allez essayer de me présenter le nombre écrit sur votre carte grâce aux allumettes. »

Manipulation pour le nombre six

Deux élèves avaient du mal à dénombrer les allumettes nécessaires. Pour les autres, voici un tableau récapitulant en images les différentes propositions et leur dénomination par les élèves.

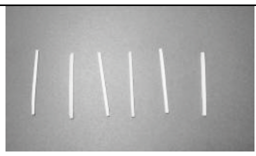
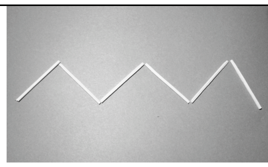
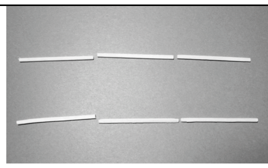
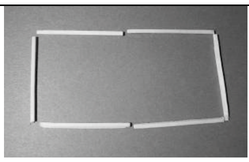
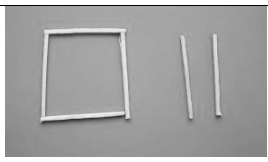
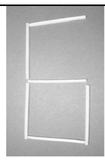
			
Type A « en désordre »	Type B « alignées » verticales	Type C « dents de requin »	Type D « double ligne »
			
Type E « en rectangle »	Type F « en carré »	Type G analogique	

Figure 2 : Proposition d’organisation des allumettes

Quelques remarques à propos des manipulations des élèves

Pour les types A et B les allumettes sont en désordre ou alignées sans regroupements volontaires. Les élèves recomptent le tout pour comparer leurs collections.

Pour le type C, les allumettes sont placées en ligne brisée, dans le but de créer un motif. En cachant alternativement une partie de la ligne, on peut fait apparaître à ces élèves l’algorithme qu’ils ont utilisé au moyen de deux éléments. D’une part, les élèves seront invités à répondre à la question « Combien d’allumettes sont cachées ? », le masquage devant les inciter à passer de la manipulation de la collection d’allumettes à son évocation. D’autre part, ils seront amenés à s’intéresser aux suites de *n* en *n,* lorsque la comptine numérique ne progresse plus de un en un.

Pour le type D, les allumettes sont placées sur deux lignes parallèles partageant le nombre en deux moitiés égales. Remarquable intuition d’une élève qui offre à la classe une représentation très efficace des nombres pairs !

Pour le type E, les allumettes sont placées sous forme de rectangle de longueur « deux » et de largeur « un ». Une systématisation de ce type de représentation pourrait permettre d'ébaucher la construction du concept de périmètre.

Pour le type F, les allumettes sont placées sous forme de carré d'une seule allumette de côté. Les allumettes restantes sont alignées, mais si le nombre demandé est supérieur, l'élève construit un deuxième carré… Il réalise des groupements par quatre qui pourraient être systématisés et déboucher sur un comptage de quatre en quatre.

Pour le type G, les allumettes forment une représentation « analogique » du symbole « 6 » ! Le hasard fait bien les choses (cela marche également pour « 5 ».)

Confrontation et institutionnalisation

Les travaux des élèves sont regroupés et triés en fonction du nombre qu'ils représentent. Pour chaque représentation, les élèves sont invités à expliquer leur choix à la classe. « Pourquoi as-tu regroupé ces allumettes ? Ce sont des groupes de combien ?... »

À propos des allumettes « en double ligne », un élève remarque en particulier que « *quand les lignes sont plus grandes, on sait que le nombre est plus grand.* » Il introduit de fait l'idée d'une comparaison qui serait facilitée par la disposition de l'outil « allumette ». Les lignes sont effectivement plus « longues », mais bien sûr, à condition que les allumettes aient toutes la même longueur, et qu'elles soient bien posées les unes à côté des autres. Et cette comparaison des longueurs est encore moins fiable avec le type C « en dents de scie », du fait de l'écartement plus ou moins grand des allumettes. Afin que les élèves en aient clairement conscience, il faut les confronter à la comparaison du nombre d'allumettes dans des configurations en « dents de scie » plus ou moins écartées. Ce faisant, plusieurs élèves en viennent à abandonner leur représentation dès lors qu'elle leur apparaît peu fiable lorsqu'il s'agit de comparer des collections.

À propos des allumettes « en carré », un autre élève constate : « *On voit qu'il y a un carré et un alors que là, il y a un carré et deux, ça fait plus* ». La formulation utilisée par cet élève est enthousiasmante. En effet, il parle de l'entité « carré » comme d'une unité en soi, dont il n'est même pas utile de savoir qu'il est constitué de quatre éléments pour effectuer la comparaison terme à terme. Autrement dit, il effectue l'équivalent d'un « passage à la dizaine » en base « quatre ». C'est finalement le « carré barré » qui servira de référence aux travaux ultérieurs de la classe, bientôt supplanté par la constellation des « doigts de la main », « représentation idéalisée » des doigts (Baruk, 2003) acceptée tout naturellement par les élèves parce qu'elle correspond au « système-doigt » du début de séance.

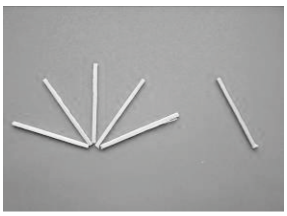
 

Figure 3 : Représentations adoptées

Par la suite, les élèves sont invités à traduire algébriquement ces diverses représentations selon la consigne : « Écrivez ce que vous voyez en langue mathématique. »

Les affichettes ci-dessous correspondent aux écritures produites en lien avec les représentations proposées à l'aide des allumettes pour le nombre six :

4 + 1 + 1	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	2 + 2 + 2	3 + 3	5 + 1

S'en suit alors un travail de classement en fonction des valeurs étudiées au fil des séances. Petit à petit est constitué une sorte de « dictionnaire » des nombres, référent de classe à usages multiples. Surtout, cet outil synthétise une première approche empirique de la notion d'équivalence, puisqu'il confirme, par nature, ce constat : « Un même nombre peut s'écrire de plusieurs manières différentes ».

Analyse de la démarche

Une démarche d'investigation ritualisée

À partir du moment où l'on privilégie des situations et des outils qui leur sont familiers, on donne aux élèves les moyens de mettre leurs représentations à l'épreuve. Ils vont observer, mais aussi manipuler, transformer, essayer, voire même détourner des objets afin de construire de nouveaux savoirs.

Les séances proposées vont donc la plupart du temps être articulées autour de quatre étapes : **problématisation, interprétation, confrontation** (souvent par affichage), **institutionnalisation**.

Problématisation de la situation

À la différence d'un manuel, l'objet[3] n'exige rien. Il n'enjoint pas les élèves de souligner, d'entourer, de compléter ou de cocher. Il ne leur demande pas une réponse, il suscite des interrogations. Tout se passe comme s'il matérialisait l'idée de Bassis (2003) selon laquelle « *… enlever les questions, c'est permettre aux élèves de commencer à s'en poser* ». Du coup, il devient superflu, voire inhibiteur de délivrer un quelconque mode d'emploi de l'objet proposé. Au contraire, les élèves sont dans un premier temps collectivement invités à l'observer ou le manipuler en toute liberté afin de déceler tout son potentiel mathématique. « *Qu'est-ce que c'est ? À quoi ça sert ? Comment ça marche ?* » sont les questions qui reviennent le plus souvent, par opposition au sempiternel « *Qu'est-ce qu'il faut faire ?* » induit par des énoncés conçus pour normaliser la réflexion[4].

Essais d'interprétation à travers l'utilisation de l'objet

C'est la situation (les objets et la façon dont l'enseignant les met en scène dans la classe) qui sanctionne ensuite directement les hypothèses. Il peut dédramatiser la relation de l'élève à l'enseignant dans la mesure où celui-ci constate la réussite ou l'échec d'un essai *avec* l'élève, *en même temps* que l'élève. C'est une opportunité pour les enfants complexés par leurs difficultés de langage d'investir la « scène » arithmétique. De la même manière,

[3] Nous revenons en dernière partie sur les divers types d'objets utilisés en classe de mathématiques ; leur caractéristique commune est l'existence de potentialités mathématiques.

[4] Hypothèse qui va très loin puisque Odette Bassis (p. 219) va jusqu'à soupçonner l'institution scolaire de formater les élèves pour des tâches mécaniques.

on peut espérer que le questionnement à partir d'objets manipulables puisse faciliter l'expression des hypothèses de chacun, contrairement à un écrit qu'il faut d'abord décoder.

Confrontation des procédés utilisés

Après une succession d'essais et d'erreurs, vient la phase de communication des données récoltées. Les élèves ont réalisé un affichage représentant le résultat de leur manipulation ; on note en général une grande hétérogénéité dans les représentations proposées. C'est au cours de cette phase que peut être mise en valeur la structure mathématique des objets manipulés. Ainsi, le codage de l'égalité comme des inégalités algébriques sera par exemple facilité par l'observation des oscillations du fléau de la balance numérique.

Institutionnalisation d'une procédure de résolution

Au bout du compte, la transcription arithmétique ou algébrique dite « écriture en langue mathématique » en classe doit permettre de comparer les situations étudiées entre elles, et de dégager des invariants permettant la conceptualisation des objets mathématiques abstraits à partir des objets matériels autour desquels s'est organisé le questionnement.

Organisation de la classe

Dans la mesure où l'on essaye de donner aux élèves eux-mêmes les moyens de construire leurs représentations, il devient indispensable que la classe soit organisée en conséquence pour partager les informations, les discuter et les valider.

Il parait bien difficile d'enfermer la démarche de découverte adoptée en classe dans une organisation de travail strictement individualisée et magistrale. Au contraire, il s'agit d'habituer chaque élève à pouvoir exprimer et expérimenter son point de vue à bon escient, de manière à ce que son apport soit reconnu et réinvesti par la classe. Ce que Descaves (1992) définit comme des « *actes discursifs* » grâce auxquels « *les élèves reprennent, reformulent, corrigent, déplacent, contestent les énoncés de leurs camarades, mais aussi les leurs* ». On peut envisager deux modes d'échange en fonction de l'objectif de l'activité menée.

Lorsque, après la première phase de questionnement collectif, survient le moment de tester sa capacité à utiliser le matériel, on essayera de favoriser la diversité des propositions d'élèves. Ainsi, il paraît judicieux de les inviter à partager les supports : en duo, ou éventuellement en équipe, si chacun peut endosser un rôle précis. Ce faisant, on parie sur la richesse des échanges entre élèves, qu'ils se traduisent par des comportements de coopération mais peut-être avec encore plus de profit dans le cas de confrontations d'idées. Tout se passe comme si l'habituel consentement tacite à tout ce que présente le « maître », celui qui sait, s'inverse vis-à-vis des pairs, dont les connaissances sont a priori contestables, surtout dans cette phase de découverte. Précisons que l'enseignant, s'il apparaît en retrait, endosse néanmoins un rôle fondamental de recours ou de régulateur lorsque des élèves ne parviennent pas à se mettre d'accord sur la justesse de leur réponse.

Ainsi, au cours d'un défi général lancé à la classe consistant à calculer le plus rapidement possible la somme 12 + 16, chaque groupe d'élèves a choisi son outil de prédilection : simples doigts, calculatrice, cubes emboitables ou boulier.

On utilise ici le boulier de façon sommaire, sans donner aux boules une valeur différente selon leur position. Après avoir appris à « lire » un nombre sur le boulier dans une séance précédente, l'élève manipulateur déplace tout d'abord dix et deux boules, avec l'assentiment de ses camarades. Puis il renouvelle l'opération avec le nombre seize, déplaçant dix et six boules. C'est la lecture du résultat qui pose problème.

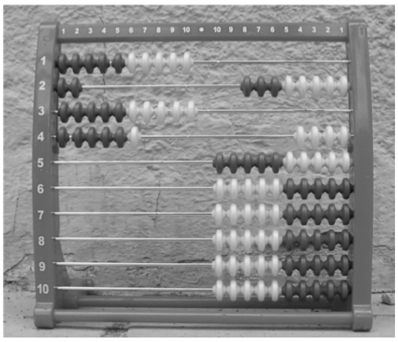


Figure 4 : Somme de douze et seize sur le boulier

Un premier élève compte une par une toutes les boules mais ses camarades le rappellent à l'ordre. Un autre s'empare alors du boulier, et compte dix d'un coup, mais semble très gêné par l'absence de succession entre les dizaines qu'il doit compter, jusqu'à ce qu'un troisième camarade intervienne :

> « - *Et ben deux lignes complètes, ça fait deux dizaines, alors ça fait vingt, et il reste les six.*
>
> - *Non mais t'as pas compté les deux, là.*
>
> - *Alors ça fait six, sept, huit ; ça fait vingt-huit.* »

On mesure ici à quel point chaque élève isolé aurait eu du mal à atteindre une proposition aussi performante que celle qui fut le fruit de la synergie du binôme. À condition, au minimum, que les élèves aient intégré quelques règles de travail collectif, élaborées au fil des séances comme un filet de sécurité peu à peu tissé, jamais terminé : droit à la parole, devoir d'écoute, concentration sur un même objectif, lisibilité du compte-rendu. Car, il faut bien avouer que dans le même temps, d'autres duos fonctionnaient beaucoup moins bien, soit qu'ils agissaient séparément malgré leur proximité, soit qu'ils se fourvoyaient de concert, et se renforçaient mutuellement dans leurs erreurs.

D'où l'utilité d'un deuxième moment collectif, celui de la synthèse et du réinvestissement. Cette fois, plutôt qu'une opposition entre des points de vue divergents, l'enseignant va au contraire s'attacher à rapprocher les conceptions des élèves, à faire émerger les procédés les plus judicieux afin de construire la procédure qui sera jugée la plus efficace pour la résolution d'un problème donné. Le plus souvent, on attribue à cette procédure le nom de l'élève qui en est à l'origine, ce qui, curieusement, constitue un repère plus évocateur pour les élèves en difficultés : au cours d'exercices de réinvestissement, ils privilégieront ainsi la « technique Rayan » qui consiste à additionner séparément dizaines et unités plutôt que la « technique Dounia » de surcomptage, fastidieuse et dépassée pour les nombres supérieurs à 10.

Lorsque les élèves parviennent à synthétiser une procédure de résolution du problème, il semble donc indispensable, à plusieurs titres, d'en formaliser la trace. D'une part donc, parce que son énonciation, puis ses multiples réinterprétations par d'autres élèves, doivent fournir une aide précieuse à celles et ceux qui ne sont pas parvenus à résoudre le problème de départ. D'autre part, parce que c'est la condition nécessaire à la comparaison des techniques d'élèves surtout lorsqu'il y a un délai important entre les séances, afin de mesurer les progrès accomplis au fil des séances.

Les matériels utilisés pour travailler les nombres au cours de l'année de CP

Au cours de l'année scolaire, ce travail de compréhension des nombres et de la numération s'est appuyé sur de nombreux supports matériels. Nous en proposons un classement en fonction de leur nature en page suivante.

supports naturels et ludiques	**instruments de mesure détournés pour un usage arithmétique**	**outils de calcul, ou spécifiquement conçus pour les apprentissages numériques**
cailloux, jetons, bûchettes dés, dominos, cartes à jouer, cubes emboîtables…	thermomètre, pendule, règle, compteur kilométrique, monnaie …	abaque, boulier, calculatrice, balance numérique, « boîte à dizaine », compteur numérique…

Figure 5 : Tableau de répartition des supports

À partir de là, il semble intéressant de choisir un représentant de chaque catégorie.

- Les allumettes, considérées comme un support faiblement inducteur, au même titre que des jetons.
- Le thermomètre, instrument de mesure physique à lecture mathématique, dont la lecture peut supposer la résolution de problèmes de calcul.
- La balance numérique, outil pédagogique conçu pour l'apprentissage de la notion d'égalité.

Les séances décrites se sont tenues dans différentes classes de CP, voire même de grande section de maternelle.[5] Elles doivent permettre de constater **comment s'est déroulée l'utilisation de différents supports matériels en classe.**

La balance de l'égalité

Contexte pédagogique

Cette séance s'inscrit dans une progression propre à l'usage de la balance. En effet, il paraît essentiel d'avoir commencé à observer le comportement physique de la balance et à interpréter mathématiquement les indications de cet instrument de comparaison des nombres.

Voici donc ce qui devrait être acquis. Premièrement, la valeur des plaquettes dépend de l'endroit où on les accroche : elle est indiquée par le chiffre visible surmontant le crochet, mais peut être également reconstituée en dénombrant les crochets qui séparent le chiffre indiqué du « 0 » central. Deuxièmement, la balance penche toujours du côté du nombre le plus « lourd » (au sens physique), c'est-à-dire le plus grand (au sens mathématique).

[5] L'occasion de remercier les enseignantes qui m'ont gracieusement « prêté » leurs élèves.

Troisièmement, une inégalité se traduit en langage mathématique par les signes < ou > entre les deux nombres.

Les programmes officiels enjoignent aux enseignants d'enseigner à « *écrire, nommer, comparer, ranger les nombres entiers naturels* » et à « *calculer mentalement en utilisant des additions observer et décrire pour mener des investigations* ». L'objectif de cette séance précise consiste à faire apparaître le sens de l'égalité à travers la présentation de l'équilibre entre différentes compositions d'un nombre. Les élèves seront amenés à développer, entre autres, les compétences suivantes : connaître la signification des mots-nombres de un à dix, dénombrer une collection, recomposer ou décomposer un nombre.

Problématisation collective

Cette fois, la mission des élèves, s'ils l'acceptent, consiste à réagir au défi suivant : « Comment équilibrer cette balance, à l'aide d'un seul poids supplémentaire ? »

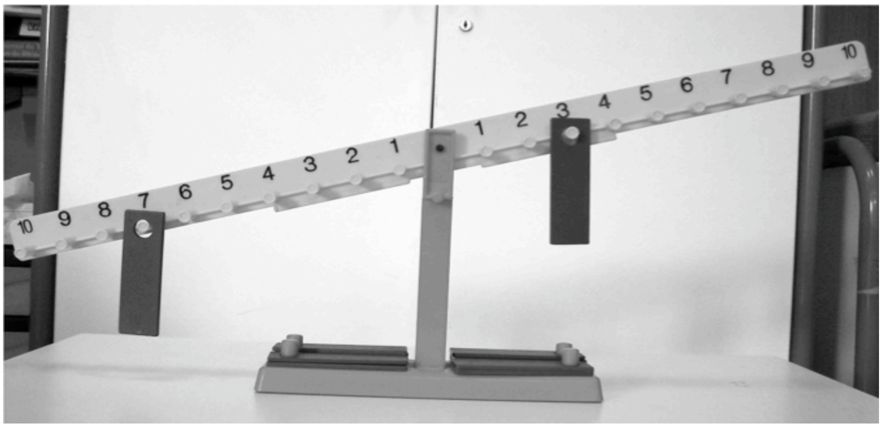


Figure 6 : Déséquilibre initial de la balance

La question s'articule en fait en deux parties : l'objectif, qui est l'équilibre, et la contrainte, que l'on peut faire varier (ici, il s'agit d'ajouter « un seul poids »). On pourrait d'ailleurs resserrer la contrainte en précisant « sans déplacer les poids déjà posés ».

Il s'avère extrêmement intéressant de solliciter les propositions d'élèves a priori, c'est-à-dire avant expérimentation de leur hypothèse. Un élève propose notamment de rétablir l'équilibre en accrochant en vis-à-vis un poids équivalent à l'un des nombres, en général le plus grand (c'est-à-dire sept dans ce cas). Échec patent bien sûr : la balance penche cette fois dans l'autre sens.

Afin d'éviter d'autres initiatives hasardeuses, une question s'impose alors: « Que s'est-il passé ? » La plupart des réponses rendent compte du geste effectué en le critiquant selon deux axes : « *Il a pas mis du bon côté.* » et *« Il a pas mis le bon nombre.* » Tout d'abord, régler le problème du « bon côté » en revenant à la situation initiale et en posant effectivement la question : « Que montre la balance ? » Ensuite, affiner l'analyse « pas le bon nombre » avec cette simple question : « A-t-il mis trop ou pas assez ? » La balance penchant du côté où le poids a été rajouté, les élèves en déduisent rapidement que « sept » était trop grand.

L'expérience montre que la balance est dans un premier temps perçue par les élèves comme un outil de comparaison de valeurs, exprimées par des ordinaux inscrits sur le bras de la balance. Or, les crochets permettent de visualiser les quantités, à condition de déplacer le poids de un jusqu'à sept afin de faire apparaître la collection et de placer un élastique qui matérialise chaque ensemble.

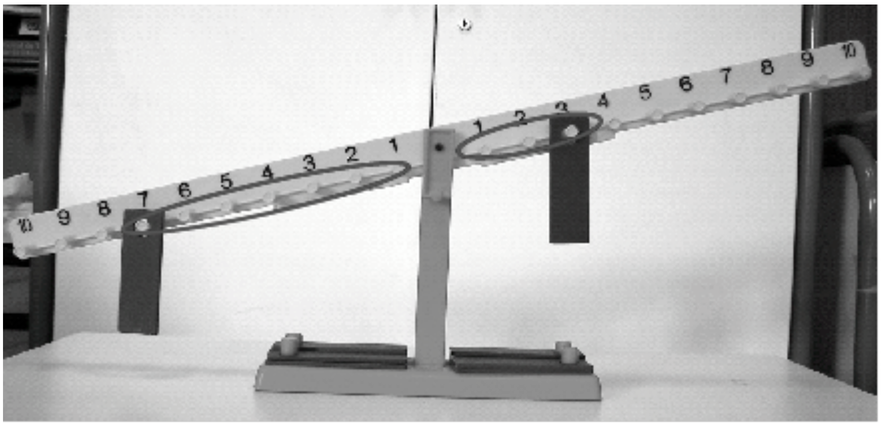


Figure 7 : Deux ensembles de crochets délimités par des élastiques

Dès lors, les élèves sont invités à poursuivre la recherche en duo.

Manipulation, confrontation...

Afin de faciliter le compte-rendu des innombrables faits et gestes observés dans la classe, résumons les propositions des élèves à trois types de stratégies. Celles-ci sont confrontées au cours des phases collectives, ce qui va favoriser les déplacements de certains élèves d'une stratégie à une autre qu'ils vont percevoir comme plus rapide. Les traductions algébriques sont proposées par l'enseignant dans le temps d'institutionnalisation comme un codage résumant de façon symbolique la manipulation réalisée

Premièrement, la stratégie du tâtonnement organisé. Puisque « sept » est « trop », les élèves essayent donc « six », puis « cinq », … jusqu'à parvenir à l'équilibre. Dans cette stratégie très empirique, il n'y a pas d'anticipation précise sur le résultat. C'est l'instrument qui fournit la réponse par essais et erreurs successifs.

Traduction algébrique : $7 = 3 + 7 - 1 - 1 - 1$

Deuxièmement, la stratégie du surcomptage des crochets. Les élèves utilisant cette stratégie tiennent compte de l'observation de l'élastique qui forme l'ensemble « trois ». Ils surcomptent sur leurs doigts à partir de « trois » jusqu'à « sept » et constatent qu'ils ont levé quatre doigts. Cette fois, les élèves établissent a priori qu'il leur manque quatre pour atteindre sept. Ils recomposent sept en trois plus quatre. La balance permet simplement de valider le résultat.

Traduction algébrique : $7 = 3 + 4$

Troisièmement, le décomptage des crochets. Les élèves tiennent compte de l'observation de l'élastique qui forme l'ensemble « sept ». Ils portent ce « sept » sur leurs doigts, en baissent trois, et constatent qu'il en reste quatre levés. En fait, l'opération matérielle correspondante consisterait à enlever trois de chaque côté de la balance, c'est-à-dire se saisir du poids accroché au « sept » et le « reculer » de trois crochets pour établir l'équilibre à « quatre ». Soit, $7 - 3 = 3 - 3 + 4$. Là encore, les élèves établissent a priori que sept se décompose en trois plus quatre. La balance permet simplement de valider le résultat.

Traduction algébrique : $7 - 3 = 4$

Confrontation et institutionnalisation

De même que pour les allumettes ou le boulier, la classe construit au fil d'exercices de réinvestissement une procédure de traitement des problèmes algébriques afin de dépasser le stade du tâtonnement.

Voici les cinq questions que chaque élève est invité à se poser.

> En première analyse, il faut comparer les nombres portés sur la balance, c'est-à-dire déterminer quel nombre est le plus grand et quel nombre est le plus petit.
>
> À partir de là, on peut en déduire un choix d'action : de quel côté de l'axe (de la balance) vais-je agir ?
>
> On émet une hypothèse associée sur le type d'action à mener : vais-je rajouter ou enlever un nombre ?
>
> Ensuite, on peut avancer une seconde hypothèse quant au nombre à rajouter ou enlever : combien vais-je rajouter ou enlever ?
>
> Enfin, l'observation de la balance permet de confirmer ou d'infirmer l'action : est-ce que j'ai réussi à rétablir l'équilibre ?

Les secrets du thermomètre

Contexte pédagogique

Dès le cycle deux, il est demandé aux élèves d'effectuer des relevés de température. Or, en dehors des considérations physiques au sujet de la pertinence de l'utilisation du thermomètre, il apparaît rapidement que la seule lecture de ses graduations pose de sérieux problèmes aux élèves. Une évaluation initiale permet d'établir que exactement 90% des vingt-deux élèves de la classe sont incapables de lire la température de 19°C, bien que le niveau du liquide ait été correctement repéré. Cet échec ne concerne-t-il pas l'enseignement de l'arithmétique ?

Cette séance supposait que les élèves soient capables de reconnaître l'écriture chiffrée des dizaines jusqu'à cinquante au moins. Elle a démarré comme une remédiation propre à l'utilisation d'un instrument de mesure spécifique. Mais il s'est avéré qu'elle permettait de poursuivre de précédentes investigations sur la notion d'équivalence, appliquée cette fois à des stratégies de calcul additif et soustractif en concurrence. Au moment où la séance commence, les élèves connaissent l'utilité du thermomètre (mesurer la température) sans que son utilisation ait été abordée en classe ; en effet, c'est un appareil automatique à cadran qui était utilisé jusque-là.

Les programmes officiels enjoignent aux enseignants d'enseigner à « *écrire, nommer, comparer, ranger les nombres entiers naturels* ». L'objectif de cette séance précise consiste à inciter les élèves à susciter une décomposition ou une recomposition d'un nombre afin de pouvoir évaluer un niveau sur une échelle de graduation. Les élèves seront amenés à développer, entre autres, les compétences suivantes : connaître l'écriture numérique des dizaines jusqu'à quarante, produire et reconnaître les décompositions additives d'un nombre, et résoudre des problèmes de la vie courante.

Problématisation collective

Les élèves ont donc déjà été confrontés au défi brutal de la lecture d'un thermomètre à graduations. Afin de les inciter à découvrir les spécificités du thermomètre à graduations, ils sont invités à le comparer à celui qui fournit directement la température sur un cadran.

Une fois de plus, ce sont les nombres figurés qui attirent immédiatement leur attention ; « Celui-là (l'automatique) on voit écrit le nombre dix-neuf, alors que l'autre, y a zéro, dix, vingt… » Cette remarque permet de se faire une idée de la confusion qui existe dans l'esprit des élèves entre le niveau de la température que l'on recherche et les niveaux effectivement inscrits sur le thermomètre. Première source de réponse erronée lors de l'évaluation initiale de lecture de la température, puisque nombre d'élèves ne tenaient pas compte du niveau du liquide de mesure. Du coup, il devient indispensable de s'interroger sur ces fameux nombres inscrits régulièrement tout le long du thermomètre.

Dans un premier temps, certains élèves ne manquent pas de s'apercevoir qu'il s'agit des « dizaines », que l'on avait en particulier rencontrées au cours de précédents travaux sur le boulier. Celui-ci est d'ailleurs réquisitionné par l'enseignant pour appuyer la démonstration : **dix** boules font **la dizaine**. Dès lors que la nature de ces nombres est devenue claire, il reste à déterminer leur fonction sur ce thermomètre. Il apparaît rapidement aux élèves que la température ne peut pas être indiquée par plusieurs dizaines à la fois. Alors « À quoi servent les graduations ? »

Ici encore, l'observation comparée du boulier et du thermomètre, organisée par l'enseignant, est d'un grand secours.

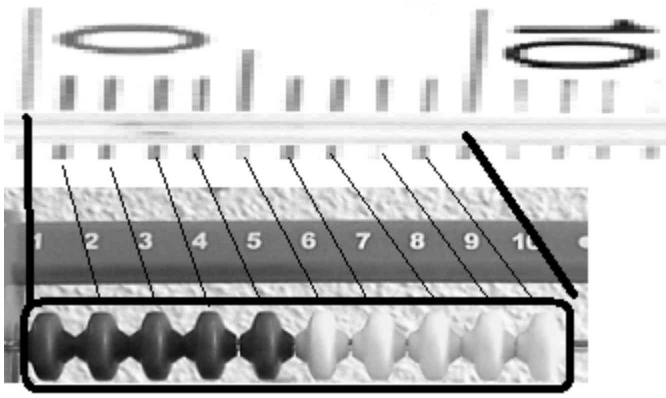


Figure 8 : Comparaison du thermomètre et du boulier

La plupart des élèves vont déduire la signification des graduations du thermomètre par analogie :

petite graduation ☞ boule

moyenne graduation ☞ couleur de cinq boules.

grande graduation ☞ ligne de dizaine.

Reste en suspens, la question essentielle : « Comment fait-on pour lire la température sur ce thermomètre à graduations ? » L'un des rares élèves qui a réussi l'évaluation initiale lève le doigt : « *On regarde jusqu'où monte le « bleu » (le liquide) dans le tube, et on compte les traits.* » Bien entendu, cette explication est loin d'être satisfaisante. Il n'est pas fait mention des différents types de graduations, et surtout, de l'origine à partir de laquelle on va compter les graduations. Difficulté qui s'apparente à celle rencontrée dans la manipulation du double décimètre. Mais les graduations sont finalement désignées comme des aides à la lecture.

Démonstration faîte aux autres élèves, des duos de travail sont formés qui vont devoir lire la température d'un thermomètre plongé dans de l'eau froide, tiède ou chaude, dans la continuité d'un travail sur les différents états de l'eau.

Manipulation

Le dispositif de mesure est schématisé. Une étiquette est réservée à l'inscription de la température. Chaque binôme est amené à expliquer comment il est parvenu au résultat indiqué.

Voici l'éventail des réponses évoquées. Deux types d'erreurs d'abord, puis trois stratégies plus ou moins efficaces pour une lecture réussie.

Erreur 1 : le comptage à partir de « - 45 » au lieu de « 0 »

Du coup, la température lue est de 63° au lieu de 19°. Sollicités pour éclaircir un peu leur démarche, les deux élèves désignent l'extrémité basse du thermomètre (-45°) et entreprennent de recompter les graduations jusqu'à « +19° ». Il s'agit d'une confusion avec les bandes numériques, jeux de l'oie et autres supports ordinaux qui « commencent » par « zéro », conçu comme « l'origine », le point de départ. Ce qui n'est pas le cas des thermomètres, qui comprennent également des nombres « relatifs » à la température de fusion de l'eau qui sont négatifs.

Erreur 2 : désignation de la dizaine inscrite la plus proche

Les élèves ont lu 30° au lieu de 33° et se justifient ainsi : « *On a vu trente et ça monte jusque-là (montre trente-quatre) alors c'est trente.* » Il faut avouer que les thermomètres utilisés comportaient un sérieux piège pour les non initiés. En effet, si les graduations des dizaines étaient visiblement plus longues, l'écriture chiffrée de la dizaine correspondante était décalée vers le haut. Un autre instrument eut été préférable, au moins dans la phase de découverte.

Stratégie 1: comptage depuis « zéro »

La température mesurée et lue est de 12°. Les élèves expliquent qu'ils « *comptent les traits : zéro, un, deux, …, douze* » en joignant le geste à la parole. Rassurante, cette stratégie est néanmoins fastidieuse, et susceptible de provoquer des erreurs du fait de la quantité de petites graduations rapprochées à distinguer.

Stratégie 2 : surcomptage depuis la dizaine inférieure

La température mesurée et lue est de 13°. Les élèves appliquent une procédure de lecture économique et simple : « *Là c'est dix (ils montrent la graduation dix) et on continue onze, douze, treize.* » en joignant le geste à la parole. Elle correspond à la compétence que chaque élève devra acquérir au cours de cette séance. Traduction algébrique : $10 + 3 = 13$.

Stratégie 3 : décomptage depuis la dizaine supérieure

La température mesurée et lue est de 19°. L'élève décrit son raisonnement ainsi : « *On voit que c'est presque là (montre dix-neuf) En fait, c'est juste avant vingt alors c'est dix-neuf.* » Encore plus subtile, la démarche de cet élève correspond à celle d'un adulte. Il se repère par rapport à la graduation immédiatement lisible (ici « vingt ») la plus proche, puis effectue une opération mentale simple (ici, retrait de une unité). Traduction algébrique : 20 - 1 = 19.

Confrontation et institutionnalisation

Les précédents résultats des élèves font l'objet d'une discussion collective organisée par l'enseignant. Celui-ci met en évidence trois « techniques de lecture » du thermomètre possibles, référencées en fonction du nom de leur rapporteur, et surtout, transcrites en « langue mathématique » pour affichage.

La « technique Imane » ou « comptage à partir de zéro »

Elle se traduit ainsi :

1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + + 1 + 1 + 1 + 1 = 19.

Les élèves eux-mêmes ont peu goûté la longueur de l'écriture, convenant qu'elle était trop longue pour être bien lisible.

La « technique Myriam » ou « surcomptage à la dizaine »

Elle peut s'écrire 10 + (5 + 4) = 19.

Au cours de la présentation de leurs travaux, les élèves ont perfectionné le surcomptage à la dizaine en considérant les graduations moyennes « de cinq en cinq ».

La « technique Yanis » ou « décomptage à la dizaine »

Elle est traduite par l'égalité 20 – 1 = 19.

Afin d'amener les élèves à définitivement préférer la technique la plus efficace, des exercices sont proposés où apparaissent des caches rendant impossible le comptage graduation par graduation.

Évaluation

Après plusieurs courtes séances d'entraînement où ils ont été amenés à préférer les stratégies de calcul à celle de comptage, les élèves sont évalués individuellement, en tête à tête avec l'enseignant à l'aide de l'exercice suivant :

Lis la température sur chaque thermomètre.
Comment as-tu fait ? Écris-le en langue mathématique.

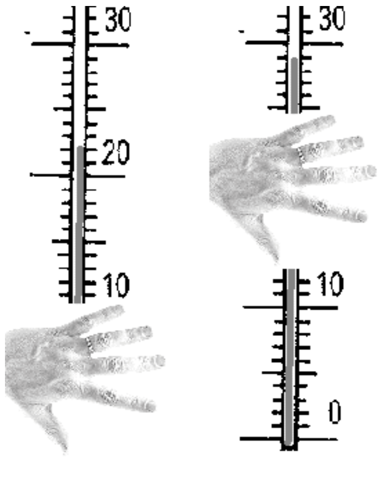


Figure 9 : Exercice de lecture du thermomètre

	thermomètre « additif »	thermomètre « soustractif »
lecture/écriture correctes	12	5
échecs	6	13

Figure 10 : Résultats de l'évaluation de lecture du thermomètre
(18 réponses enregistrées)

En première analyse, il ressort de cette évaluation que la grande majorité des élèves a appris à surcompter à la dizaine inférieure, et peut transcrire l'opération sous forme d'addition. En revanche, seulement une minorité est en mesure de décompter à la dizaine supérieure, le réflexe restant pour la plupart, de faire une approximation à partir de la dizaine inférieure « qui doit être par là » sous le cache !

Portée et limites

Bien que les différentes activités semblent avoir fonctionné de manière satisfaisante et apportent un éclairage précieux sur l'utilité des manipulations en arithmétique, il convient de se demander jusqu'où aller dans l'utilisation des différents supports proposés ?

Appropriation des outils ?

La plupart des élèves de la classe n'avaient qu'une connaissance imparfaite des instruments qui ont servi de support à l'apprentissage. Certains noms leur étaient inconnus (« le boulier »), d'autres sévèrement écorchés (la « balançoire »). D'autre part, si leur usage habituel leur était quelque peu familier (« *Le thermomètre, ça sert à savoir s'il fait chaud.* »), les principes de leur utilisation semblaient loin d'être acquis. À quel point ont-ils appris à tirer le meilleur parti de ces différents supports au cours de leurs apprentissages ?

Discussion avec les collègues de l'école

Suite à une enquête auprès des collègues du cycle trois, sont apparues diverses problématiques.

Tout d'abord, s'est posée la question de savoir ce qu'il fallait entendre par instrument, support ou outil utilisé. Au-delà des précisions sémantiques, il s'agissait bien de distinguer des pratiques d'enseignement parfois assez éloignées. Ensuite, la plupart des enseignants ont pu mesurer, en une vingtaine de minutes d'introspection, à quel point ils avaient pu sous-estimer dans un premier temps l'utilisation qu'ils faisaient de divers matériels utilisés en mathématiques. Passé les objets d'évidence prévus pour les activités numériques, on en venait souvent à aborder des artefacts plus hétéroclites : horloge, thermomètre ou calendrier, dont il s'avère que c'est justement un aide-mémoire pour certains élèves qui maîtrisent mal la suite numérique au CP.

Du coup est apparue, au cours d'une discussion plus informelle, la question de savoir dans quelle mesure l'utilisation d'objets non strictement mathématiques pouvait jeter le trouble dans l'esprit des élèves. Ainsi, un enseignant de CE2 redoutait que la lecture d'un thermomètre, parallèlement à celle du double-décimètre, n'engendre des confusions par rapport à la signification des valeurs de leurs graduations respectives. S'agit-il vraiment d'un handicap, d'un piège ? Ou bien d'une opportunité ? N'est-ce pas justement en développant un programme de travail progressif autour de ces objets plus ou moins complexes que l'on peut affermir les connaissances des élèves, plutôt qu'en les enfermant dans l'acquisition mécanique de savoirs formatés.

Le thermomètre

Certains instruments, il est vrai, supposent l'apprentissage de codes arbitraires : la longueur des graduations du thermomètre en est un exemple. Faut-il pour autant éluder le problème ? Deux raisons au moins portent à croire que ce serait dommage. En effet, dans la mesure où cet instrument fait partie du quotidien, il entre dans les prérogatives de l'école de s'en emparer pour le comprendre (cf. injonction à « *résoudre des problèmes de vie courante* » au CP dans le texte des programmes). De plus, cette particularité est partagée par d'autres instruments, à commencer par le double décimètre dont l'usage occupe une place prépondérante dans la scolarité des élèves.

Les séances réalisées avec le thermomètre ont constitué une référence au cours des semaines et des mois qui ont suivi. La classe parlait d'« *approcher un nombre par surcomptage à la façon de Myriam ou par décomptage à la façon de Yanis* » dans les exercices de ciblage des nombres comme le « nombre-cible » (ERMEL, 2005). Autrement dit, on a misé avec succès sur une difficulté liée à la notion de température, estimant comme le souligne Brissiaud (2005) que « *non seulement l'usage du nombre aide à la construction de ces notions* (de grandeur continue comme la température), *mais les activités menées* (…) *participent en retour au développement de bonnes connaissances numériques* ».

Les allumettes

Dans le cas des allumettes, le support ne présentant évidemment pas les mêmes caractéristiques qu'un instrument complexe comme le thermomètre, la recherche est beaucoup plus libre. Il s'agissait d'ailleurs d'une condition absolument nécessaire dans la mesure où était espérée la plus grande variété de réponses possibles. Le choix est le même que celui adopté par Bassis (2003) « *d'un matériel simple à manipuler, non inducteur, se prêtant commodément aux regroupements et à leur matérialisation* ». La consigne associée se révèle d'ailleurs moins contraignante encore, puisqu'il est laissé entièrement à l'appréciation des élèves la nécessité d'effectuer ou non des regroupements. Or, il faut bien admettre que c'est le plus souvent la dimension restreinte du format de la feuille ou des considérations purement esthétiques qui ont dicté le choix d'organisation de placement des allumettes de nombreux élèves.

Dans le foisonnement des réponses, le rôle de l'enseignant est donc fondamental : il doit être capable de percevoir rapidement l'intérêt arithmétique de certaines représentations afin de l'exposer aux élèves au cours de l'analyse des productions. On a vu comment le nombre « six » pouvait ainsi être présenté comme « un carré et deux ». Peut suivre alors une phase de réinvestissement qui doit permettre aux élèves s'étant fourvoyés dans des représentations sans intérêt de s'approprier les découvertes réalisées par d'autres à travers la résolution de petits problèmes de comparaison de nombres en particulier.

La balance

Concernant la balance numérique, ce qui impressionne immédiatement les élèves, c'est la capacité de cet instrument à tenir l'équilibre entre des nombres pourtant différents. La classe est en présence d'un support qui « parle de lui-même », ce qui permet aux élèves d'évaluer par eux-mêmes la validité de leurs hypothèses. Ici, l'objet arithmétique permet donc de relier un concept mathématique à un concept physique, donnant du sens à des symboles. Ainsi la balance numérique nous enseigne-t-elle que l'égalité, c'est l'équilibre. Et un corollaire, peut-être encore plus intéressant : l'égalité, ce n'est pas l'identité. Par exemple, si quatre et trois équilibrent sept, quatre et trois ne se représentent pas pour autant comme sept. Les deux écritures sont égales sans être identiques.

Cette propriété que la balance met en évidence se traduit symboliquement par le signe « = », dans ce que les élèves ont une grande fierté à nommer une « équation », comme ils le feront au collège. Pour une fois, ce signe « = » ne se limite pas à être la ponctuation rituelle d'une opération, il ne se réduit pas à être énoncé comme un « *ça fait* ». Il serait plutôt le témoin d'une comparaison de valeur qu'il faudrait traduire par « *ça équivaut à* ». Pour résumer, il faudrait comme le fait ERMEL (2005) considérer qu'*« il existe en fait plusieurs significations pour le signe =. Le signe = du mathématicien traduit effectivement l'équivalence entre deux désignations, il est donc symétrique. Le signe = de l'usage social, aujourd'hui renforcé par l'utilisation des calculettes, annonce le résultat d'un calcul, il n'est donc pas symétrique* ».

Conçue comme un outil pédagogique, la balance présente néanmoins des inconvénients que d'autres supports moins spécifiques permettaient d'éviter. Ainsi, dans le cas de la réunion de deux ensembles, les crochets de la balance induisent un chevauchement des éléments de chaque ensemble. Ce qui pourrait entraîner une confusion dans l'esprit des élèves qui se fient plus au cardinal visible des crochets d'amarrage des poids qu'aux nombres figurés au-dessus :

Figure 11 : Représentation de la somme sur la balance

On ne voit pas sept éléments puisque trois sont comptés deux fois : on a l'illusion de « 3 + 1 » au lieu de « 3 + 4 ».

Évidemment, aucun support n'est parfait. D'où l'intérêt de les diversifier, et parfois même de les associer lorsque des analogies sont possible, comme c'était le cas avec le thermomètre et le boulier.

Développement de l'autonomie ?

Au cycle deux, le chapitre « Mathématiques » des nouveaux programmes commence par cette phrase, dont on a du mal à déterminer s'il s'agit d'un constat ou d'une injonction : « *L'apprentissage des mathématiques développe l'imagination, la rigueur et la précision, ainsi que le goût du raisonnement.* » Autant d'éléments de ce qui pourrait être considéré comme des vertus propres à la pratique des mathématiques, dessinant les contours d'une « *citoyenneté mathématique* » idéale[6]. Dans quelle mesure les séances pratiquées étaient-elles propices au développement de ces qualités ?

---

[6] Expression et concept extraits du discours *Pour une citoyenneté mathématique* par Jean-Pierre Bourguignon, directeur de l'Institut des hautes études scientifiques. « *Par nature les mathématiques entretiennent une relation particulière avec la notion de vérité. Leur exigence de rigueur tend à rendre leur présentation ésotérique. Pourtant c'est bien à cause de cette ascèse qu'un énoncé mathématique prend une*

Imagination

Comme il est difficile de s'arracher à l'attendu mathématique en classe. Il faut avoir posé la question « Qu'est-ce qu'un nombre ? » à maintes reprises au cours préparatoire ou même en grande section de maternelle pour se rendre compte à quel point les élèves sont systématiquement heureux de pouvoir désigner, d'une manière ou d'une autre, une de ces écritures chiffrées qu'ils ont eu tant de peine à mémoriser. Imaginer un nombre, le « mettre en image », ce n'est pas anodin, ce n'est pas inutile, ça peut être exaltant. L'épisode de la chasse aux nombres, par exemple, a été d'abord vécu comme une activité quelque peu incongrue, puis excitante, se révélant par la suite être une référence pour certains élèves, certaines propriétés arithmétiques faisant écho à leurs propres découvertes : « *Les trois fois quatre, ça me fait penser à un rectangle !* » ou encore « *Les nombres pairs, c'est comme quand on est en rang !* »

En classe, on le voit, le moteur de l'imagination, c'est souvent l'analogie. « *Ça me fait penser à* », « *C'est comme* » sont des expressions souvent utilisées par les élèves à qui la situation proposée évoque des connaissances antérieures. Si elles ne sont pas forcément justifiées, ces analogies sont de toute façon recevables à condition d'être exprimées et vérifiées en classe, car elles peuvent être traîtresses ! Sander (2009) attire en particulier l'attention des enseignants sur le fait que « *l'intervention des analogies dans nos raisonnements les plus automatiques est révélée par les erreurs qu'elles nous font parfois commettre.* » Ainsi en va-t-il de la dénomination des dizaines : « soixante-dix », quatre-vingts » et autres « quatre-vingt-dix » ne peuvent être écrits comme ils sont entendus, comme c'était le cas dans le reste de la suite des nombres. Il est donc difficile de reprocher son analogie à l'élève qui écrit « 618 » pour « 78 ». Simplement, ce qui avait fonctionné jusque-là doit être réévalué et abandonné au profit d'une compréhension algébrique dont le boulier sera le témoin : six dizaines et une dizaine sont regroupées pour retrouver sept dizaines et huit unités, L'imaginaire, déclencheur de l'analyse, s'arrête lorsqu'intervient la construction d'un système rigoureux.

Rigueur et précision

La manipulation est une première école de rigueur. Une impulsivité désordonnée alliée à un excès de confiance en soi entraîne en effet la plupart du temps d'inévitables déceptions quant aux résultats espérés. Il y a ainsi toujours des élèves pour dire « *Je sais ! Je sais !* » et arracher les objets des mains des autres, leur brutalité semblant garantir que l'expérience se déroulerait conformément à leur volonté. Lorsque par exemple, pour rééquilibrer la balance, un élève accroche « dix » en vis-à-vis de « quatre » et « trois » « *pour être sûr* » que ce soit suffisant, son manque de subtilité est immédiatement sanctionné par le nouveau déséquilibre qu'il a lui-même contribué à créer. Heureusement, la proximité d'élèves aux

---

dimension d'éternité, et confie à celui qui en a maîtrisé les détours une assurance qui peut être le fondement d'une liberté gagnée contre l'affirmation arbitraire (…) La liste des situations de la vie courante où se cachent des mathématiques est bien longue. (...) À cause de leur présence multiforme dans les sociétés modernes, les mécanismes fondamentaux des mathématiques doivent être intelligibles au plus grand nombre possible de citoyens. Il s'agit de leur permettre d'exercer leur jugement de façon responsable, sans se laisser abuser par un usage éventuellement tendancieux d'informations à caractère mathématique. Pour ne pas réduire ces "mathématiques pour tous" à un dressage et pour les faire percevoir comme une science en action, elles doivent prendre du sens, et c'est là que se situe le véritable écueil. »

comportements dissemblables permet de dépasser ces errements. Car il existe toujours également des élèves plus attentistes mais néanmoins observateurs, qui sont en mesure d'expliquer pourquoi l'hypothèse de leurs pairs leur paraît erronée (« *Il a mis trop.* ») et comment y remédier (« *Il faut compter combien ça fait quatre et trois pour savoir où il faut rajouter.* »). Synthèse de ces débats, le protocole d'action de rééquilibrage de la balance évoqué plus haut est un outil censé apporter la rigueur qui fait défaut à certains élèves.

La communication d'un évènement ou d'une situation observée est également l'occasion d'un travail de précision et d'à-propos. Toujours dans le cas de l'utilisation de la balance numérique, il était souvent demandé aux élèves de « traduire en langue mathématique », (puis plus tard « d'exprimer par une équation ») « ce qu'ils voyaient, tout ce qu'ils voyaient et rien que ce qu'ils voyaient ». Des camarades, informés par l'écriture algébrique produite, devaient alors la décoder pour la recomposer sur une autre balance. La comparaison entre la balance « émettrice » et la balance « réceptrice » devait finalement permettre d'évaluer la qualité du message mathématique.

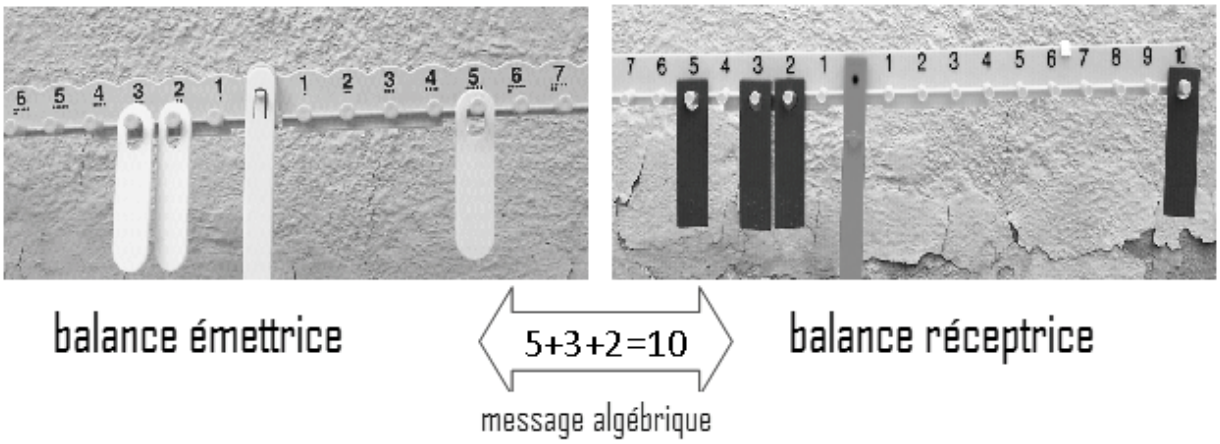


Figure 12 : Transmission de message algébrique

Stupeur des élèves lorsqu'ils constataient le décalage. À la question « Est-ce que cette équation est juste ? », la classe répondait par l'affirmative, confortée par l'équilibre constaté sur la balance réceptrice. Mais à la seconde question « Est-ce qu'elle correspond à ce que l'on voit ? », certains élèves s'étonnaient de voir apparaître ce « 10 », et surtout, que les trois nombres « 5 », « 3 » et « 2 » soient additionnés comme s'ils étaient portés du même côté du signe « = ».

Preuve était faîte qu'une équation peut être juste sans pour autant être utile. Et que le retour à l'observation critique est susceptible de permettre aux élèves de repréciser le sens de ce qu'ils écrivent.

Goût du raisonnement

Difficile de bien cerner à quoi correspond précisément le « goût du raisonnement ». Toujours est-il que l'expérimentation de nouveaux supports de réflexion tend à affûter la curiosité des élèves qui pourraient se lasser d'exercices systématiques trop répétitifs. Il arrive cependant un moment où les instruments mathématiques utilisés en classe deviennent superflus, voire contre-productifs.

Ainsi était-il proposé à chaque élève, à titre d'évaluation, de comparer à l'aide du support de leur choix les deux sommes $\boxed{\mathbf{1 + 5 + 7 + 9}}$ et $\boxed{\mathbf{8 + 4 + 1 + 6}}$. Évidemment, l'ordre des nombres proposés n'était pas fortuit, mais choisi à dessein pour induire en erreur les élèves tentés par une réponse impulsive. Or, après une courte réflexion, un élève assura que la première somme était la plus grande. Affirmation apparemment péremptoire mais déjouant le piège tendu, qui nécessitait quelques éclaircissements.

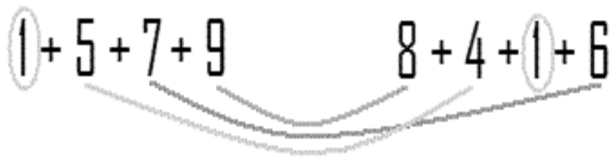


Figure 13 : Comparaison terme à terme

> *« En fait, là on voit qu'il y a neuf, et c'est plus grand que huit. Et puis là il y a sept, et c'est plus grand que six de l'autre côté. Et là cinq, c'est plus grand que quatre. Et un et un c'est pareil. Alors c'est cette somme* (la première) *la plus grande. »*

Au fil de la comparaison terme à terme menée par cet élève, il devenait évident que la première somme était bien la plus grande, mais surtout, que, d'une part, effectuer ces sommes serait une perte de temps, et d'autre part, il était également inutile d'utiliser un quelconque support. Démonstration extrêmement éloquente de cette mise en garde de Bonhême et Descaves (2007) : « *L'utilisation de ce matériel doit être momentanée car l'objectif est bien de permettre aux élèves d'attribuer directement des significations aux écritures.* »

Structuration des connaissances ?

La multiplication des supports de travail est susceptible de fractionner les connaissances des élèves si elle n'est pas organisée par une progression rigoureuse. Si on fait l'hypothèse, comme dans ERMEL (2005) que « *les connaissances ne s'entassent pas, ne s'accumulent pas* », mais que « *leur élaboration est soumise à des ruptures et à des restructurations* », il est essentiel de fournir aux élèves les moyens de mettre un peu d'ordre dans ce qu'ils auront appris au contact des différents supports et instruments fréquentés en classe. Quelles représentations formelles des connaissances ont émergé, qui ont pu permettre d'assurer leur cohérence, afin de pouvoir les réinvestir ou les partager ?

Conceptualisation des nombres

Au fil des séances d'arithmétique, les élèves ont été amenés à analyser les nombres, travailler leurs représentations en fonction de différents supports. Afin de mettre directement en correspondance ces différents travaux, un affichage spécifique, sorte de « lexique numérique » a été peu à peu constitué.

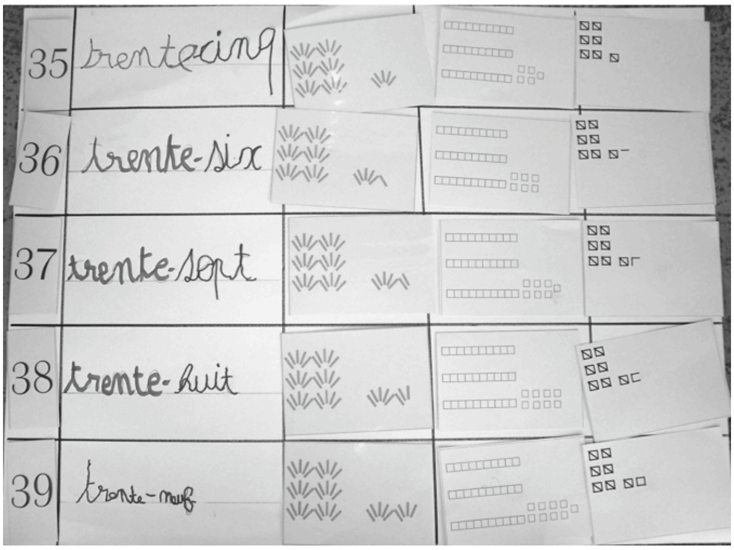


Figure 14 : Tableau dit « lexique numérique »

Il est également d'un grand secours lorsque certains élèves, oubliant la valeur du chiffre des dizaines, le réduisent au même rang que celui des unités dans des écritures additives erronées telle « 38 = 3 + 8 », ou inversement, lorsqu'ils concluent que « *Trois et huit, ça fait trente-huit* ».

Ranger pour structurer sa mémoire, mais également, ranger pour découvrir les propriétés des nombres. Ainsi peut-on envisager de développer une séance complète portant sur les « nombres figurés » à l'aide des allumettes, de simples gommettes ou autres cailloux.

La consigne étant la suivante : « rangez les points pour former des groupes qui aient tous le même nombre de points, sans qu'il n'en reste aucun en dehors des groupes ». À cette occasion, les élèves ont pu découvrir comment le « trois », le « six » ou le « dix » étaient « triangles », le « quatre » ou le « neuf » étaient « carrés », le « seize » étant même « carré de carré ».

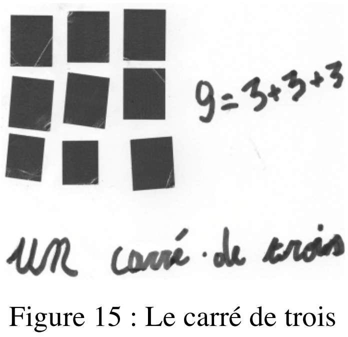


Figure 15 : Le carré de trois

La conceptualisation du nombre ne se limite cependant pas à sa représentation. Au sens où l'entend Brissiaud (2005), c'est aussi la capacité à « *disposer de plusieurs procédures pour construire une collection(..) et, dans un contexte donné, adapter celle qui convient le mieux en fonction de ce contexte* ». Ce « *comportement stratégique* » ne peut être que le fruit d'un long travail de sensibilisation à la nature multiforme des nombres. Or, celle-ci est souvent révélée par l'usage de divers supports dont les avantages peuvent être exploités pour chaque situation. À titre d'exemple, il faut reconnaître au boulier le mérite de décomposer automatiquement les nombres en dizaines et unités, facilitant par là grandement les additions de nombres à deux chiffres. Ainsi, l'écriture « 24 + 55 » sera recomposée en « 70 + 4 + 5 » par le simple déplacement des boules, comme une invitation à associer dizaines d'une part et unités de l'autre dans des prémisses d'addition à colonne. Du même coup, il permettra de mieux comprendre la signification des nombres « irréguliers » entre soixante-dix et quatre-vingt-dix-neuf en faisant apparaître la décomposition que la langue a retenue.

Maîtrise de la mathématisation

À propos des écritures additives et soustractives, ERMEL (2005) souligne à quel point « *traduire par écrit les termes d'un problème ou les relations entre les nombres relève d'un apprentissage* » qui n'a rien de naturel mais doit au contraire « *se poursuivre sur un temps assez long si l'on veut éviter de faire manipuler par les élèves des traces écrites vides de sens* ». La plupart du temps, cet apprentissage se fait par étapes, en relation avec le protocole d'observation du support utilisé, comme dans le cas de la balance.

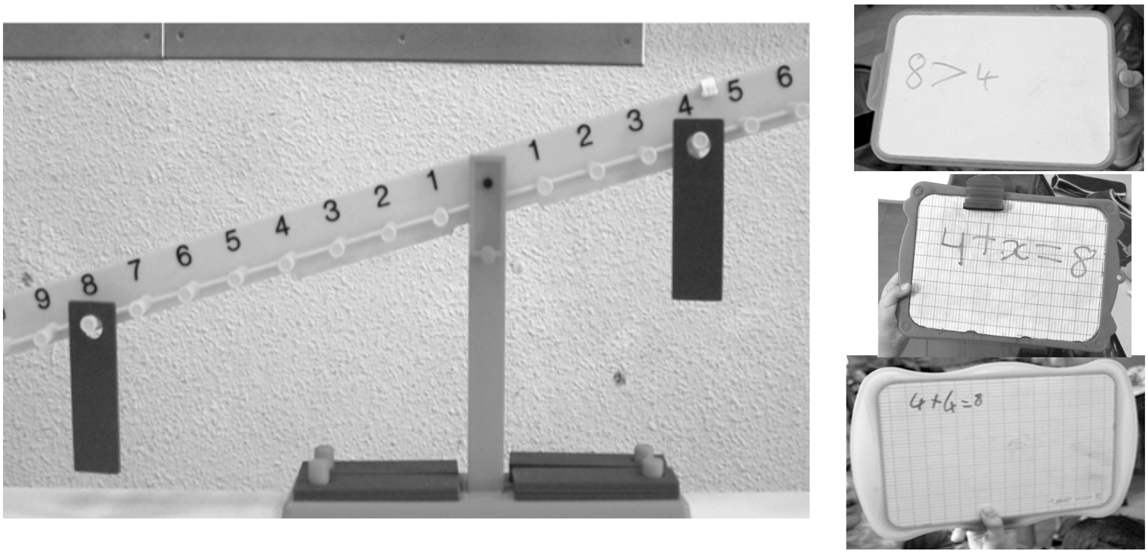


Figure 16 : Interprétations d'une situation de déséquilibre de la balance

> *« - La balance n'est pas en équilibre. Elle montre que huit, c'est plus grand que quatre.*
>
> *- Si on veut que la balance soit en équilibre, il faut rajouter un nombre du côté de quatre.*
>
> *- D'ailleurs, on peut dire « deux fois quatre », et ça s'écrit « 2 × 4 ». C'est deux fois le même nombre, ça s'appelle un double. »*

En règle générale, la mise en signes des observations numériques ne va donc pas de soi, comme le montrait la difficulté des élèves à rédiger l'écriture soustractive correspondant à leur lecture du thermomètre. Plus tard dans l'année, ils ont été intéressés de constater que le même problème devenait « audible » dans le cas de la lecture de l'horloge. En effet, deux équipes d'élèves comparant leurs écritures constataient que la même heure pouvait se lire aussi bien dans un sens « dix heures et quarante-six minutes », que dans un autre « onze heures moins quatorze minutes ».

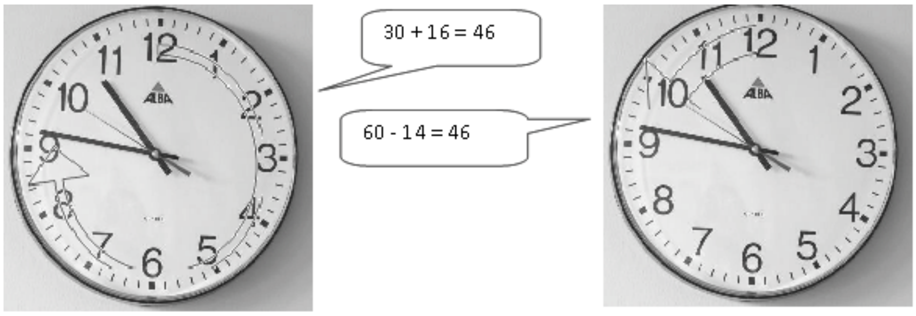


Figure 17 : Lecture sommative et soustractive d'horloge

Le rapprochement entre ces différentes situations, qui apparaît d'évidence grâce à leur algébrisation, permet aux élèves d'approfondir le sens des relations entre les nombres. Parti pris emprunté à Descaves (1992) qui considère que « *l'avantage de la modélisation par des écrits spécifiquement mathématiques est d'unifier de manière plus systématique les problèmes additifs*. »

L'utilisation de différents supports de calcul peut également permettre d'organiser la progressivité des apprentissages au fil de l'année. Ainsi la classe a-t-elle pris l'habitude de se référer à des techniques de calcul identifiées par rapport à leurs concepteurs et au support correspondant : la « technique Rayan » de comptage sur les doigts a été rapidement abandonnée au profit de la « technique Aurélia », dites « tête et doigts », qui consistait à surcompter à partir d'un nombre mis en mémoire grâce à l'usage de la bande numérique, support partagé par de nombreuses classes. Le boulier déclencha ensuite l'apparition de la « technique Rudy » d'association des dizaines et des unités dans les additions en ligne.

Conclusion

Il n'y a pas de support idéal pour travailler en arithmétique. C'est plutôt la variété des supports utilisés qui est susceptible de renforcer les apprentissages des élèves, sous certaines conditions.

Définir la fonction du support dans les apprentissages

Le fait de manipuler ne suffit pas à apprendre. Les élèves sont confrontés à un défi et s'emparent de l'objet proposé pour y répondre. Parfois, ils seront invités à découvrir une propriété d'un nombre (à l'aide des allumettes), une autre fois à comprendre la signification d'un mot-nombre (avec le boulier), ou à valider une opération mentale (grâce à la balance). À chaque fois, le support est choisi parce qu'il est jugé propice à l'émergence d'une procédure de résolution du problème sûre et efficace. Ainsi l'utilisation du boulier doit-elle permettre le dépassement du surcomptage dans les situations de calcul des nombres à dizaines.

Tenir compte de la nature du support

Il n'est possible d'utiliser efficacement un support que si sa nature correspond à l'objectif que l'enseignant s'est fixé. La balance semble appropriée pour travailler la notion d'égalité, beaucoup moins pour percevoir les quantités.

Construire un système de supports complémentaires

Un support, employé dans une situation singulière, ne peut délivrer qu'un message particulier. C'est le rapport des différentes manipulations entre elles qui donne l'occasion aux élèves de donner du sens aux énoncés mathématiques. L'algébrisation des situations rencontrées permet par exemple d'établir des analogies entre des opérations effectuées sur le thermomètre, l'horloge et le boulier.

Finalement, manipuler tous ces objets consiste aussi à réaliser un voyage au cœur d'une aventure arithmétique partagée par de nombreux peuples, à de nombreuses époques. Pas un auteur en didactique des mathématiques ne fait l'économie de références historiques et géographiques propres à faciliter la compréhension de ce qu'est aujourd'hui notre culture mathématique. Et pourtant… Si on parle beaucoup de la littérature dans l'apprentissage du français, qu'en est-il de la « mathémature » ? Où est passé Condorcet et sa réforme du langage décimal ? Quel manuel détaille les différentes conceptions de boulier à travers le monde et les âges ? Combien d'élèves se défient-ils au jeu de Mourre égyptien ? Combien d'enseignants savent d'où viennent les mots « cailloux », « chiffre », « zéro » ou « quatre-vingts » ? Pourquoi ne dit-on pas de l'élève qui se distrait en comptant les néons du plafond que c'est un pythagoricien en herbe ? À quel moment est-ce que taper en rythme dans nos mains devient mathématique ?

Références bibliographiques

BARUK S. (2003) *Comptes pour petits et grands*. Magnard.

BASSIS O. (2003) *Concepts-clés et situations-problèmes en maths*. Hachette Éducation.

BRISSIAUD R. (2005) *Comment les enfants apprennent à calculer*. Retz – réédition augmentée.

BONHÊME B. et DESCAVES A. (2007) *Activités numériques et résolution de problèmes au cycle 2*. Hachette Éducation.

BOURGUIGNON J.P. (1995) *Pour une citoyenneté mathématique*. Discours pour l'ouverture du nouvel espace mathématique de la cité des sciences ; http://www.chryzode.org/fr/bourgui.htm

DESCAVES A. (1992) *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*. Hachette Éducation.

ERMEL (2005) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CP*. Hatier.

GUEDJ D. (1996) *L'empire des nombres*. Découverte Gallimard.

MEN (2008) *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire*. Bulletin Officiel du Ministère de l'Éducation Nationale, Spécial n° 3.

RONAN C. (1988) *Histoire mondiale des sciences*. Seuil Points sciences.

SANDER E. (2009) L'intelligence. Comment notre cerveau développe ses étonnantes capacités. *Les dossiers de la recherche* – n° 34, février 2009.

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactiques des mathématiques*. Vol 10/2.3, 133-170.