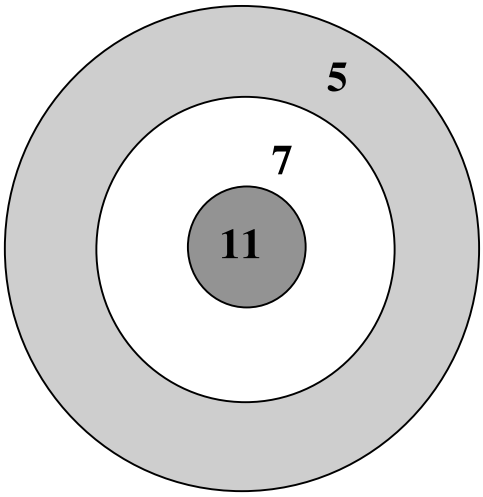
POINT DE DÉPART

LA CIBLE[1]

Guillaume a atteint la cible avec toutes ses fléchettes, il compte ses points : 34 !

Jeanne joue et dit : « J'ai aussi 34 points, mais j'ai deux fléchettes de moins que toi ».

Combien ont-ils chacun de fléchettes dans la cible ? et dans quelles zones ?



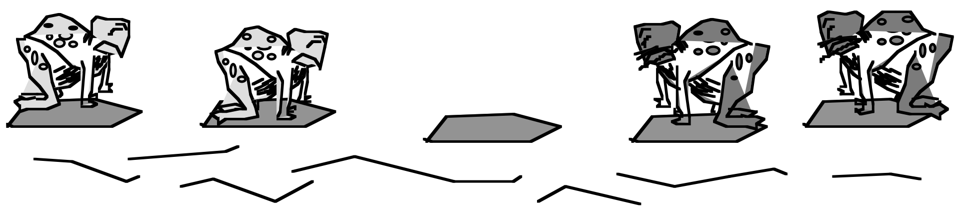
Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

[1] Voir la brochure : Jaquet. F. (2005) *Ateliers de résolution de problèmes avec matériel* du Rallye mathématique Transalpin (RMT) http://www.armtint.org (Problème de la Finale du 1er Rallye mathématique romand).

POINT DE DÉPART

GRENOUILLES ET CRAPAUDS[2]

Dans un étang, il y a cinq pierres alignées. Celle du milieu est libre. Il y a une grenouille sur chacune des deux pierres de gauche et un crapaud sur chacune des deux pierres de droite.



Les grenouilles et les crapauds désirent échanger leurs places.

Les grenouilles ne peuvent se déplacer que vers la droite :

- soit en sautant sur la pierre voisine, si elle est libre,
- soit en sautant par-dessus un crapaud si la pierre suivante est libre.

Les crapauds se déplacent de la même manière, mais vers la gauche, soit sur une pierre voisine si elle est libre, soit en sautant par-dessus une grenouille si la pierre suivante est libre.

(On ne peut pas sauter par-dessus plus d'une grenouille ou plus d'un crapaud).

Combien faut-il de sauts pour que les grenouilles arrivent à droite et les crapauds à gauche ?

Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

[2] Voir la brochure : Jaquet. F. (2005) *Ateliers de résolution de problèmes avec matériel* du Rallye mathématique Transalpin (RMT) http://www.armtint.org (Problème de l'épreuve II du 7e RMT).

La cible,

Grenouilles et crapauds : premières réflexions

(par François Jaquet)

LA CIBLE

Ce point de départ peut être proposé dès le CE2. Un matériel très simple, le plan de la cible et une dizaine de jetons de deux couleurs, permet de représenter la situation. Les contenus mathématiques se limitent à l'addition dans l'ensemble des nombres naturels inférieurs à 40 et la connaissance, non absolument indispensable, des premiers multiples de 5, 7 et 11.

Comment les élèves peuvent-ils résoudre ce problème ?

Il faut d'abord connaître le jeu de fléchettes : les zones de la cible, la signification des trois nombres (5, 7, 11), les conventions de calcul des points, ce qu'il advient lorsque plusieurs fléchettes sont dans la même zone ou lorsqu'une ou plusieurs sont hors de la cible … Les élèves qui ne le connaissent pas doivent en saisir les règles ou les apprendre de leurs camarades.

Puis ils doivent percevoir l'enjeu de la situation : un enfant a deux fléchettes de moins que l'autre et, pourtant, il arrive aussi à obtenir 34 points.

À partir de là, on peut passer progressivement au cadre arithmétique, avec des tentatives de placement des fléchettes suivies des comptages correspondants : il s'agit de transcrire la situation en deux sommes de termes « 5 », « 7 » et « 11 », toutes deux égales à 34, l'une ayant deux termes de moins que l'autre.

Il faut cependant maîtriser les opérations nécessaires et passer par de nombreuses observations, hypothèses, essais, mobilisant les connaissances déjà partiellement acquises à propos de la table d'addition, de la table de multiplication et du calcul réfléchi. Par exemple :

- constater qu'une flèche dans chaque zone conduit à la somme 5 + 7 + 11, nettement inférieure à 34 et qu'il faudra par conséquent répéter certains termes ;
- constater également que toutes les fléchettes dans une même zone conduisent aux multiples de 5 de 7 ou de 11 : 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 7, 14, 21, 28, 35, 11, 22, 33, tous différents de 34 ;

- chercher à combiner les multiples précédents pour obtenir 34 ; commencer par exemple en partant de 33, de 30, de 28 … pour voir que ces premiers essais ne permettent pas d'arriver à une solution ; mais qu'il y a une possibilité à partir de 22 : 22 + 12 ou 22 + (7 + 5) ou encore 11 + 11 + 7 + 5, ce qui correspond à quatre fléchettes, deux dans le centre et une dans chacune des autres zones ;

  (Il faut relever ici que les procédures algorithmiques d'addition des termes en colonne ne sont pas efficaces).

- découvrir une autre possibilité consistant à associer 20 et 14, ce qui correspond à 4 × 5 + 2 × 7 ou 5 + 5 + 5 + 5 + 7 + 7 c'est-à-dire à six fléchettes : quatre dans la zone « 5 » et deux dans la sone « 7 ».

On arrive ainsi à la solution :

Guillaume a six flèches dans la cible : quatre dans le « 5 » et deux dans le « 7 » ;

Jeanne a quatre flèches : une dans le « 5 », une dans le « 7 » et deux dans le « 11 ».

Commentaires sur la pratique de ce point de départ

Dans la situation particulière de cette cible, les élèves peuvent découvrir la solution en quelques additions, sans prendre conscience de ce qui est en jeu du point de vue mathématique. Les nombreuses pratiques de cette activité avec matériel montrent que les enfants sont très satisfaits d'avoir « trouvé » les emplacements corrects des quatre et six fléchettes ; même s'ils n'ont fait que « pianoter » sur une calculatrice, ou effectué des additions en colonne, avec un peu de chance ou de patience.

Dans la conception d'un « Point de départ », il faut aller plus loin et chercher à exploiter la situation en vue de la consolidation, voire de la construction, de connaissances sur l'addition et la multiplication. Les opérations effectivement effectuées lors de la recherche méritent en effet d'être explicitées, écrites, communiquées et discutées dans une étape collective qui suit la découverte d'une réponse.

L'unicité de la solution n'est pas demandée dans l'énoncé, mais c'est évidemment à ce propos que le maître va pouvoir engager les élèves dans une réflexion collective pour savoir s'il existe d'autres solutions ou pour greffer des recherches ultérieures. La question est alors celle de l'organisation de toutes les décompositions additives de 34 en multiples de 5, 7, et 11, qui fait appel aux propriétés de l'addition et à un inventaire de type combinatoire.

Pour conserver une trace de la recherche complète, des écritures arithmétiques notées avec un minimum de rigueur sont nécessaires, qui vont au-delà des « calculs » effectués mentalement, à la calculatrice, ou par un algorithme en colonne. L'élève doit accepter par exemple que « 5 + 7 », « 11 + 11 » représentent non seulement des associations de fléchettes mais aussi des nombres, que l'on peut additionner à leur tour pour obtenir un nouveau nombre « (5 + 7) + (11 + 11) » ou « 5 + 7 + 11 + 11 » ou encore « 12 + 22 » ou « 34 », pour aboutir à des égalités correctes plutôt qu'à des traces « chronologiques » et partielles du genre : « 5 + 7 = 12 + 11 = 23 + 11 = 34 ». Le recours à l'image encore proche des fléchettes offre ici une transposition « naturelle » vers des écritures arithmétiques de nombres, respectant les propriétés de l'égalité (dont la symétrie) et de l'addition (commutativité et associativité).

Il faut ensuite passer d'une conception passive ou « récitative » des tables d'addition et de multiplication à une utilisation active pour dresser l'inventaire des sommes possibles tenant compte des trois zones de la cible et du nombre de fléchettes. Par exemple, en plaçant deux fléchettes seulement dans la cible, on obtient six combinaisons des trois valeurs des zones : 22 (2 × 11), 18 (11 + 7), 16 (11 + 5), 14 (2 × 7), 12 (7 + 5), 10 (2 × 5) ; puis avec trois fléchettes, on obtient dix combinaisons, qu'il faut savoir organiser afin de ne pas en oublier …

De nombreuses relances sont possibles pour aboutir à cet inventaire exhaustif d'écritures correctes. Par exemple :

- Quels sommes peut-on obtenir en lançant deux, trois … flèches dans la cible ? (Voir ci-dessus)
- Quel est le nombre minimum/maximum de flèches dans la cible pour obtenir 34 ? (Quatre au minimum, car avec trois flèches on ne peut pas dépasser 33, six au maximum car avec sept flèches on dépassera 35.)

Un autre type de questions permet d'approfondir les recherches précédentes. Par exemple :

- Sur cette cible, en lançant des flèches dans les trois zones « 11 », « 7 » et « 5 », il n'est pas possible d'obtenir des totaux comme 1, 2, 3, 4, 6, 8, … Quels sont les autres totaux qu'il est impossible d'atteindre ? Lequel est le plus grand ? (On se rendra compte alors que les combinaisons des seuls multiples de 5 et de 7 permettent d'obtenir déjà tous les nombres se terminant par 5 et 0, puis par 7 et 2 dès 12, puis par 4 et 9 dès 14, puis par 1 et 6 dès 21, puis par 8 et 3 dès 28, le plus grand qu'on ne peut obtenir étant 23 ; puis en prenant en compte les multiples de 11, les nombres qu'on ne peut obtenir ne vont pas au-delà de 19.)

Avec le même matériel à disposition, cible et jetons, on peut imaginer un autre nombre cible pour exploiter ou renforcer les connaissances acquises sur le problème d'origine. De nombreuses autres variantes existent aussi en modifiant les points des zones ou les nombres de fléchettes.

GRENOUILLES ET CRAPAUDS

Ce point de départ peut être proposé dès le CE2. Le matériel,indispensable, est simple à préparer : cinq cases (pierres) et des jetons de deux couleurs (grenouilles et crapauds). On est ici dans le domaine des stratégies de déplacement, avec repérage ; ces contenus mathématiques sont « en marge » des programmes traditionnels.

Quelles sont les tâches des élèves pour résoudre ce problème et les stratégies qu'ils devront adopter ?

La première tâche est de s'approprier les règles de déplacement par de nombreuses relectures de l'énoncé ou par des interactions entre élèves lors des premiers essais de déplacements : les animaux ne reviennent pas en arrière, il y a deux types de sauts, d'une pierre ou de deux pierres par-dessus un seul animal, une grenouille ne saute que par-dessus un seul crapaud et, réciproquement, un crapaud par-dessus une seule grenouille.

(Pour les illustrations suivantes des positions, les grenouilles sont représentées par des lettres « G », les crapauds par « C » et la pierre vide par « _ ». le dernier animal qui s'est déplacé est signalé par caractère gras.)

À partir de la position d'origine (G G _ C C) il faut comprendre qu'il n'y a que deux mouvements autorisés pour le premier déplacement :

1a soit celui d'une grenouille vers la droite (G _ **G** C C),

1b soit celui d'un crapaud vers la gauche (G G **C** _ C).

Pour des raisons de symétrie, le choix de l'une ou l'autre de ces deux possibilités n'a pas d'incidence sur la suite de la recherche, mais les enfants doivent s'en convaincre au gré de leurs premiers essais. On peut alors envisager le saut suivant.

Il y a deux choix conformes aux règles pour ce deuxième déplacement, envisagé ici dans le cas où l'on a commencé par la grenouille (1a) : (G _ **G** C C) :

2a la deuxième grenouille se déplace d'une pierre vers la droite (_ **G** G C C) ;

2b le crapaud de gauche saute par-dessus la grenouille voisine (G **C** G _ C).

Le premier choix (2a) conduit à une « situation bloquée » où les deux grenouilles se suivent et les deux crapauds aussi, en occupant quatre pierres successives, ils ne peuvent plus se déplacer. Il faut donc y renoncer et adopter le deuxième (2b).

Il s'agit ici d'un premier élément de la stratégie à mettre en place : l'alternative n'est plus possible, le coup est « obligé ».

Deux mouvements sont conformes aux règles pour le troisième déplacement :

3a le deuxième crapaud se déplace d'une pierre vers la gauche (G C G **C** _) ;

3b la grenouille de droite se déplace d'une pierre vers la droite (G C _ **G** C) ;

Dans la première possibilité (3a), les quatre animaux se retrouvent sur quatre pierres successives, mais, cette fois-ci, en alternance (grenouille, crapaud, grenouille crapaud). On entrevoit alors le quatrième déplacement qui suivra : la grenouille au centre saute par-dessus le crapaud de droite, (G C _ C **G**) libérant sa pierre pour l'autre grenouille ou pour le crapaud de droite.

La deuxième possibilité (3b) exige aussi une anticipation du quatrième déplacement : le saut de la grenouille de gauche par-dessus le crapaud voisin (_ C **G** G C) ou le saut du crapaud de gauche par-dessus la grenouille voisine (G C **C** G _). Dans un cas comme dans l'autre, on aboutira à une situation bloquée où les animaux sont sur quatre pierres consécutives sans alternance (deux d'une même espèce sont l'un à côté de l'autre).

Par rapport à la conclusion précédente qui ne laisse qu'un deuxième déplacement possible, ce troisième déplacement exige une anticipation d'un mouvement. Le raisonnement stratégique est plus développé, du genre : « Je dois choisir le premier (3a) parce que si je choisissais le second (3b) je serais bloqué au coup suivant ».

Les explicitations ci-dessus pour les trois premiers déplacements sont longues et complexes ; dans la pratique, les choses vont beaucoup plus vite. Les élèves assimilent les règles au gré des essais, ils apprennent peu à peu à reconnaître les situations bloquées et à mettre en place leur stratégie.

Voici la séquence complète, en commençant par le déplacement d'une grenouille :

Situation initiale :	G G _ C C
Après le premier saut, d'une pierre, d'une grenouille:	G _ **G** C C
Après le deuxième saut, de deux pierres, d'un crapaud :	G **C** G _ C
Après le troisième saut, d'une pierre, d'un crapaud :	G C G **C** _
Après le quatrième saut, de deux pierres, d'une grenouille :	G C _ C **G**
Après le cinquième saut, de deux pierres, d'une grenouille :	_ C **G** C G
Après le sixième saut, d'une pierre, d'un crapaud :	**C** _ G C G
Après le septième saut, de deux pierres, d'un crapaud :	C **C** G _ G
Après le huitième saut, d'une pierre, d'une grenouille :	C C _ **G** G

Dans le feu de l'action, les élèves ne comptent en général pas les déplacements et sont incapables de répondre à la question « Combien faut-il de sauts pour que les grenouilles arrivent à droite et les crapauds à gauche ? ». Ils doivent alors répéter la séquence, souvent oubliée, et c'est à ce moment qu'apparaît la nécessité d'en conserver une trace écrite, afin de donner la réponse « 8 sauts » et d'être en mesure de la justifier.

Commentaires sur la pratique de ce point de départ

Grenouilles et crapauds se rencontre sous forme de « jeu » commercialisé ou artisanal. Il est évident que, sans aucune intervention de l'enseignant, l'élève peut éprouver beaucoup d'intérêt et de plaisir à découvrir la séquence de déplacements permettant d'échanger les positions des animaux, à la mémoriser pour la reproduire devant ses camarades, dans sa famille.

Pour exploiter la situation au niveau didactique, il faut passer à une forme écrite permettant de communiquer à d'autres la succession des sauts. De jeunes élèves vont, le plus souvent, représenter les positions relatives des animaux par un dessin complet de la situation pour chacune des huit étapes. Pour des raisons d'économie, en temps et en espace, ils pourront ensuite se contenter du nom des animaux ou de leurs initiales et, éventuellement, arriver à une représentation très abrégée des huit positions, du genre de celle qui est décrite précédemment. Ils peuvent encore rédiger une description des huit déplacements successifs en nommant les animaux, indiquant les pierres sur lesquelles ils sautent …

Chacune de ces modalités respecte l'ordre temporel des déplacements et permet de les reconstituer, elle participe donc d'une restitution d'une séquence réelle de mouvements en un message, graphique ou verbal, essentiel dans un processus de mathématisation. La validation est immédiate, il suffit de vérifier si le message permet à une autre personne de reproduire ce que l'auteur a expérimenté avec succès.

Les formes écrites permettent aussi de constater que la stratégie est unique, que chaque déplacement est entièrement déterminé par les positions bloquées auxquelles on aboutit en cas de mauvais choix, qu'il faut 8 déplacements, ni plus ni moins.

Des extensions du problème peuvent être proposées aux élèves intéressés, avec 3 grenouilles et 3 crapauds sur une suite de 7 pierres ; puis 4 animaux de chaque espèce sur 9 pierres… Ces variantes vont conduire à des recherches de régularités dans les déplacements pour éviter les positions bloquées puis à synthétiser les traces écrites des déplacements.

L'activité peut déboucher sur des représentations plus économiques des déplacements et sur la recherche du lien entre le nombre d'animaux de chaque espèce et le nombre de sauts.

Par exemple, dans le cas de 2 grenouilles et 2 crapauds, les 8 déplacements décrits précédemment peuvent se résumer à : G, C, C, G, G, C, C, G. Dans cette représentation on n'indique que l'animal qui se déplace, sans sa position (on commence par une grenouille, puis les deux crapauds, puis les deux grenouilles, puis les deux crapauds et finalement une grenouille). En effet, la recherche de stratégies montre qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour chaque déplacement et qu'il faut maintenir l'alternance crapaud – grenouille – crapaud – grenouille pour éviter les blocages.

Avec 3 grenouilles et 3 crapauds, il faudra 15 déplacements, dans l'ordre :

G, C, C, G, G, G, C, C, C, G, G, G, C, C, G

D'un point de vue mathématique plus ambitieux, on peut même aller jusqu'à la formule $n(n + 2)$ qui donne le nombre de déplacements en fonction du nombre n d'animaux de chaque espèce et à sa démonstration par induction.