UNE APPROCHE EXPERIMENTALE DES FONCTIONS AU LYCEE AVEC LE LOGICIEL CASYOPEE

Minh TRAN KIEM
IUFM de Bretagne, Université de Bretagne Occidentale

Résumé. Cette recherche se situe dans le cadre de l'étude des usages d'un environnement logiciel géométrique et algébrique dédié aux fonctions au lycée. Nous nous intéressons plus particulièrement au travail des élèves, avec une étude de situations utilisant le logiciel Casyopée et des effets de ces situations sur l'apprentissage des fonctions. Casyopée permet une approche des fonctions via l'expression de grandeurs géométriques et de leurs variations, mais en lien avec les registres algébrique et graphique.

Mots-clés. Fonction, modélisation fonctionnelle, dépendances géométriques, typologie d'activités, TICE, Casyopée.

Introduction

Les fonctions jouent un rôle majeur dans les mathématiques et essentiel dans les sciences expérimentales pour la modélisation mathématique des phénomènes dynamiques. L'introduction des notions mathématiques, par exemple la notion de fonction, via la résolution des problèmes est une tendance encouragée par les études PISA. Cependant, cette démarche semble moins utilisée dans l'enseignement des mathématiques en France (Bodin, 2008). Le rôle joué par les fonctions dans la résolution de problèmes issus de domaines variés conduit à les considérer comme des outils privilégiés de modélisation mathématique.

Dans cet article, nous proposons une approche qui considère les fonctions comme outils de modélisation de dépendances dans un domaine d'application, plus particulièrement de dépendances entre grandeurs ou mesures géométriques dans un environnement numérique. L'article s'appuie sur un travail de recherche effectué dans le cadre du projet européen ReMath[1]. Notre hypothèse est que les activités de modélisation fonctionnelle des dépendances entre grandeurs ou mesures peuvent être fructueuses pour la conceptualisation des fonctions. Cette recherche a été conçue dans le but d'aider les élèves à approcher les fonctions dans un environnement logiciel géométrique et algébrique, pour mettre en œuvre cette modélisation.

1 Representing Mathematics with Digital Media, a Targeted European Project (IST4-26751), http://remath.cti.gr

1. Approches des fonctions

1.1 Approche historique

Nous présentons brièvement la genèse historique des fonctions en faisant un résumé du développement des idées sur les fonctions à travers les principales époques. L'étude historique vise à préciser l'idée de fonction telle qu'elle est traitée dans l'article.

L'Antiquité est la première étape du concept de fonction. A cette étape, des mathématiciens Babyloniens ont largement utilisé pour leurs calculs des tables sexagésimales de nombres inverses, de carrés et de racines carrés. L'idée de fonction dérivait à cette époque de la vie pratique et avait pour objet de faciliter des calculs. Au Moyen Age, les notions générales de quantités variables et les fonctions étaient exprimées à la fois dans des formes géométriques et mécaniques, mais comme dans l'Antiquité, chaque cas concret de dépendance entre deux quantités était défini par une description verbale, ou par un graphe plutôt qu'une formule[2]. A cette époque, des mouvements étaient étudiés soit de façon qualitative, en donnant une description verbale du sens de variation, soit en étudiant de façon numérique certaines valeurs isolées du phénomène (sans arriver à une relation numérique précise), ce qui avait tendance à voiler l'aspect de variation continue. Jusqu'au milieu du 14ème siècle, par les études d'Oresme, les premières formes de représentations graphiques se sont développées. Au dix-septième siècle, des expressions analytiques des fonctions ont commencé à prédominer, particulièrement dans les travaux de Descartes. La classe de fonctions analytiques est généralement exprimée par des sommes des séries de puissance infinies. Petit à petit, la notion de fonction se théorise au cours de l'époque Moderne. Dans les diverses définitions des fonctions que Youschkevitch (1976) a citées, nous constatons une élaboration de définitions qui décrive les fonctions comme des expressions algébriques. De plus, nous trouvons qu'il y a une référence explicite à la dépendance entre variables et une formulation s'appuyant sur une description géométrique ou graphique et qui sous-entend une perception dynamique et co-variationnelle.

De l'analyse du processus de développement des définitions de fonction à travers les principales époques, nous déduisons quelques constats :

- Le premier constat concerne l'aspect écologique et historique de la notion de fonction. L'idée de fonction dérive premièrement du monde physique et l'origine de cette notion a pour objectif de modéliser des situations issues de la physique. Les problèmes ayant été les moteurs du développement de la notion de fonction sont issus des domaines d'application et de la vie pratique tels que la physique (mouvements, vitesse, cinématique), l'astronomie, la température, la mécanique…
- Notre deuxième constat épistémologique est que des *relations de dépendances* sont des signifiés fondamentaux de la notion de fonction. Il s'agit des relations de dépendances dynamiques entre deux quantités (grandeurs) variables.

2 Rappelons que les formules algébriques, telles que nous les connaissons, n'ont commencé à émerger qu'avec Viète, au XVIe siècle.

1.2 Approches didactiques et usages d'environnements géométriques et algébriques

Récemment, plusieurs recherches ont mis l'accent sur l'importance de la covariation et de la relation de dépendance entre grandeurs comme éléments fondamentaux amenant à la notion de fonction. Cette perspective adopte un point de vue dynamique sur les fonctions qui accentue l'expérience du changement et du mouvement.

Selon Comin (2005), la notion de fonction a sa source dans l'étude de relations de dépendance et ne peut prendre du sens que sur l'étude des dépendances fonctionnelles entre grandeurs. D'autres recherches portent une attention spéciale à des potentialités de représentation des TICE[3] dans la compréhension des dépendances fonctionnelles. En ayant utilisé un dispositif de capture de mouvements et une calculatrice graphique, Arzarello & Robutti (2004) ont demandé aux élèves de décrire les différents types de mouvement en termes de fonctions mathématiques à travers des graphes et des tableaux de valeurs. Les covariations et les dépendances entre temps et distances dans le système physique ont été directement transformées en fonctions mathématiques. Dans la perspective vygotskienne de médiation sémiotique, Falcade et ses collègues (Falcade, 2002 ; Falcade, Laborde & Mariotti, 2007) ont choisi la Géométrie dynamique comme domaine d'application afin de fournir aux élèves une expérience qualitative de covariations et de dépendances fonctionnelles. Leur étude a montré que les outils de la géométrie dynamique (Déplacement, Trace, Macro…) peuvent être utilisés pour mener les élèves à comprendre la notion de fonction.

Bloch (2002) distingue différents cadres pour la notion de fonction : numérique, algébrique, géométrique, graphique, formel et analytique. S'intéressant aux débuts de l'analyse, elle insiste particulièrement sur l'interaction des cadres graphique et formel. Elle souligne qu'au moment de son étude, le cadre géométrique était peu utilisé dans l'enseignement et, en 2002, elle estimait sa réintroduction potentielle coûteuse en termes de stratégie d'enseignement. Cette appréciation a naturellement été émise à une période précédant l'introduction massive des TICE dans l'enseignement.

Le curriculum actuel du lycée postule que des environnements logiciels peuvent contribuer à cette réintroduction d'un cadre géométrique. C'est aussi une hypothèse que font des recherches récentes (Aldon et al. 2008) qui s'appuient sur les nouvelles potentialités de calculatrices et logiciels intégrant des représentations multiples et du calcul formel, rejoignant ainsi une idée ancienne selon laquelle les environnements de calcul formel peuvent soutenir et changer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Hodgson & Muller, 1992).
Notre approche considère les fonctions comme outils de modélisation de dépendances dans un domaine d'application, et plus précisément dans un cadre géométrique tel que défini par Bloch (2002) et utilisé par Falcade et ses collègues. La modélisation fonctionnelle permet de relier ce cadre aux autres cadres et représentations des fonctions. Notre hypothèse est que les activités fondées sur l'étude des dépendances entre grandeurs ou mesures permettent aux élèves de comprendre les fonctions comme outils de modélisation de ces dépendances. Nous situons par ailleurs ces activités dans le cadre d'usages d'un environnement numérique

3 Technologie de l'Information et de Communication pour l'Enseignement

intégrant des représentations multiples, géométriques et algébriques, et le calcul formel. Les représentations géométriques constituent le domaine d'application rendant possible une exploration des relations entre objets et entre grandeurs, et l'environnement offre des possibilités d'accéder aux autres représentations.

2. Fonctions dans le programme du lycée et le rôle des TICE

Un des buts de l'enseignement sur les fonctions au lycée est de consolider l'apprentissage de l'algèbre et de préparer l'introduction des éléments de l'analyse. Le travail sur les fonctions constitue donc une partie importante dans le programme français du lycée. L'approche des fonctions à travers des situations issues d'un domaine d'application est préconisée depuis le programme de 2001 :

> On étudiera des situations issues, entre autres, de la géométrie, de la physique, de l'actualité ou de problèmes historiques. On réfléchira sur les expressions *être fonction de* et *dépendre de* dans le langage courant et en mathématique[4].

Le programme de Seconde de 2009 et un « document ressource » spécifique précisent l'accent mis sur les fonctions, insistent particulièrement sur la nécessité de considérer les fonctions dans un domaine d'application et recommandent l'usage des outils logiciels. De plus, le programme propose d'étudier des problèmes relatifs aux fonctions, notamment des problèmes d'optimisation :

> L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement… Les situations proposées dans ce cadre sont issues de domaines très variés : géométrie plane ou dans l'espace, biologie, économie, physique, actualité etc. Les logiciels mis à la disposition des élèves peuvent être utilement exploités[5].

Les fonctions apparaissent comme un fil directeur pour l'algèbre et l'analyse au lycée. L'optimisation en Seconde prépare l'approche de l'analyse en Première en mettant en avant le type de problème que la dérivation permet de résoudre. Notre étude se situe au niveau de la Première S et de la Terminale S et intègre l'approche des fonctions préconisée par le nouveau programme, notamment la résolution de problèmes d'optimisation issue de domaines variés ainsi que la recommandation d'utiliser des TICE pour expérimenter, modéliser et aider à la résolution.

3. Approche des fonctions via la modélisation fonctionnelle de dépendances géométriques

3.1 Typologie d'activités

Lagrange & Artigue (2009) ont proposé une Typologie ayant pour but de classifier et de relier les activités variées sur les fonctions. Cette typologie croise deux composantes : les niveaux de représentation des dépendances et les types d'activités sur ces dépendances.

4 Extrait du programme officiel de Seconde, 2001
5 Extrait du programme officiel de Seconde, 2009

Les auteurs ont distingué trois niveaux de représentation : la covariation et la dépendance dans un système physique, la covariation et la dépendance entre grandeurs ou mesures, et les fonctions mathématiques. Ces trois niveaux, concernant l'apprentissage des fonctions que nous avons présenté plus haut, sont basés sur des fondements épistémologiques et cognitifs selon lesquels le concept de fonction est lié à l'expérience sensitive des dépendances dans un système physique où nous pouvons observer des variations mutuelles des objets. Ces auteurs ont classifié en quatre catégories les types d'activités sur des dépendances : enactive-iconique, générative, transformationnelle, et global/méta. La première catégorie enactive-iconique est adaptée du travail sur différentes représentations de l'analyse de Tall (1996), tandis que les trois autres sont inspirées du modèle des activités algébriques de Kieran (2004).

		Types de représentations et d'activités			
		Enactive-iconique	Générative	Transformationnelle	Global/Méta
Niveaux de représen-tation	Système physique	Exploration globale : déplacer des éléments et observer les transformations du système.	Percevoir les relations de dépendance entre grandeurs.		Considérer des objets « génériques ».
	Grandeurs et Mesures	Exploration locale : faire varier des grandeurs et observer les variations des mesures.	Choisir une variable et créer une formule pré-algébrique exprimant la dépendance.		Considérer et interpréter des grandeurs « génériques ».
	Fonctions mathémati-ques	Trace locale du graphe ; reconnaissance globale de la courbe. Percevoir des propriétés du graphe.	Représenter algébriquement une formule et un domaine de définition.	Développer, factoriser l'expression ; reconnaître l'équivalence ; substituer un paramètre à une valeur.	Reconnaître la structure de la fonction ; considérer des familles de fonctions, utiliser des paramètres. Preuve.

Tableau 1. *Typologie d'activités*

3.2 Cycle de modélisation fonctionnelle

Nous nous intéressons plus particulièrement au processus de mathématisation qui transforme un problème d'un domaine d'origine (sciences expérimentales, variations géométriques, …) en un modèle mathématique. Dans le contexte de l'enseignement et l'apprentissage des fonctions au lycée, il nous semble qu'il est nécessaire de détailler et préciser ce processus de mathématisation afin d'élucider les activités des élèves sur les fonctions impliquées dans ce processus. En s'appuyant sur la Typologie d'activités de Lagrange & Artigue (2009), nous proposons ci-dessous notre cycle de modélisation pour approcher les fonctions en environnements numériques d'apprentissage. Ce cycle de modélisation fonctionnelle se situe dans le cadre d'une résolution de problème via une modélisation algébrique. Cela n'implique pas que la résolution se fasse de manière standard, selon un schéma immuable.

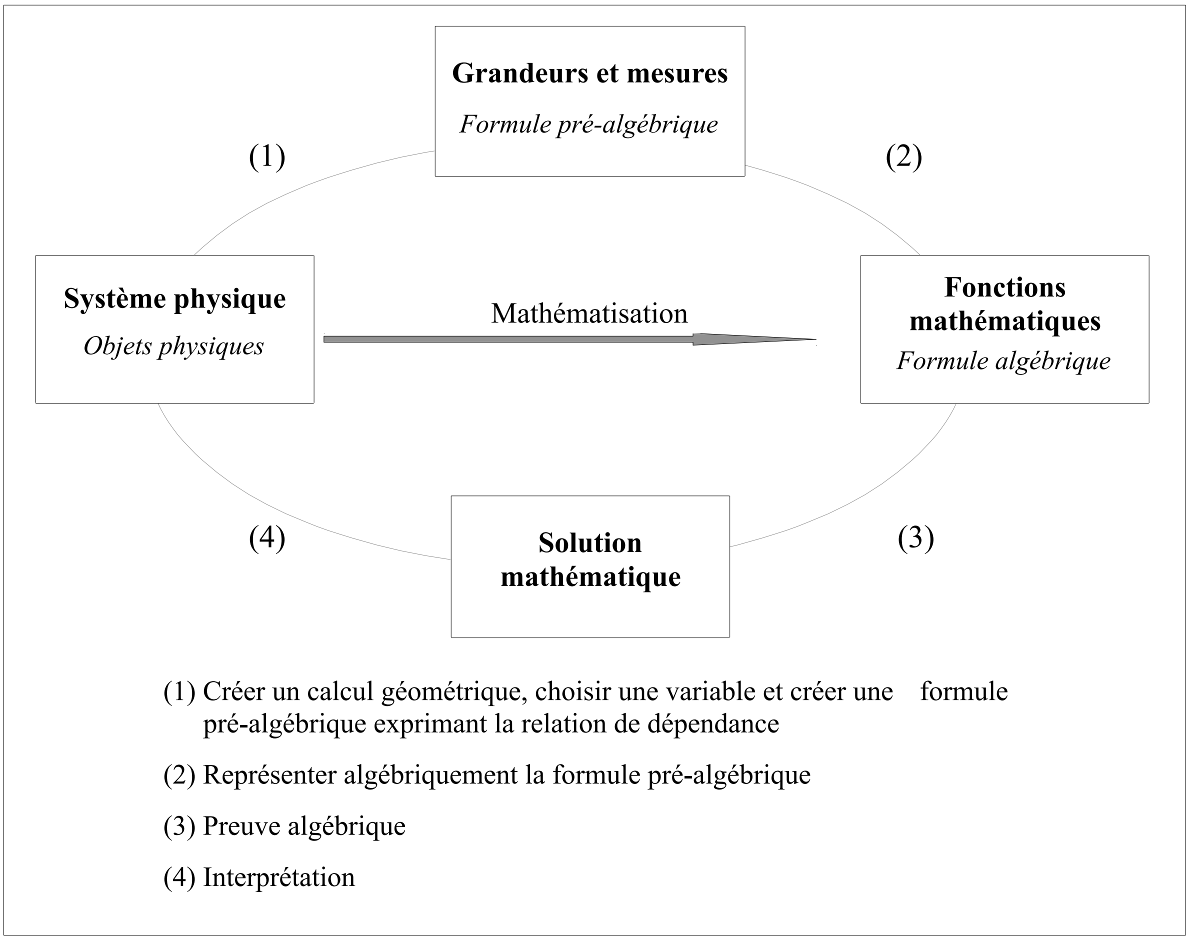


Figure 1. *Un cycle de modélisation fonctionnelle*

Dans ce schéma, nous mettons l'accent sur le niveau intermédiaire « Grandeurs et mesures » entre le « Système physique » et les « Fonctions mathématiques » (le monde mathématique). Le processus de mathématisation est divisé en deux étapes (étapes (1) et (2) dans la figure). Des situations ou problèmes sont données aux élèves dans le *Système physique* où ils peuvent observer, explorer et percevoir des relations de dépendances entre grandeurs et mesures. Afin d'expliquer, les élèves peuvent choisir une variable, puis créer une formule pré-algébrique exprimant la relation de dépendance (c'est l'étape (1)). Ensuite, l'étape (2) permet de calculer et représenter algébriquement la formule pré-algébrique construite au niveau intermédiaire des *Grandeurs et mesures*.

Au niveau des *Fonctions mathématiques*, les élèves obtiennent une fonction mathématique modélisant une dépendance fonctionnelle entre grandeurs dans la situation donnée dans le *Système physique*. L'étape (3) comprend des manipulations, des transformations algébriques ou une preuve algébrique pour trouver la solution mathématique de la situation. L'étape (4) est le processus d'interprétation. Il s'agit de revenir dans le *Système physique* pour interpréter les solutions mathématiques trouvées.

Le logiciel Casyopée assure la cohérence entre le cycle de modélisation fonctionnelle et la démarche expérimentale utilisant des TICE. Le *Système physique* (dans notre cas c'est la Géométrie dynamique) est celui où s'effectuent les explorations énactive-iconiques : les élèves peuvent déplacer des objets, observer la transformation du système à l'aide des TICE, et commencer à percevoir les relations de dépendance entre objets. Au niveau de *Grandeurs et mesures*, les élèves peuvent utiliser les potentialités des TICE pour quantifier des explorations et des observations et formuler des conjectures sur la solution du problème donné. La construction d'une formule pré-algébrique exprimant la relation de dépendance entre objets à ce niveau est utile pour soutenir ces explorations et observations. Le niveau des *Fonctions mathématiques* est celui où s'opèrent les transformations algébriques et preuves. Finalement, le retour dans le *Système physique* a pour objectif d'interpréter et vérifier la solution mathématique.

Nous considérons la Typologie d'activités et le cycle présenté ci-dessus comme un cadre théorique pour la construction et l'analyse de situations sur les fonctions en environnements numériques. Dans notre approche, les fonctions sont considérées comme outils de modélisation de dépendance dans un domaine d'application. En effet, proposer des activités s'amorçant au niveau intermédiaire du schéma précédent – grandeurs et mesures – permet de mettre l'accent sur la modélisation fonctionnelle qui relie les activités initiales et la formulation finale algébrique. Les activités à ce niveau sont donc fructueuses pour la conceptualisation des fonctions : choisir une variable appropriée pour quantifier des observations, distinguer les dépendances fonctionnelles parmi des covariations, construire une formule pré-algébrique exprimant la dépendance fonctionnelle…

4. Casyopée

Casyopée[6] est un logiciel dédié à l'enseignement et l'apprentissage des fonctions au lycée (Lagrange, 2007). L'histoire de sa conception a été exposée dans Lagrange (2005). Ce logiciel a ensuite été développé dans le cadre du projet Européen ReMath.

Casyopée comprend deux modules principaux qui sont liés : le module symbolique et le module géométrique. Le module symbolique fournit aux élèves des outils de calculs symboliques, des capacités de représentation (représentation graphique, symbolique, numérique…) et ainsi que des aides pour la preuve algébrique (dérivée, étude de signes, variations…). Le module géométrique offre les caractéristiques principales d'un environnement de géométrie dynamique comme la création et l'animation des objets géométriques.

6 Une page pour télécharger Casyopée est disponible à http://casyopee.eu

Ce module facilite également la généralisation grâce à des paramètres qui peuvent être entrés dans la définition des objets géométriques.

Au niveau intermédiaire des grandeurs et mesures, la caractéristique spécifique de Casyopée est la capacité de relier les deux modules avec l'aide des « calculs géométriques » qui permettent de modéliser des dépendances entre grandeurs : dans Casyopée on peut créer un calcul géométrique exprimant la valeur d'une grandeur, en explorer les valeurs numériques, choisir une grandeur adéquate comme variable et finalement exporter, dans le module symbolique, une dépendance fonctionnelle, si elle existe, entre cette variable et le calcul géométrique, ceci pour obtenir une fonction mathématique exprimant cette dépendance. De plus Casyopée prend en charge l'expression de cette fonction mathématique, ce qui décharge les élèves de calculs sur lesquels ils butent souvent à ce niveau. Le but visé par le développement de Casyopée est donc d'aider les élèves à modéliser des relations de dépendance dans une situation géométrique donnée, de faciliter les activités sur les fonctions, et finalement de promouvoir une compréhension des fonctions.

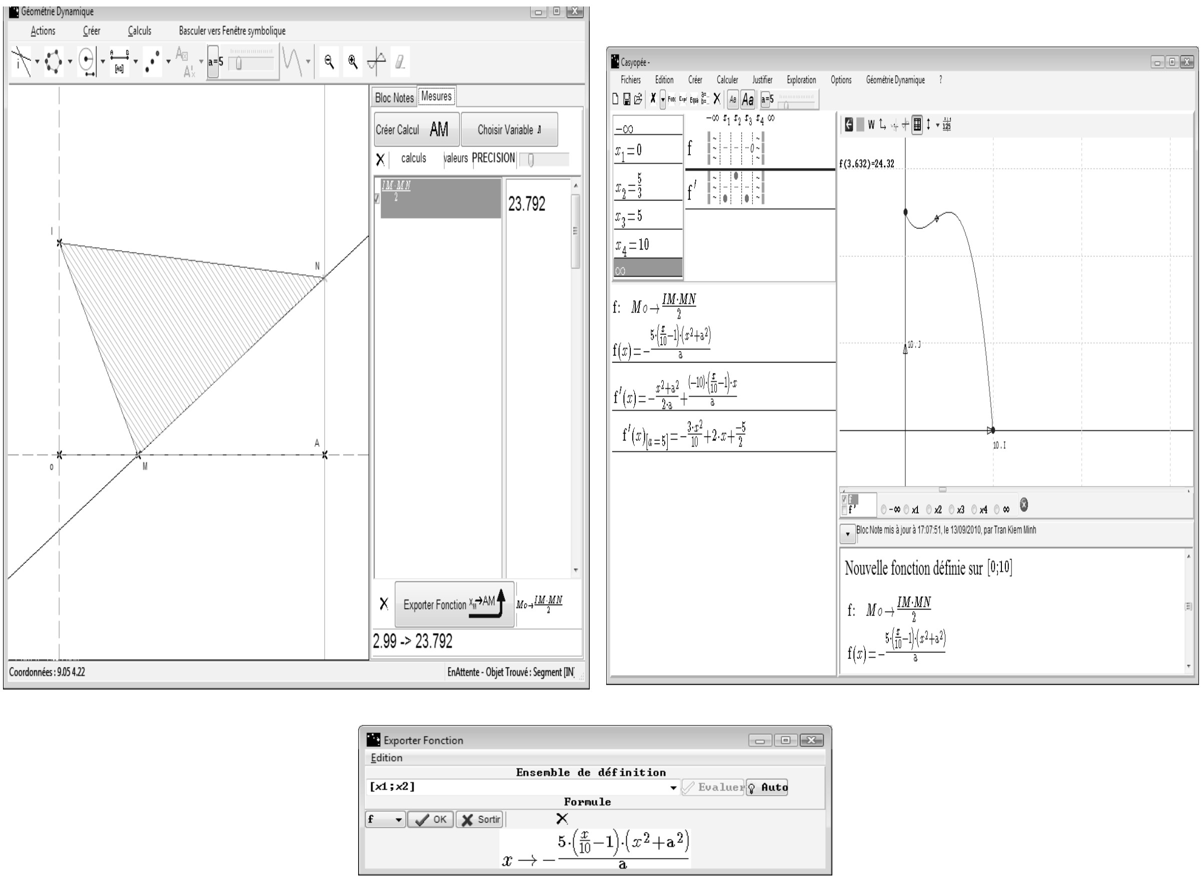


Figure 2. Module géométrique, module symbolique et la forme d'exportation de Casyopée

5. Expérimentation

Nous avons suivi une classe durant deux années d'expérimentation. Nous nous sommes plus particulièrement concentrés sur les observations en classe d'un binôme (appelé binôme Elina-Chloé) durant les séances expérimentales. Nous avons choisi le même type de problèmes d'optimisation pour ces observations. La première expérimentation (6 séances) a été implémentée en classe de Première S dans le cadre du projet ReMath. Nous avons ensuite organisé une seconde expérimentation (4 séances) pendant l'année de Terminale S. Toutes les séances expérimentales se sont déroulées à Saint-Malo en France. Nous avons pu observer et suivre de manière précise le travail et les échanges des élèves grâce à l'enregistrement vidéo et audio et à un logiciel de capture d'écran.

Nous considérons la progression des élèves durant les deux expérimentations sous deux aspects : leur utilisation de Casyopée et leurs connaissances mathématiques. Afin d'éclairer cette progression, nous nous appuyons non seulement sur des observations en classe, mais encore sur un questionnaire de bilan et un entretien de fin d'année avec des élèves observés et avec l'enseignant. Ce questionnaire leur a été donné à la fin de la seconde expérimentation. Il porte sur l'appropriation des fonctionnalités de Casyopée par des élèves et sur l'apport des caractéristiques spécifiques du logiciel pour l'apprentissage des fonctions, notamment pour la modélisation fonctionnelle. Le contenu de l'entretien porte sur les étapes de la résolution de ce type de problème d'optimisation avec Casyopée.

Notre première expérimentation s'est déroulée au premier trimestre de l'année scolaire 2007 – 2008. Les séances ont eu lieu en salle informatique. Les élèves travaillent en binôme pour réaliser des tâches données dans la fiche d'élève. La deuxième expérimentation est une ingénierie conçue et implémentée pendant l'année scolaire 2008-2009. Nous avons suivi une des classes en Terminale S qui est composée des mêmes élèves observés pendant l'année de Première S. Les interviews avec le binôme Elina-Chloé et l'enseignant ont été réalisées à la fin de l'année après leur épreuve pratique du baccalauréat.

5.1 Présentation des deux problèmes

Durant les deux années d'expérimentation, les élèves ont eu l'occasion de travailler sur un même type de problèmes d'optimisation de calcul d'aires. Nous présentons brièvement ci-dessous les deux problèmes proposés aux élèves : l'un à la fin de la première expérimentation, et l'autre pendant notre deuxième expérimentation.

Dans chacun des deux problèmes, la figure est définie à l'aide de paramètres. Leur résolution nécessite donc une prise en compte de ces paramètres. Cette demande est appropriée et importante car au niveau de la classe de Première les élèves doivent s'attaquer à des problèmes généraux et pas seulement à des cas particuliers.

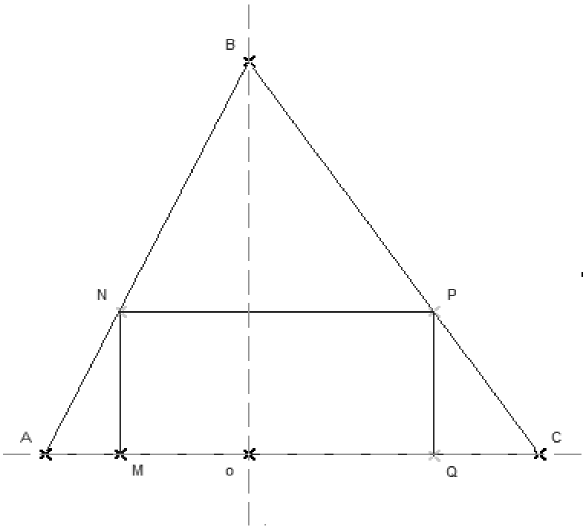
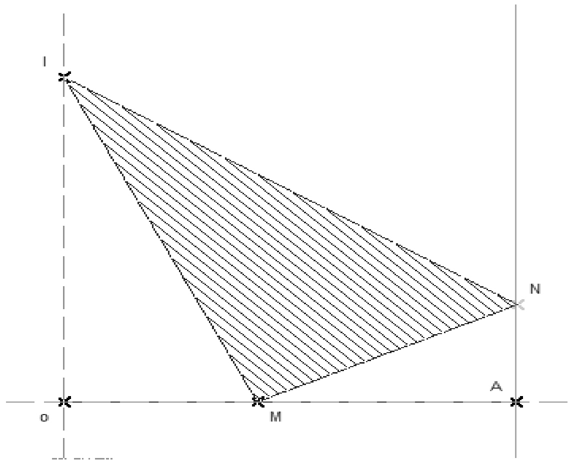
Le problème 1 (posé en Première S) : Soit a, b et c trois paramètres positifs. Dans un repère orthonormé *Oxy* on considère les points $A(-a\,;0)$, $B(0;b)$ et $C(c\,;0)$. On construit le rectangle *MNPQ* avec *M* sur [*OA*], *N* sur [*AB*], *P* sur [*BC*] et *Q* sur [*OC*].  Existe-il une position du point *M* telle que l'aire du rectangle *MNPQ* soit maximale ?	**Le problème 2** (posé en Terminale S) : Soit *a* un paramètre positif. Dans un repère orthonormé *Oxy*, on construit deux points $A(10\,;0)$, $I(0\,;a)$ et la parallèle à l'axe *Oy* passant par *A*. *M* est un point libre sur le segment [*OA*]. On crée le triangle *IMN* rectangle en *M*, avec *N* appartenant à la parallèle (le triangle étant « aplati » selon le segment [*IA*] quand *M* est en *A*).  Existe-il une position du point *M* telle que l'aire du triangle *IMN* soit maximale ?

Figure 3. *Type de problèmes d'optimisation*

5.2 Analyse *a priori*

Étapes cruciales du cycle de modélisation fonctionnelle

Le processus de résolution de ce type de problèmes avec Casyopée se divise en plusieurs étapes en référence au cycle de modélisation fonctionnelle proposée. Le tableau (page suivante) indique pour chaque étape les composants mathématiques, les composants relatifs à l'artefact et les fonctionnalités correspondantes offertes par Casyopée :

Saisie du problème

La résolution de ces deux problèmes se divise en étapes similaires. Dans les parties suivantes, nous limitons donc notre analyse a priori au deuxième problème. Nous portons notre attention sur l'analyse des épisodes et moments cruciaux tout au long du processus de résolution.

Problème 2	
1. Phase 1 : Le cas $a = 5$ • Concevoir la figure avec Casyopée • Créer un calcul géométrique de l'aire du triangle *IMN* et explorer le problème en déplaçant le point libre *M* • Modélisation fonctionnelle : indiquer le choix de variable et l'expression algébrique de la fonction exportée • Chercher une preuve algébrique • Visualiser la réponse dans la fenêtre géométrique. **2. Phase 2** : Le cas $a = 6$ • Re-explorer le problème.	

Figure 4. *Texte donné aux élèves en Terminale S*

Composants mathématiques	**Composants relatifs à l'artefact**	**Aides et rétroactions fournies par Casyopée**
• Concevoir la figure	• Créer des objets géométriques, définir et piloter des paramètres	• Outils de géométrie dynamique ; « robustesse » de la construction.
• Explorer et faire des conjectures	• Bouger les objets géométriques libres	• Création d'un calcul géométrique ; affichage dynamique des valeurs numériques du calcul.
• Modéliser le problème	• Choisir une variable adéquate, exporter une fonction dans la module symbolique	• Fonctionnalité « choisir une variable » et « exporter une fonction », rétroactions sur le choix de variable ; calcul automatique de l'expression algébrique et du domaine de définition de la fonction exportée.
• Faire une preuve algébrique	• Faire des transformations algébriques ; calculer la dérivée et trouver ses signes • Travailler sur des paramètre	• Fonctionnalité de calcul formel ; aider à trouver des signes ; visualiser le tracé graphique • Pilotage des paramètres.
• Interpréter dans le module géométrique	• Visualiser la réponse dans le module géométrique	• Capacité de relier les deux modules ; lien entre la géométrie dynamique et la représentation graphique.

Tableau 2. *Composants mathématiques, composants relatifs à l'artefact et fonctionnalités correspondantes de Casyopée*

La fonction modélisant la dépendance a des propriétés différentes selon les valeurs du paramètre a. Par exemple, si on choisit la variable $x = OM$, l'expression de la fonction modélisant la dépendance entre cette distance OM et l'aire du triangle IMN sera :

$$f : OM \rightarrow \frac{IM.MN}{2} \qquad f(x) = \frac{-5\left(\frac{x}{10} - 1\right)\left(x^2 + a^2\right)}{a}$$

Quatre cas se présentent.

Cas 1. $0 < a < 5$

La fonction $f(x)$ admet deux extremums dans l'intervalle ouvert]0 ; 10[(un minimum local $x_1 = \frac{10 - \sqrt{100 - 3a^2}}{3}$ et un maximum local $x_2 = \frac{10 + \sqrt{100 - 3a^2}}{3}$). Dans ce cas, la fonction $f(x)$ atteint sa valeur maximale lorsque $x = x_2 = \frac{10 + \sqrt{100 - 3a^2}}{3}$, c'est-à-dire que l'aire du triangle IMN est maximale lorsque M a pour coordonnées $M\left(\frac{10 + \sqrt{100 - 3a^2}}{3} ; 0\right)$.

Cas 2. $a = 5$

La fonction $f(x)$ admet deux extremums dans l'intervalle ouvert]0 ; 10[(un minimum local et u $x_1 = \frac{10 - \sqrt{100 - 3a^2}}{3} = \frac{5}{3}$ n maximum local). $x_2 = \frac{10 + \sqrt{100 - 3a^2}}{3} = 5$. Dans ce cas, la fonction $f(x)$ atteint sa valeur maximale *25* lorsque $x = x_0 = 0$ ou $x = x_2 = \frac{10 + \sqrt{100 - 3a^2}}{3} = 5$, c'est-à-dire que l'aire du triangle IMN est maximale lorsque M = O (O est l'origine) ou M est le milieu du segment [OA].

Cas 3. $5 < a < \frac{10}{\sqrt{3}}$

La fonction $f(x)$ admet deux extremums dans l'intervalle ouvert]0 ; 10[(un minimum local $x_1 = \frac{10 - \sqrt{100 - 3a^2}}{3}$ et un maximum local $x_2 = \frac{10 + \sqrt{100 - 3a^2}}{3}$).

Dans ce cas, la fonction $f(x)$ atteint sa valeur maximale $5a$ lorsque $x = 0$, c'est-à-dire que l'aire du triangle IMN est maximale lorsque $M = O$.

Cas 4. $a \geq \frac{10}{\sqrt{3}}$

La fonction $f(x)$ est décroissante sur l'intervalle ouvert]0 ; 10[et n'admet aucun extremum dans cet intervalle. Dans ce cas, la fonction *f(x)* atteint sa valeur maximale *5a* lorsque $x = 0$, c'est-à-dire que l'aire du triangle *IMN* est maximale lorsque $M = O$.

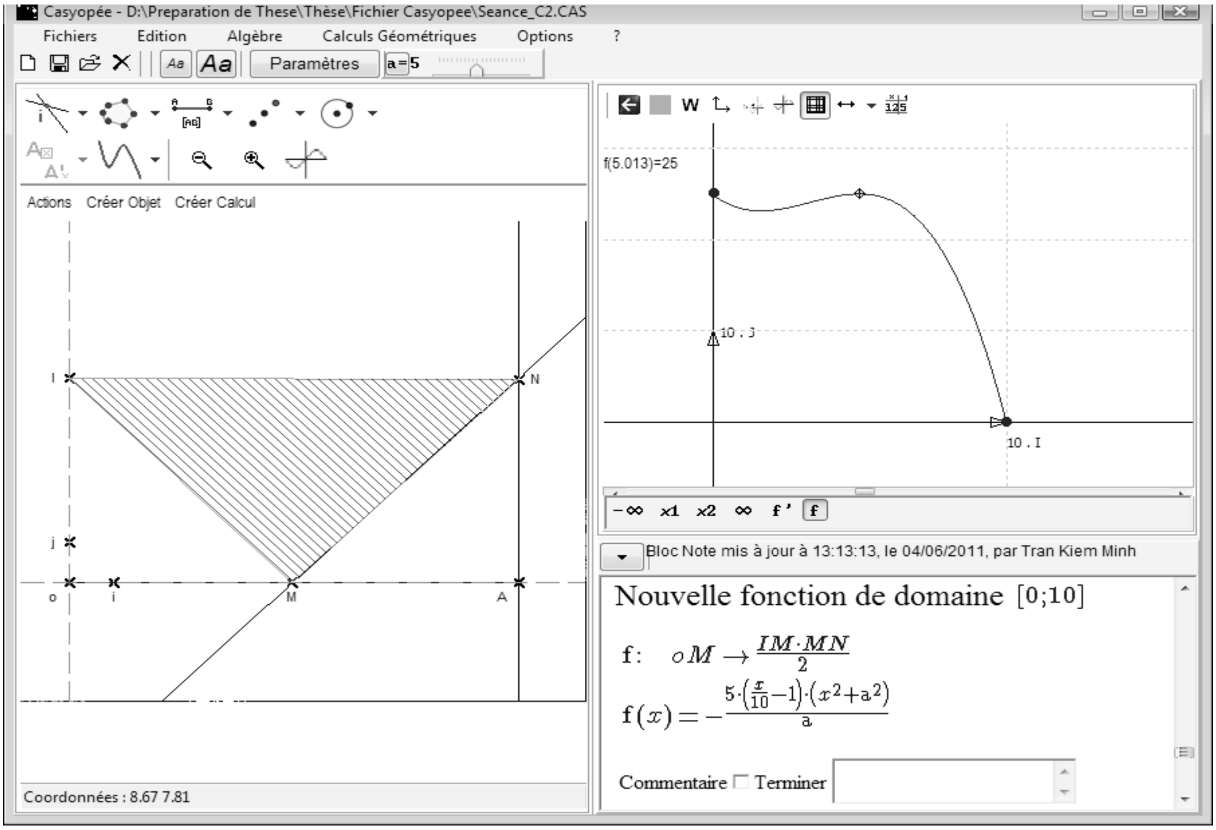


Figure 5. *La figure du problème et le graphe de la fonction pour le cas a = 5*

Le texte du deuxième problème donné aux élèves (figure 4) distingue deux phases principales. Dans la première phase, il est demandé aux élèves de travailler sur le cas $a=5$. Dans ce cas, la fonction exprimant l'aire du triangle *IMN* a un minimum et un maximum sur l'intervalle ouvert]0 ; 10[. La valeur de la fonction à l'origine *O* est égale à la valeur au point maximum. Il y a donc deux positions possibles du point libre *M* pour lesquelles l'aire est maximale : le point *O* et le point correspondant au maximum sur]0 ; 10[.

Pour la deuxième phase, les élèves explorent le problème avec le cas $a = 6$ où la fonction exprimant l'aire du triangle *IMN* est également un polynôme de troisième degré mais strictement décroissant sur son intervalle de définition. Il n'y a donc qu'une position possible pour le point *M*, l'extrémité *O* du segment [*OA*].

Créer un « calcul géométrique »

La construction de la figure dynamique est effectuée dans la fenêtre géométrique de Casyopée. Ensuite, les élèves peuvent créer un calcul géométrique exprimant l'aire du triangle, par exemple $\frac{1}{2}IM.MN$ afin d'explorer la variation de ses valeurs numériques. La tâche « explorer » du problème a pour but d'encourager des observations des covariations entre grandeurs et des explorations qualitatives de la variation de l'aire. Par exemple, les élèves peuvent observer la covariation entre le point libre M et la valeur de l'aire. Ils peuvent également observer la covariation entre une mesure liée au point libre M et l'aire. Pour le cas $a = 5$, lorsqu'ils déplacent le point M de l'origine O au point A, cette valeur diminue puis elle augmente jusqu'à la valeur maximale de 25 quand M est le milieu du segment $[OA]$. Finalement, elle diminue dans le reste. Comme nous l'avons noté plus haut, l'aire admet également une valeur maximale de 25 lorsque M coïncide avec l'origine O.

Après détermination d'un calcul correspondant à la grandeur dont les variations sont à étudier, la traduction des dépendances géométriques dans Casyopée est caractérisée par les actions de choisir une grandeur comme variable et puis d'exporter la dépendance fonctionnelle obtenue (ce que Casyopée effectue automatiquement). Il est possible qu'une aide de l'enseignant soit nécessaire pour ce passage. Les élèves peuvent choisir une variable adéquate parmi plusieurs choix possibles : la distance OM, l'abscisse du point M, la distance AM… Casyopée fournira une rétroaction sur la validité de chaque choix de variable.

Notons bien qu'un choix inadéquat mais valide de variable implique des conséquences sur la complexité de l'expression algébrique de la fonction exportée. Par exemple, si on choisit la distance MN comme variable, cette variable est acceptée par Casyopée mais l'expression de la fonction exportée sera volumineuse. Par contre, si l'élève prend la variable AN, Casyopée fournira une rétroaction indiquant que la dépendance est non univoque (non fonctionnelle) et il ne pourra pas la valider :

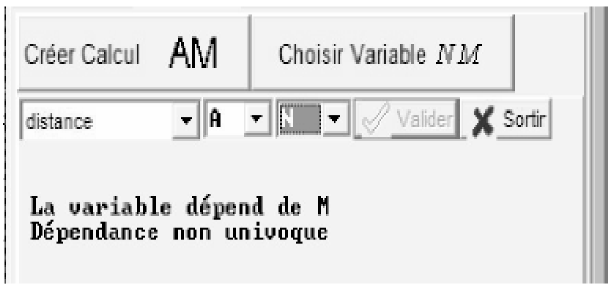


Figure 6. *Choix inadéquat et rétroaction de Casyopée*

Ensuite, les élèves peuvent exporter la dépendance fonctionnelle dans le module symbolique pour obtenir son expression algébrique. Casyopée fournira une rétroaction indiquant l'intervalle de définition et l'expression de la fonction.

Par exemple, avec le choix de la variable $x = OM$, la fonction exprimant l'aire du triangle IMN sera :

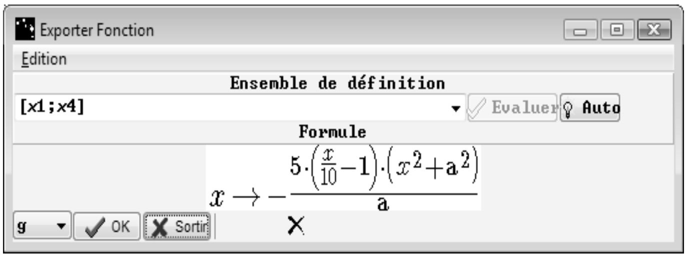


***Figure** 7. Exportation de la fonction*

Cette exportation correspond à un changement du cadre géométrique vers le cadre algébrique (Douady, 1986).

Dans le cadre algébrique, les élèves peuvent mobiliser différentes techniques et registres sémiotiques (Duval, 1993) pour trouver une preuve algébrique du problème. Ils peuvent utiliser le registre graphique pour compléter l'exploration des variations de l'aire et le maximum de la fonction. Ils peuvent également passer du registre graphique au registre symbolique pour réaliser des transformations algébriques. Casyopée permet de développer ou de factoriser l'expression algébrique pour obtenir une expression algébrique plus simple. Casyopée permet aussi aux élèves de calculer la dérivée de la fonction et ses signes pour arriver à une preuve. Finalement, la visualisation de la réponse dans la fenêtre géométrique permet de valider la réponse au problème. Pour le cas $a = 6$, les élèves doivent piloter le paramètre a vers la valeur $a = 6$ puis continuer à ré-explorer le nouveau problème. Notre intention didactique est de dégager le rôle que joue le paramètre a relativement à la position du point M qui maximise ladite aire.

Niveaux de représentation et types d'activités sur les fonctions

Nous analysons maintenant les apports de Casyopée pour relier les différents niveaux de représentation et types d'activités sur les fonctions dans la Typologie.

D'abord, le module de géométrie dynamique est considéré comme un système physique pour des activités enactives-iconiques (ce sont des activités concernant des expériences de mouvements telles que le travail sur des représentants numériques ou graphiques de ces mouvements, les explorations sur les figures ou les tables de valeurs approchées). À ce premier niveau, les élèves peuvent faire une exploration visuelle des aires du triangle *IMN*.

L'action de créer un calcul géométrique exprimant l'aire du triangle (une formule pré-algébrique, par exemple $\frac{1}{2} IM.MN$) est de type d'activité générative (voir le tableau 1) et correspond au passage du niveau « système physique » au niveau intermédiaire « grandeurs et mesures » (tableau 1). Cela nécessite de connaître la formule du calcul d'aire d'un triangle et d'avoir en tête que l'angle en *M* est un angle droit.

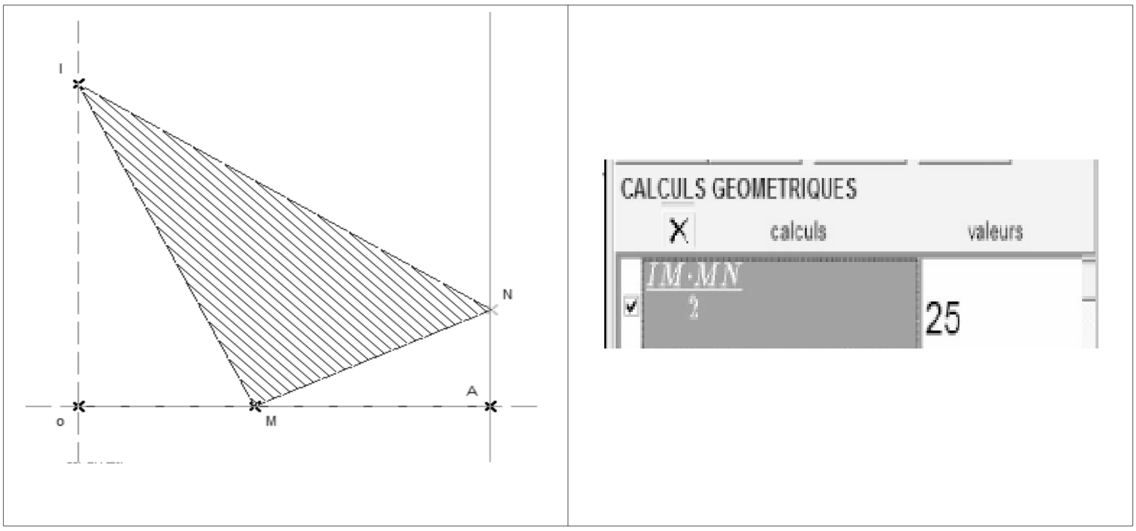


Figure 8. *Passage du niveau « système physique » au niveau « grandeurs et mesures » pour les deux types d'activités enactive-iconique et générative*

Au niveau « grandeurs et mesures », cette formule pré-algébrique sert à des explorations locales de type enactive-iconique telles que : faire varier des grandeurs concernant le point *M*, observer les variations de l'aire et conjecturer une valeur maximale.

L'activité générative à ce niveau correspond à une modélisation fonctionnelle des relations de dépendances, soit une « écriture géométrique ». Le passage du type d'activité enactive-iconique au type d'activité générative est caractérisé par l'action de choisir une variable.

Après cette action, Casyopée peut afficher la dépendance sous la forme d'une fonction géométrique, comme par exemple $OM \to \frac{1}{2} IM.MN$.

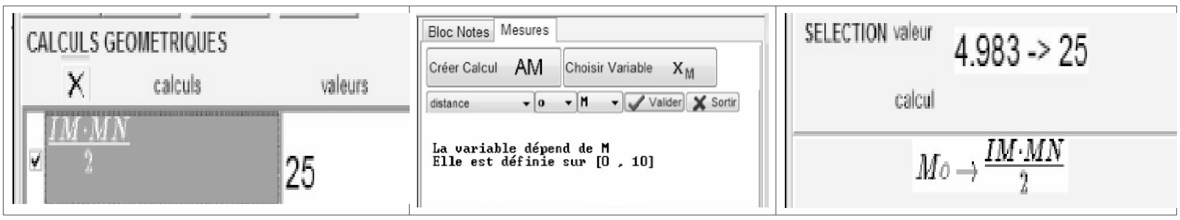


Figure 9. *Passage du type d'activité enactive-iconique au type d'activité générative pour le niveau « grandeurs et mesures »*

L'exportation de la fonction géométrique dans le module symbolique correspond à un passage du niveau « grandeurs et mesures » au niveau « fonctions mathématiques ». L'identification de la variable, de son domaine de définition et la validation de sa formule sont des étapes importantes. Casyopée donne une aide pour ces étapes en calculant le domaine et la formule, tout en laissant l'élève libre du choix de variable.

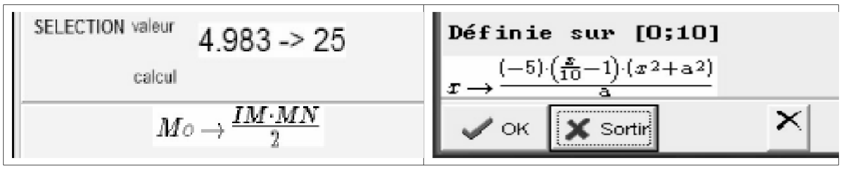


Figure 10. *Passage du niveau « grandeurs et mesures » au niveau « fonctions mathématiques » pour le type d'activité générative*

Au niveau « fonctions mathématiques », le type d'activité type enactive-iconique concerne des explorations locales et globales du tracé graphique de la fonction. À ce niveau, Casyopée permet facilement des passages entre deux types d'activité générative et enactive-iconique car la fenêtre graphique est intégrée dans le module symbolique.

Dans un même type d'activité enactive-iconique, Casyopée peut permettre de relier le niveau « fonctions mathématiques » au niveau « système physique » grâce à sa caractéristique spécifique : le déplacement d'un point mobile sur le tracé graphique implique un mouvement correspondant du point libre *M* dans la figure dynamique et réciproquement.

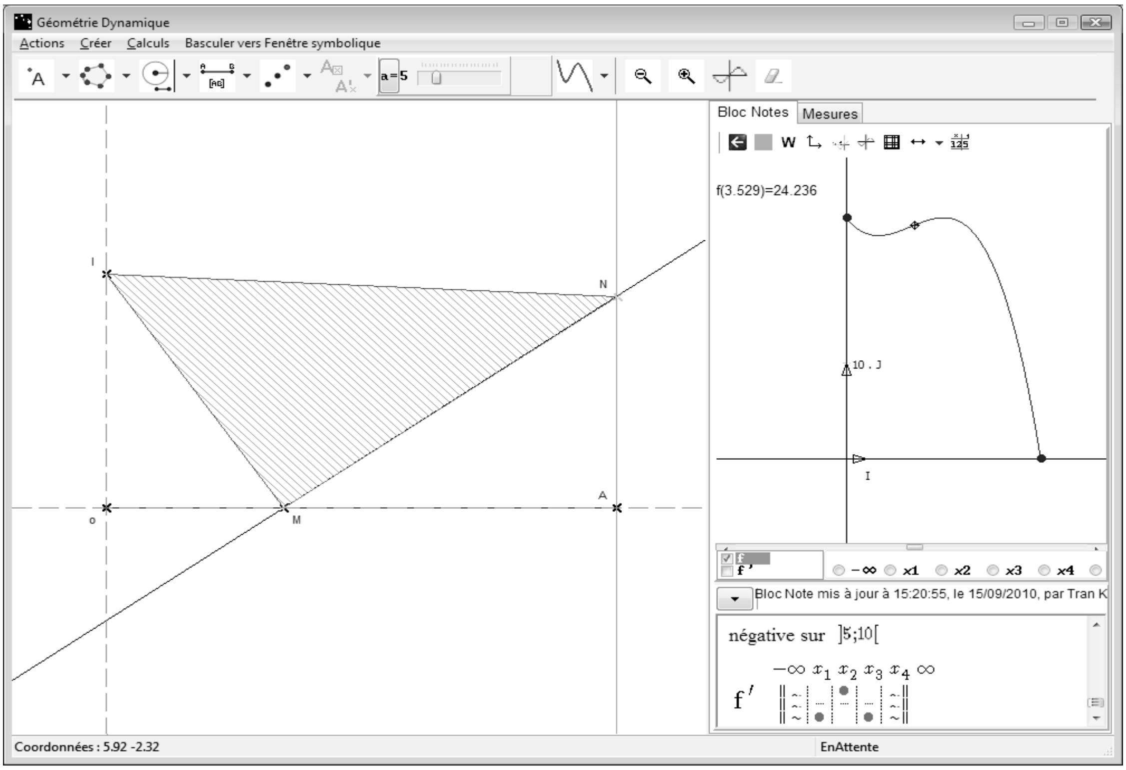


Figure 11. *Passage du niveau « fonctions mathématiques » au niveau « système physique » pour le type d'activité enactive-iconique*

6. Synthèse des observations

Nous analysons maintenant les observations recueillies au cours de chacune des deux années d'expérimentations, en portant notre attention sur deux aspects : l'utilisation de Casyopée par les élèves et leurs connaissances mathématiques sur les fonctions.

6.1 Réalisation des tâches

Pour chacune des étapes données dans le tableau 2, nous avons établi un rapport détaillé des actions réalisées par le binôme Elina-Chloé durant les deux années d'expérimentation. Pour comparer des éléments significatifs issus des deux expérimentations, nous avons choisi de découper le déroulement en épisodes correspondant aux tâches.

Conception de la figure

Les observations ont montré que cette tâche est difficile et demande de mobiliser des connaissances mathématiques. Les difficultés que le binôme a rencontrées concernent principalement la distinction entre point libre, point semi-libre et point restreint.

Durant la première expérimentation, le binôme a passé beaucoup de temps à construire la figure. Il a fait d'abord la construction du quadrilatère *MNPQ* « mou » en prenant en compte des propriétés de parallélisme et de perpendicularité mais seulement « au jugé ». La déformation de la figure lors du déplacement du point libre *M* l'a aidé à reconnaître cette erreur. Cependant, cette rétroaction n'a pas été suffisante pour le binôme et l'observateur a dû intervenir pour l'aider. Dans la deuxième expérimentation, ces difficultés ont persisté mais le binôme a pu les dépasser sans l'aide de l'observateur.

Explorations et conjectures

Nous avons repéré une difficulté relative à l'usage de la fonctionnalité « Créer un calcul » chez ces élèves lors de la première expérimentation.

Il s'agit de la confusion entre deux actions : « Créer un calcul » et « Choisir une variable » qui correspondent à deux icônes adjacentes dans l'onglet « Mesures » de Casyopée. D'autre part, le binôme a fait une erreur en tapant le calcul géométrique $MN \times MP$ au lieu de $MN \times MQ$ pour l'aire de *MNPQ*. Il a fait ensuite varier le point *M* et a observé des valeurs numériques croissantes alors que visiblement l'aire diminuait sur la figure. Cette rétroaction l'a aidé à repérer l'erreur et la corriger. Quant à la recherche des conjectures, le binôme l'a faite sur la position du point N et non sur celle de M qui est le point libre. Il ne s'est pas intéressé aux variations de l'aire du rectangle MNPQ mais uniquement à la valeur du maximum.

Durant la deuxième expérimentation, ce binôme a beaucoup exploré certaines propriétés de l'aire, tant locales que globales. Il a fait des conjectures sur la position exacte du point libre M ainsi que sur le sens de variation de la valeur de l'aire. Nous pensons que ces explorations locales et globales ont du sens pour les élèves parce qu'elles vont leur permettre de passer au niveau de la fonction mathématique. Nous avons également trouvé dans leurs échanges oraux des termes liés à l'idée de covariation comme « croissante », « décroissante »…

Modélisation par une fonction des relations géométriques

L'action de modéliser une dépendance géométrique est principalement gérée par deux boutons « Choisir une variable », « Exporter une fonction » ainsi que par certaines rétroactions associées dans Casyopée. L'observation a montré que ces deux élèves avaient du mal à réaliser ces actions pendant la première expérimentation. D'abord, le passage au choix d'une variable n'a pas été spontané et ils ont eu besoin d'aide de l'observateur. Enfin, ils ont choisi des variables peu appropriées comme la distance *NP*, puis *MQ*. L'action d'exporter une fonction a aussi nécessité l'intervention de l'observateur. Cependant, par un dialogue avec le logiciel via les rétroactions, ils ont finalement choisi la variable adéquate *xM*.

En revanche, l'observation dans la deuxième expérimentation a montré l'évolution marquante de ces deux actions de modélisation (choix de la variable et exportation de la fonction). Les deux élèves ont rapidement et spontanément réalisé ces actions sans avoir besoin des interventions de l'observateur. Ils ont également montré une compréhension du processus de modélisation fonctionnelle avec Casyopée. L'extrait suivant montre cette évolution :

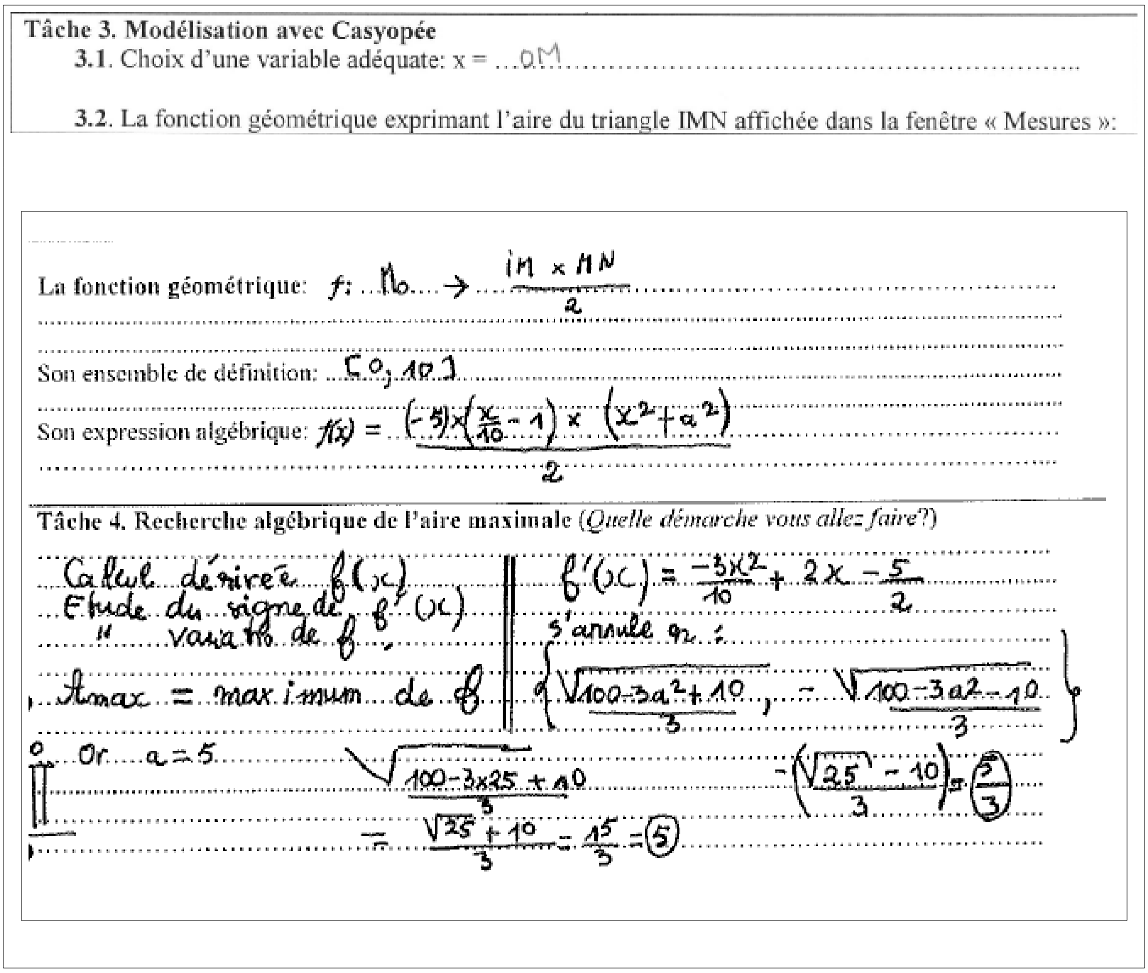
Chloé :	Choix d'une variable ? La dernière fois, on a fait avec la hauteur.
Elina :	Non, *OM*. Je pense que ça va pour une variable
Chloé :	Oui. {*Elle valide cette variable puis exporte la fonction*}
Elina :	Son ensemble de définition ?
Chloé :	C'est] - ∞ ; + ∞ [. Ah non, c'est] 0 ; 10 [
Elina :	Regarde! C'est marqué, l'ensemble de définition.
Observateur :	Et finalement, quelles sont les étapes de la modélisation ? Chloé : On trace la figure, on fait des conjectures.
Elina :	On fait le calcul.
Chloé :	Oui, on trace la figure, on fait le calcul.
Chloé :	Et après le calcul, justement que l'on regarde ce qui se passe, et on conjecture.
Elina :	Ensuite, on choisit la variable.
Chloé :	Oui, on exporte la fonction et essaie de valider la conjecture.

Ainsi, l'évolution des élèves montre l'effet positif des rétroactions du logiciel : choisir la variable appropriée *OM* et la valider spontanément, reconnaître l'ensemble de définition de la fonctions exportée...

Preuve algébrique

La première expérimentation a témoigné d'une réussite faible du binôme pour cette tâche. En fait, après avoir reconnu la parabole dans la fenêtre graphique (la fonction modélisatrice est une fonction du second degré), il ne savait pas comment exploiter et mobiliser leurs connaissances. Il a eu besoin d'interventions de l'observateur pour se souvenir de la formule d $-\frac{b}{2a}$ es coordonnées du maximum et l'utiliser. Finalement, il n'a obtenu la réponse qu'en considérant une valeur particulière pour les paramètres.

Dans la deuxième expérimentation, ce binôme a proposé une démarche correcte pour la preuve en utilisant la dérivée. Il était à l'aise avec des fonctionnalités de Casyopée comme « Développer », « Factoriser » et a utilisé les nouvelles fonctionnalités comme « Dérivée », « Justifier/Signes » (les nouvelles fonctionnalités qui étaient testées utilisées dans cette expérimentation) pour trouver la dérivée et son signe. Le binôme a utilisé le menu « Calculer/Zéros » pour calculer les zéros de la dérivée. Il a obtenu deux racines dépendant du paramètre *a*. Il a substitué la valeur numérique *5* au paramètre *a* puis a construit un tableau de variation pour cette valeur du paramètre.



Tâche 3. Modélisation avec Casyopée

3.1. Choix d'une variable adéquate: x = OM

3.2. La fonction géométrique exprimant l'aire du triangle IMN affichée dans la fenêtre « Mesures »:

La fonction géométrique: f: M → $\frac{IM \times MN}{2}$

Son ensemble de définition: $[0; 10]$

Son expression algébrique: $f(x) = \frac{(-5)\times\left(\frac{x}{10}-1\right)\times(x^2+a^2)}{2}$

Tâche 4. Recherche algébrique de l'aire maximale (*Quelle démarche vous allez faire?*)

Calcul dérivée $f(x)$

Etude du signe de $f'(x)$

" varia de f,

Amax = maximum de f

$f'(x) = \frac{-3x^2}{10} + 2x - \frac{5}{2}$

s'annule en :

$\left\{\frac{\sqrt{100-3a^2}+10}{3}, -\frac{\sqrt{100-3a^2}-10}{3}\right\}$

Or a = 5

$\frac{\sqrt{100-3\times25}+10}{3} = \frac{\sqrt{25}+10}{3} = \frac{15}{3} = 5$

$-\left(\frac{\sqrt{25}-10}{3}\right) = \frac{5}{3}$

Figure 12. *Preuve algébrique extraite de la fiche élève du binôme Elina-Chloé*

Interprétation dans la fenêtre géométrique

Dans la première expérimentation, le binôme est revenu à la fenêtre géométrique et a interprété le résultat en disant : « -2,5 c'est bien le milieu du [*OA*] ». Pour la seconde expérimentation, il est également retourné dans la fenêtre géométrique et puis a visualisé les positions trouvées du point libre *M*.

6.2 Développement conjoint de connaissances mathématiques et de connaissances sur l'artefact pendant un temps long de l'apprentissage

Les données recueillies à partir des questionnaires et des entretiens ont permis de mettre en évidence des problèmes significatifs concernant l'usage de Casyopée. Il apparaît clairement que les premiers usages ont été difficiles à cause de la variété des fonctionnalités de Casyopée. Les élèves confondent par ailleurs une fonction et une fonctionnalité :

> On ne connaît pas exactement les différentes fonctions, différents outils qu'il y a dans Casyopée. On obtient des calculs et on ne sait pas comment on a fait pour y arriver : déroulement de calcul (Elina, questionnaire).

Les élèves ont également rencontré des difficultés relatives à l'artefact mais aussi des difficultés mathématiques lors de la phase de modélisation fonctionnelle, particulièrement sur l'action de choisir une variable :

> La chose la plus dure, c'est le choix de variable. Après, il faut bien choisir la bonne variable (Chloé, entretien).

Ces élèves ont indiqué comment les difficultés ont été dépassées au long de l'expérimentation. Leur maîtrise de Casyopée est justifiée par l'utilisation régulière et l'aide de l'enseignant :

> J'ai téléchargé Casyopée sur Google donc je l'utilise quelques fois pour l'entraînement… Au début, j'avais du mal à trouver quelques fonctionnalités pour utiliser mais maintenant c'est bon… Avec l'aide du professeur qui nous explique comment faire pour résoudre certains problèmes (Chloé, questionnaire).

Malgré les difficultés repérées dans les premiers usages, les élèves ont eu à la fin de la seconde expérimentation des remarques positives par rapport aux caractéristiques spécifiques de Casyopée, notamment la modélisation fonctionnelle et la possibilité de relier dynamiquement les deux fenêtres géométrique et algébrique.

> Le choix de variable, je trouve que cela est intéressant… Faire toutes les démarches est super : construction de la figure, tableau de variation, calcul de dérivée… Casyopée est plus rapide et plus commode qu'une calculatrice… On a en même temps le côté géométrique et algébrique du problème... On voit mieux comment une fonction « réagit », c'est pratique et intéressant (Chloé, questionnaire).

Les potentialités de Casyopée ont été perçues comme éléments favorables pour l'apprentissage des fonctions car elles ont permis d'aborder le problème de manière « pratique » et « intéressante ». Dans le tableau ci-dessous, nous soulignons les liens et les articulations entre la progression des usages de Casyopée et le développement des connaissances mathématiques du binôme Elina-Chloé entre la première et la seconde expérimentation. D'autres binômes ont correctement créé un calcul géométrique exprimant l'aire du triangle *IMN*. Le choix de la variable *OM* est dominant pour les binômes observés. La plupart des binômes ont proposé une démarche de dérivée pour chercher une preuve algébrique. Cependant, il y a peu de binômes qui ont réussi à utiliser Casyopée pour soutenir cette démarche.

Comme on le voit, chaque tâche mentionnée dans le tableau ci-dessous demande à la fois des connaissances mathématiques et des capacités à utiliser Casyopée. L'observation des élèves pendant un temps long nous a montré que l'épisode de modélisation fonctionnelle est une étape où la synergie entre connaissances mathématiques et connaissances sur l'artefact est en jeu. La distinction entre calcul, variable et fonction facilite les manipulations avec Casyopée et les adaptations à ses rétroactions. De plus, ce processus, mis en œuvre dans des situations *ad hoc*, permet de mobiliser la notion de fonction dans un contexte de résolution de problèmes – ce qui était préconisé dans les programmes scolaires de ce niveau.

Tâches	**Progression des usages de Casyopée**	**Développement de connaissances mathématiques**
Conception de la figure	- Correction plus rapide des erreurs après l'observation des déformations inattendues de la figure.	- Meilleure compréhension des dépendances fonctionnelles dans la figure.
Exploration et conjecture	- Définition correcte et usage d'un calcul géométrique pour l'aire - Distinction entre deux boutons « Créer un calcul » et « Choisir une variable »	- Compréhension de la formule d'aire du triangle comme covariation entre le point mobile M et la valeur de l'aire.
Modélisation fonctionnelle	- Usage spontané et facile des boutons « Choisir une variable » et « Exporter une fonction » - Adaptations rapides aux rétroactions du logiciel.	- Compréhension d'une dépendance fonctionnelle - Distinction d'une dépendance fonctionnelle parmi des covariations.
Preuve algébrique	- Usage facile des transformations algébriques offertes par Casyopée - Pilotage des paramètres.	- Compréhension de différents comportements de la fonction dépendant du paramètre - Compréhension d'une fonction dépendant d'un paramètre comme une famille de fonctions.

Tableau 3. *Développement conjoint de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée pour le binôme Elina-Chloé*

6.3 Connexion des activités sur les fonctions dans la Typologie

Nous interprétons ici les observations du point de vue de la Typologie d'activités sur les fonctions, de façon à préciser l'évolution des élèves dans ces activités.

Système physique – Grandeurs et mesures

Création d'un calcul géométrique : La première expérimentation a témoigné d'une difficulté pour le passage du niveau « système physique » au niveau « grandeurs et mesures ». Le binôme a passé beaucoup de temps pour créer un calcul géométrique et choisir une variable appropriée. Il a fait une confusion d'ordre instrumental entre les actions de créer un calcul géométrique et de choisir une variable. En entrant un calcul géométrique de l'aire du rectangle *MNPQ*, il a fait une erreur et a tapé MN×MP . Dans la seconde expérimentation, le binôme a créé correctement un calcul géométrique de l'aire du triangle *IMN* sans l'intervention de l'observateur.

Choix d'une variable : L'action de choisir une variable est le passage du type d'activité enactive-iconique au type d'activité générative dans le même niveau « Grandeurs et mesures ». Dans la première expérimentation, le binôme a eu du mal à choisir une variable adéquate et a eu besoin d'aides de l'observateur. Cette action a été améliorée pendant la seconde expérimentation. Le choix de la variable a été plus spontané et rapidement réalisé. Cependant, après avoir choisi une variable appropriée, ce binôme n'a pas continué à explorer la dépendance fonctionnelle et est passé rapidement à l'exportation d'une fonction.

Grandeurs et mesures – Fonctions mathématiques

Exportation d'une fonction : La première expérimentation a montré les difficultés des élèves dans le passage entre ces deux niveaux. Il a nécessité des aides de l'observateur. Les rétroactions de Casyopée sur la complexité des formules algébriques de la fonction exportée les ont aidées à trouver une variable plus appropriée.

A la fin de la seconde expérimentation, les élèves ont montré une facilité pour ce passage ainsi que pour l'adaptation aux rétroactions du logiciel sans l'aide de l'observateur. Ils ont également identifié le domaine de définition de la fonction exportée.

Fonctions mathématiques – Système physique

Durant les séances d'observation en classe, les élèves n'ont pas montré une connexion claire entre ces deux niveaux. Une des difficultés pour cette connexion pourrait être issue de l'ergonomie de l'interface des fenêtres : on ne pouvait pas voir facilement et en même temps la fenêtre de géométrie dynamique et la fenêtre graphique.
Cependant, à la fin de la deuxième expérimentation, les concepteurs du logiciel ont intégré un onglet « Graphiques » dans la fenêtre de géométrie dynamique de Casyopée qui permet d'afficher la représentation graphique de la fonction. Ce développement a effectivement facilité cette connexion chez des élèves. Nous présentons ci-dessous un extrait de l'entretien avec le binôme Elina-Chloé :

Intervieweur :	Bon, et comment cadrer le graphe ?
Chloé :	On peut grandir, modifier l'unité du repère. On peut déplacer le repère et zoomer sur une partie de la fenêtre.
Intervieweur :	D'accord. Et le petit point qui est marqué sur le graphe, il représente quoi ?

{*L'intervieweur montre le point mobile sur le graphe dans la fenêtre graphique*}

Elina :	C'est le point *M*.
Intervieweur :	Oui, c'est bien.
Chloé :	C'est le point libre *M* de la figure.

Cet extrait montre que ce binôme comprend une connexion entre le niveau « fonctions mathématiques » et le « système physique » via le lien dynamique entre le graphe de la fonction et la figure.

Conclusion

Un premier résultat de notre travail est de montrer la possibilité d'une approche où les fonctions sont considérées comme des outils de modélisation de dépendances dans un cadre géométrique. Les activités fondées sur l'étude des relations de dépendances entre grandeurs ou mesures ont permis aux élèves observés de progresser dans leur compréhension de la notion de fonction. Une telle approche est en phase avec ce qui est actuellement visé par les programmes dans l'enseignement des fonctions au lycée.

Notre approche a mis en évidence que la modélisation fonctionnelle permet de relier un domaine initial d'existence des grandeurs (le système physique) et le modèle mathématique (les fonctions mathématiques). Nous avons mis l'accent sur le niveau intermédiaire « Grandeurs et mesures » dans le cycle de modélisation proposé. De notre point de vue, les activités des élèves à ce niveau, telles que créer un calcul géométrique exprimant la valeur d'une grandeur, explorer les covariations entre grandeurs et mesures, choisir une grandeur appropriée comme une variable pour quantifier la dépendance fonctionnelle géométrique, calculer une fonction mathématique exprimant cette dépendance fonctionnelle, etc sont fructueuses pour la conceptualisation des fonctions. Nous nous sommes appuyés sur la combinaison de cette approche avec la démarche expérimentale pour proposer des situations d'apprentissage sur les fonctions.

Nous avons pu observer chez le binôme Elina-Chloé (mais aussi chez d'autres élèves) un développement conjoint de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée. Notre étude a montré comment l'utilisation régulière de ce logiciel permet aux élèves d'articuler ces deux types de connaissances. Les élèves ont perçu l'importance et les difficultés de l'étape de modélisation fonctionnelle et nous avons pu voir comment la réalisation de cette étape mobilise ce développement conjoint de connaissances (Minh, à paraître).

L'étude a également éclairé la mise en œuvre de la Typologie d'activités pour la modélisation fonctionnelle en environnements numériques d'apprentissage. L'analyse des usages de Casyopée en classe a montré les potentialités de cette typologie pour la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des fonctions au lycée. Elle a en effet aidé à la conception des situations d'apprentissage, et permis d'analyser et d'éclairer les activités variées des élèves sur les fonctions au niveau du lycée. En particulier, les deux fonctionnalités « Calcul géométrique » et « Exporter une fonction » de Casyopée ont été reconnues comme outils permettant de relier les différents types d'activités sur les fonctions à leurs trois niveaux de représentation. Notre étude montre donc comment une approche des fonctions dans un cadre géométrique peut exister au lycée grâce à des logiciels géométriques et algébriques comme Casyopée.

Dans les approches actuelles de l'enseignement des mathématiques, la dimension expérimentale est souvent mise en avant (par exemple dans les démarches d'investigation). L'approche de l'enseignement des fonctions proposée dans cet article peut s'y rattacher. Le logiciel Casyopée et les tâches que nous développons sont conçus pour encourager les élèves à expérimenter au cours du processus de modélisation fonctionnelle de façon plus libre que dans les situations habituelles. Comme nous l'avons dit, cela va dans le sens des recommandations des programmes, et le sens d'une meilleure appréhension de la notion de fonction par les élèves.

Bibliographie

ALDON ET AL. (2008) Nouvel environnement technologique, nouvelles ressources, nouveaux modes de travail : le projet e-CoLab. *Repères IREM*, 72, 51-78.

ARZARELLO F., ROBUTTI O. (2004) Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics*, Special Issue CD Rom.

BLOCH I. (2002) Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Petit x*, 58, pp 25-46.

BODIN A. (2008) Lecture et utilisation de PISA pour les enseignants. *Petit x*, 78, 53-78.

COMIN E. (2005) Variables et fonctions, du collège au lycée : méprise didactique ou quiproquo interinstitutionnel. *Petit x*, 67, 33-61.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 5, 37-65.

FALCADE R. (2002) L'environnement Cabri-Geomètre, outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe d'une fonction. *Petit x*, 58, 47-81.

FALCADE R., LABORDE C., MARIOTTI M. A. (2007) Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 317-333.

HODGSON B. R., MULLER E. R. (1992) The Impact of Symbolic Mathematical Systems on Mathematics Education. In B. Cornu, & A. Ralston (Eds.), *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching. Science and Technology Education Series, 44* (pp. 93-107). Paris: UNESCO.

KIERAN C. (2004) The core of algebra: Reflections on its main activities. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 21-34). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

LAGRANGE J.-B. (2005) Curriculum, classroom practices and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(2), 143-189.

LAGRANGE J.-B. (2007) Pratiques instrumentées et démarche expérimentale dans l'apprentissage de la notion de fonction. In R. Floris & F. Conne (Eds.), *Environnement informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques* (pp. 19-38). Bruxelles : De Boeck.

LAGRANGE J.-B., ARTIGUE M. (2009) Students'activities about functions at upper secondary level: a grid for designing a digital environment and analysing uses. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.), *Proceedings of 33rd Conference of the International Groupe for the Psychology of Mathematics Education,* Vol.3, pp. 465-472. Thessaloniki, Greece: PME.

MINH T. K. (à paraître) Les fonctions dans un environnement numérique d'apprentissage : étude des apprentissages des élèves sur deux ans. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education.*

TALL D. (1996) Functions and calculus. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Kluwer Academic Publishers.

YOUSCHKEVITCH A. P. (1976) The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16(1), 37-85.