UNE ÉTUDE DIDACTIQUE DU CONCEPT DE RÉCURRENCE

Denise GRENIER
Institut Fourier – Université Grenoble I

Résumé. L'induction dans ses diverses acceptions en sciences est reconnue comme un concept très fécond. En mathématiques, le raisonnement par induction ou récurrence a la double spécificité de permettre la construction des objets et d'être un outil de preuve, mais sa compréhension n'est pas évidente et nécessite quelques connaissances de logique : on observe donc souvent des malentendus sur l'objet même de la démonstration par récurrence. Une étude didactique menée depuis de nombreuses années auprès d'étudiants scientifiques universitaires et d'enseignants de mathématiques révèle que cette double spécificité est souvent absente de leurs conceptions, le concept étant réduit à une technique de preuve mal comprise et dont, du même coup, la légitimité est questionnée. Nous donnons des éléments d'analyse de ce phénomène et de ces effets. Puis nous proposons des problèmes susceptibles de construire les différents aspects de ce concept.

Mots-clefs. Récurrence, raisonnement, implication, preuve, didactique, mathématiques.

I. L'induction en mathématiques

En Sciences, le raisonnement inductif a pour objectif essentiel de généraliser à un ensemble d'objets une propriété connue ou attestée sur quelques objets particuliers. En mathématique, le raisonnement inductif, dit « par récurrence », se différencie relativement aux autres sciences, en particulier aux sciences physiques, par sa validité intrinsèque, permettant d'établir la preuve d'un résultat généralisateur. Citons H. Poincaré (1902) :

> L'induction, appliquées aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est toujours en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.

En toute généralité, l'induction mathématique s'applique aux ensembles bien ordonnés[1], le plus usuel étant l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. $\mathbb{N}$ peut être défini au moyen des axiomes dits de Peano (mathématicien italien du XIX[e] siècle), qui répertorient les propriétés de $\mathbb{N}$ et construisent sa structure. Nous donnons ci-après les cinq axiomes fondateurs, car de fait,

1 Un ensemble est dît bien ordonné s'il est muni d'un ordre tel que toute partie non vide admet un plus petit élément.

même s'ils sont rarement enseignés aux élèves et aux étudiants, ils sont sous-jacents à une utilisation quotidienne des propriétés de $\mathbb{N}$.

A1• L'élément appelé zéro et noté 0, est un entier naturel.

A2• Tout entier naturel n a un unique successeur, noté $S(n)$ ou Sn.

A3• Il n'existe pas d'entier naturel dont le successeur est 0.

A4• Deux entiers naturels ayant même successeur sont égaux.

A5• Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.

La notion de successeur induit un ordre sur $\mathbb{N}$, associé à la construction d'une addition. Nous ne développerons pas ces points ici. Signalons que l'axiomatique des ensembles permet également de construire $\mathbb{N}$ comme étant l'ensemble des cardinaux finis. Dans ce cas, les cinq axiomes de Peano deviennent des théorèmes.

Axiome de récurrence et principe de récurrence dans $\mathbb{N}$

L'axiome A5 ci-dessus est appelé dans certains textes « axiome de récurrence ». Sa formulation est proche de celle utilisée classiquement dans les preuves par récurrence au lycée et à l'université :

Principe de récurrence
S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vraie et pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie, alors pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

L'ensemble d'entiers naturels évoqué dans l'axiome A5 correspond ici à $\{n \text{ ; } P(n) \text{ est vraie}\}$. Il est donc égal à $\mathbb{N}$ si $n_0 = 0$, ou au sous-ensemble de $\mathbb{N}$ formés des entiers supérieurs ou égaux à n_0, si $n_0 > 0$.

Dans les ouvrages d'enseignement, on trouve plus souvent le principe de récurrence sous une forme qui distingue deux « étapes », concernant respectivement le rang initial et l'hérédité :

Étape 1. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vraie.

Étape 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

Les quantificateurs « Il existe » et « Pour tout » sont indispensables pour comprendre le sens de ce principe. Or, nous verrons qu'ils sont souvent implicites dans l'enseignement, ou même remplacés par des formulations inadéquates voire erronées. De plus, l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est à comprendre au sens de la logique mathématique, c'est-à-dire qu'on peut avoir ($P(n) \Rightarrow P(n+1)$) vraie pour des valeurs de n pour lesquelles $P(n)$ est faux. Autrement dit, une propriété peut être héréditaire à partir d'un certain rang et cependant n'être jamais vraie. D'où la nécessité de vérifier « l'initialisation » pour une certaine valeur de n – cette étape n'étant pas nécessairement la première : en effet, le rang initial est souvent induit par l'établissement de l'hérédité. Nous préciserons tout cela sur des exemples.

L'infini dans le principe de récurrence

Les axiomes A2 et A5 et le principe de récurrence tel que formalisé ci-dessus mettent en jeu l'infini : puisque tout élément a un successeur, il n'y a pas de plus grand élément (car ce plus grand élément n'aurait pas de successeur) ; d'autre part, une propriété vraie pour tout entier à partir d'un certain rang est donc « vraie à l'infini ». Cette question est soulevée par Poincaré dans *La Science et l'Hypothèse* (1902) :

> […] Le principe de récurrence pose de nombreux problèmes d'ordre logique et aussi philosophique. On peut en effet imaginer que, de proche en proche, on pourrait prouver la propriété pour tout entier naturel, mais on sait de façon certaine que l'on ne peut pas expliciter cette infinité de preuves successives. Comme dans de nombreux cas, la richesse et la cohérence des résultats obtenus apportent une justification a posteriori à ce principe de démonstration. Certains auteurs estiment que le principe de récurrence est le responsable principal de la fécondité des mathématiques qui, sans lui, ne seraient qu'une tautologie stérile.

Ce principe pose donc question et se justifierait « a posteriori », tout en étant fondamental en mathématique. Sa complexité intrinsèque vient probablement du fait que l'on prétend démontrer une propriété relative à un nombre infini d'éléments, en l'étudiant seulement pour une valeur générique *n.* Ceci ne va pas de soi, d'ailleurs les mathématiciens « intuitionnistes » n'acceptent pas les preuves par récurrence.

Les images analogiques usuelles accompagnant cette formalisation – montée d'une échelle, propagation de la chute d'une pile de sucres – posent aussi la question de l'infini. Ce rapport du principe de récurrence avec l'infini est source de difficultés, mais nous verrons que ce n'est pas l'essentiel des obstacles à sa compréhension et qu'on peut l'aborder autrement.

Le principe de Fermat et la « descente infinie »

Le principe de descente infinie dit « de Fermat », est donné classiquement sous l'une des deux formes suivantes :

> F1. Tout ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
> F2. Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans $\mathbb{N}$.

On peut se convaincre facilement de l'équivalence de F1 et F2. En effet, s'il existait une suite infinie $u = \{u_n\}$ strictement décroissante dans $\mathbb{N}$, alors on pourrait construire l'ensemble $S = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ non borné dans $\mathbb{N}$. Ce qui prouve que F1 $\Rightarrow$ F2. Réciproquement, s'il existait dans $\mathbb{N}$ un sous-ensemble non vide et non borné inférieurement, en ordonnant les éléments de cet ensemble, on pourrait construire une suite infinie strictement décroissante d'éléments de $\mathbb{N}$. Ce qui prouve que F2 $\Rightarrow$ F1.

Le principe de Fermat induit une formalisation de la récurrence dit « par descente infinie », pour démontrer qu'une propriété P(n) est fausse pour tout n, ou que non P(n) est vraie :

> Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que P(n) vraie, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m < n$ et P(m) vraie, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P(n) est faux.

Dans cette formalisation, l'infini n'est pas en question. D'autre part, l'image analogique avec la descente (et non la montée infinie) d'une échelle est assez facile à comprendre : si je suis sur un barreau d'une échelle et que je descends « strictement », je ne peux descendre indéfiniment, j'arrive nécessairement en bas (niveau zéro). Nous illustrerons l'intérêt et même la nécessité de connaître cette formulation ci-après, certains problèmes ne se résolvant que par descente infinie.

Instanciation de l'implication et « hypothèse de récurrence »

Pour démontrer l'hérédité, il faut instancier P(n) « pour un n quelconque » qualifié très souvent d'« hypothèse de récurrence ». Cette expression induit des difficultés dans la compréhension de l'hérédité comme implication, car dans une preuve par raisonnement déductif, une hypothèse est une donnée. De fait, il est nécessaire de savoir ce qu'est l'implication pour comprendre l'hérédité du principe de récurrence, en particulier de savoir distinguer « (P(n) $\Rightarrow$ P($n+1$)) est vraie » de « P(n) vraie $\Rightarrow$ P(n+1) vraie », cette dernière phrase étant une des instanciations de la première. Or, des études didactiques (Fabert, 2010 et Fabert & Grenier, 2011) montrent que l'implication n'est pas bien comprise même par les étudiants de Licence scientifique (cf. §III).

II. La récurrence dans l'enseignement

II.1 Différents types de raisonnements dans les manuels et l'enseignement

Une étude que nous menons depuis plusieurs années, sur la transposition de la récurrence dans l'enseignement de fin de secondaire et de l'université, montre que :
• d'une part, la récurrence n'est pas enseignée comme un concept, mais comme un « principe de raisonnement » ou un « type de preuve » ; raisonnement et preuve sont deux termes employés indifféremment dans certains ouvrages, qui passent de l'un à l'autre sans autre précaution ;
• d'autre part, la récurrence est répertoriée, dans une typologie très répandue (plus ou moins détaillée) de preuves ou raisonnements, telle celle-ci (dans un manuel d'université) :

> Raisonnement par implications (aussi appelé parfois raisonnement direct)
> Raisonnement par équivalences
> Raisonnement par l'absurde
> Raisonnement par disjonction des cas
> Raisonnement par contraposition
> Le contre-exemple
> Raisonnement par récurrence.

Cette typologie pose de nombreuses questions. D'abord, elle risque d'inférer que chaque type de raisonnement est exclusif des autres. Or, dans un raisonnement « par récurrence », on procède souvent par implication « directe ». De même, dans un raisonnement « par l'absurde », on va tout aussi bien utiliser des raisonnements directs que des raisonnements par contraposition, ou encore un contre-exemple (pour arriver à une contradiction). De plus, cette typologie ne met pas en évidence que le raisonnement par récurrence a un domaine d'application spécifique, les ensembles bien ordonnés, le plus classique étant $\mathbb{N}$. Tout ceci provient nous semble-t-il d'une confusion entre ce qui relève de la syntaxe dans l'écriture d'une preuve, et ce qui relève de la sémantique et de l'argumentation.

Cette typologie est très présente dans l'enseignement en France (aux niveaux secondaires et universitaires). Notre hypothèse est que c'est un outil didactique « efficace », au sens où elle permet d'enseigner et de faire pratiquer la preuve de manière méthodique, dans ses aspects syntaxiques, et de reconnaître la validité d'une preuve à sa conformité avec un schéma d'écriture désigné à l'avance. Ainsi, par exemple, démontrer que A implique B par un raisonnement « direct » consiste à partir des hypothèses A pour arriver à la conclusion B par des inférences (propriétés, théorèmes, données, etc.). De même, dans le raisonnement par « contraposée », ce qui est reconnaissable est que l'on part de la négation de la conclusion (Non B) pour arriver à la négation de l'hypothèse (Non A), par le même procédé que pour le raisonnement « direct ». Mais en fait, ce n'est rien d'autre qu'un raisonnement direct sur des propositions reconstruites.

II.2. Absurde, contre-exemple et récurrence

Les raisonnements et les preuves associées de types absurde, contre-exemple, récurrence ont en commun, nous semble-t-il, de nécessiter une plus grande vigilance sur ce que l'on construit. En effet, la question du vrai et du faux et « l'enjeu de vérité » y sont nécessairement présents à chaque étape. Dans une preuve par l'absurde, le schéma consistant à supposer à la fois A et non B pour arriver à une contradiction ou une phrase fausse, induit de confronter à chaque étape les inférences faites. Un contre-exemple, quant à lui, devant vérifier les hypothèses et contredire la conclusion, celle-ci doit donc rester constamment présente. La preuve par récurrence, sous sa forme la plus usuelle, nécessite de comprendre la distinction entre la vérité d'une implication A $\Rightarrow$ B et la vérité de la proposition « A vraie $\Rightarrow$ B vraie », puisque la première peut permettre d'établir l'hérédité d'une propriété pour tout entier n, alors même que cette propriété est toujours fausse.

Une conception très répandue chez les étudiants comme chez les enseignants est que le raisonnement par l'absurde est difficile. Elle entraîne son évitement par des enseignants de fin de secondaire et de début d'université, attesté par une recommandation classique : « Dans tous les cas où un raisonnement direct est possible, on évitera le raisonnement par l'absurde ». Sauf que ce n'est pas toujours possible. Nous pensons que le raisonnement par l'absurde, au contraire, n'est pas si difficile à faire comprendre si on s'appuie sur la logique « naturelle » : Prouver l'affirmation « si A est vraie, alors B est vraie » revient à prouver qu'on ne peut avoir à la fois A et non B. On suppose donc A et non B, et on en déduit une contradiction.

Une cause possible à cet évitement de l'absurde dans l'enseignement est que l'écriture d'une preuve sous forme « directe » est plus simple à schématiser. Une autre cause est peut-être que l'apprentissage de la preuve se fait d'abord en géométrie et en algèbre, domaines où les propriétés que l'on établit sont souvent des énoncés équivalents, ce qui n'est peut-être pas le plus pertinent pour apprendre à différencier une implication de sa réciproque.
Dans une démarche de preuve, les points de vue déductif et inductif se situent à des moments différents, de manière non linéaire. Le point de vue inductif est présent dans l'élaboration

d'une conjecture ou l'étude d'hypothèses, lorsque la conclusion est à construire. Le point de vue déductif est prépondérant dans l'écriture de la preuve, quand il s'agit de rassembler des phrases vraies, en passant de l'une à l'autre par des pas de déduction élémentaires jusqu'à la conclusion. Il en est de même pour les aspects syntaxique et sémantique : le passage d'une phrase à sa négation doit se faire parfois de manière purement syntaxique, parce que la sémantique de la phrase est complexe, c'est le cas par exemple des emboîtements successifs de quantificateurs (quel que soit, il existe).

En fait, la récurrence met en jeu de manière imbriquée les points de vue déductif et inductif. Prenons un schéma classique de raisonnement par récurrence : il s'agit d'étudier si une propriété dépendant d'un entier n, notons-la $P(n)$, est vraie ou fausse, sans préjuger de sa véracité[2]. Souvent, la résolution de la question pour quelques valeurs de n permet de faire une conjecture. Le cas qui nous intéresse ici est celui où la conjecture « $P(n)$ est vraie pour tout n à partir d'un certain rang r » relève d'une généralisation à partir de l'étude de quelques cas particuliers. Pour étudier cette conjecture et tenter de la prouver, la technique dite de « preuve par récurrence » va consister à établir l'hérédité de la propriété, puis une valeur r à partir de laquelle on a à la fois l'hérédité et $P(r)$ vraie. L'hérédité s'écrit : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, et sera établie la plupart du temps par un raisonnement déductif « direct ». Il reste à trouver le « rang initial » r, sans lequel rien n'est prouvé !

II.3. Le principe de récurrence dans des manuels de fin de lycée

Une écriture unique

Le principe de récurrence est donné sous une forme unique, les variantes de son écriture se situent sur le nombre d'étapes (2, 3 ou 4) de l'algorithme. Les deux étapes communes à toutes ces écritures sont l'initialisation et l'hérédité, toujours présentées **dans cet ordre**. Les variantes des nombres d'étapes sont dans l'explicitation, à l'intérieur du « principe », de la propriété étudiée et/ou de la conclusion. Illustrons cela par quelques exemples.

Exemple 1. *(Maths spécialité Term ES Bordas, Fractale, 1994).*

Soit P_n une propriété dépendant d'un nombre entier n. Pour démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$, procédez en trois étapes :
1° Initialisation : démontrer que P_0 est vraie
2° Hérédité : démontrez que, **s'il existe** un nombre entier n pour lequel la propriété P_n est vraie, alors la propriété P_{n+1} est aussi vraie
3° Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété P_n est vraie.

On notera que l'écriture de la propriété est celle d'une suite (P_n), l'initialisation est 0, et surtout que le quantificateur est erroné dans l'étape 2 (ci-dessus en gras, c'est moi qui souligne). L'étape 3 est plutôt une conséquence du principe de récurrence.

2 En fait, dans les pratiques de classe et les manuels, trop souvent, $P(n)$ est affirmée comme vraie et on demande seulement d'écrire la démonstration par récurrence de sa véracité. La conjecture est déjà donnée et s'appelle « hypothèse de récurrence ».

Exemple 2. *(Maths-Term.D analyse-géométrie Belin, activités préparatoire -cours - « principe de récurrence »)*

Quatre étapes sont nécessaires pour montrer qu'une propriété P(n) est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.
1ère étape : mise en évidence de la propriété P(n)
2ème étape : vérification que P(n_0) est vraie
3ème étape : on suppose que, pour un entier k quelconque supérieur à n_0, P(k) est vraie et on montre qu'alors P(k+1) est vraie
4ème étape : on applique le principe de récurrence et on conclut.

Les étapes 1 et 4 sont extérieures au principe de récurrence. La formulation de la 3^e étape pose deux questions : elle ne met pas clairement en évidence l'implication, or c'est elle dont on cherche à prouver la vérité ; de plus, elle nécessite de différencier l'expression « pour un k quelconque » de l'expression « quel que soit k », si l'on ne veut pas risquer que ceci soit interprété comme : « on suppose que P(k) est vraie quel que soit k … et alors on démontre que P(n) est vraie quel que soit n » !

L'article « récurrence » du dictionnaire Logos, Bordas 1982, cumule à notre avis toutes les maladresses courantes des écritures du principe.

raisonnement (démonstration) par récurrence. [...]
1. en démontrant que l'assertion est vraie pour un entier particulier a ;
2. en admettant que l'assertion est vraie pour un entier n ;
3. en démontrant alors que l'assertion est vraie pour l'entier suivant (n+1) ;
4. en concluant que l'assertion est vraie pour tous les entiers naturels à partir de a.

Enfin, la récurrence est explicitement déclarée comme « particulière » dans la plupart des manuels étudiés. Sa légitimité comme procédé de preuve est même discutée – il est dit parfois que la validité d'un tel raisonnement se ferait a posteriori, au vu des résultats obtenus ! De plus, dans les manuels de Terminale, la structure du chapitre concernant la récurrence est souvent en rupture avec celle de tous les autres, et ce choix est justifié par des discours de présentation et des avertissements. Certains manuels reproduisent même des extraits de l'ouvrage de Poincaré (1902) relatifs aux doutes « logiques et philosophiques » posés par la récurrence, comme un avertissement aux élèves d'une difficulté intrinsèque à ce principe.

II.4. La récurrence dans deux manuels récents d'université

Nous avons cherché à savoir comment la récurrence est présentée aux étudiants des deux premières années de filières scientifiques à l'université, dans deux collections volumineuses très récentes, éditées à l'occasion de la nouvelle organisation des études universitaires en LMD (Licence – Master – Doctorat). La récurrence étant considérée comme déjà vue en terminale scientifique, il s'agit clairement de « rappels » qui ne prennent que très peu de place dans ces deux ouvrages. Cependant, ceux-ci sont très différents sur les choix faits pour la formalisation du principe, son utilisation et ses justifications. [3]

3 Tous ces extraits sont reproduits tels quels, sans ajouts ni supressions, y compris typographie et ponctuation

Exemple 3. *Collection Vauthier 2006 réforme LMD L1 et L2. Dans le volume de cours, 61.3.4, page 20.*

> 1.3.4 Raisonnement par récurrence
>
> Une propriété qui dépend de l'entier n peut être démontrée à l'aide du raisonnement par récurrence. Par exemple, pour prouver que :
>
> $$P(n): 1+2^3+3^3+...+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2 \quad .$$
>
> On peut utiliser ce type de preuve de la manière suivante :
> on **prouve** que $P(0)$ est vraie ;
> on **suppose** que $P(n)$ est vraie ;
> on **prouve** qu'alors $P(n+1)$ est vraie.
>
> Alors la propriété est vraie pour tous les entiers.

Cette présentation n'est pas correcte, voire inacceptable pour un ouvrage de ce niveau : aucun quantificateur, aucune implication, le rang initial est 0, l'hérédité a disparu, la définition est donnée sur un exemple !
Dans le volume *exercices* de cette collection, les mêmes erreurs sont reproduites.
(ch. 0 Raisonnements mathématiques fondamentaux ; d) raisonnement par récurrence) :

> 1^er^ type : on veut démontrer qu'une proposition qui dépend d'un entier n est vraie pour tout n. On constate qu'elle est vraie pour $n = n_0$, et on suppose qu'elle est vraie au rang p. On la démontre au rang p+1 : elle est alors vraie pour tout entier $n \geq n_0$.
> *2^e^ type : on veut montrer la même chose mais ici après avoir constaté qu'elle est vraie au rang n_0 on la suppose vraie jusqu'au rang p. On la démontre au rang $p+1$: elle est alors vraie pour tout entier $n \geq n_0$.*

Notons en plus, ici l'absence totale de relation entre n_0 et p. L'ouvrage ne dit rien d'autre (sauf erreur de ma part) sur la récurrence, dans les 1174 + 840 pages des deux tomes !

Exemple 4. *Collection Ramis Warusfel, 2007, Dunod, pages 67-68*

Au contraire, dans cet ouvrage, la récurrence est abordée dans un paragraphe qui traite de la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ et des axiomes de caractérisation de $\mathbb{N}$, dans un « théorème de récurrence » donné comme conséquence de ces axiomes. Voici un extrait significatif.

> Voici maintenant un résultat essentiel, il fournit la base logique du mode de raisonnement par récurrence. Le raisonnement par récurrence et le raisonnement par l'absurde sont deux outils très importants en mathématiques.
> Théorème 1 (Théorème de récurrence). Soit n_0 un entier. Pour tout entier $n \geq n_0$, notons P(n) une certaine propriété de l'entier n. On fait les hypothèses suivantes :
> (R1) La propriété P(n_0) est vraie.
> *(R2) Si la propriété P(n) est vraie pour un certain $n \geq n_0$, la propriété P(n+1) l'est aussi.*
> *Sous ces hypothèses, la propriété P(n) est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.*

Ce théorème est démontré par l'absurde. L'écriture est correcte pour le n_0, l'implication « si, alors » est visible (même s'il n'y a pas le « alors »). Cependant, le quantificateur de l'hérédité est encore une fois évité, remplacé par « un certain n ».
En fait, l'hérédité qui s'écrit « Quel que soit n, $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ vraie » n'est JAMAIS explicitée sous cette forme dans les manuels que nous avons consultés.

III. Conceptions d'étudiants et d'enseignants français

Les résultats didactiques ci-après proviennent d'analyses de réponses à des questionnaires et des résolutions de problèmes, proposés pendant de nombreuses années à des étudiants de Licence et de master, et à des enseignants lors de formations assurées par moi-même. Il s'agit donc de données empiriques, cependant relevées de manière identique chaque année. Dans ce qui suit, le lecteur fera facilement les liens – de cause à effet – avec ce que nous avons relevé dans les manuels. Nous noterons TA les « théorèmes-en-acte » relevés.

TA1. La récurrence est un principe, pas un concept !

Le concept de récurrence stricto sensu est absent des conceptions. Si l'on demande à des étudiants de définir la récurrence, les réponses vont décrire la « technique », le « principe » ou le « raisonnement » par récurrence.

TA2. La récurrence ne construit pas d'objets mathématiques !

> « Une preuve par récurrence ne construit rien puisque la propriété P à prouver est donnée comme vraie au départ. »

Cette affirmation répandue chez les étudiants est mise en opposition avec le schéma $A \Rightarrow B$ décrivant un théorème où, pour progresser de A vers B, il faut introduire des propriétés, définitions, données, etc., alors qu'on « passe » de $P(n)$ à $P(n+1)$ essentiellement par des calculs et la fameuse « hypothèse de récurrence », qui peut être faite indifféremment au rang n ou au rang n-1 – si on décide d'examiner le passage de $P(n-1)$ à $P(n)$. Ce théorème-en-acte est une conséquence d'un choix didactique résistant et répandu : l'utilisation quasi-exclusive du principe de récurrence pour établir des propriétés déjà données ou évidentes, et où $P(n)$ est une fonction algébrique de n (on ne reconstruit alors que $\mathbb{N}$ lui-même !). De plus, si on se restreint à l'étude des propriétés de type $P(n)$, la forme « ascendante » est suffisante dans tous les cas.

TA3. La récurrence comme une tautologie !

On trouve de nombreuses écritures de l'hérédité telles que l'énoncé devient une tautologie. Exemple de ce que donne un étudiant (de Master 1 de mathématiques) :

> 1. On montre tout d'abord que P_0 est vraie.
> 2. On suppose ensuite que P_{n-1} est vraie pour un n quelconque.
> 3. On montre grâce à cette supposition que P_n est vraie. » [...]
>
> Puisque à l'étape 2, on suppose que P_{n-1} est vraie pour un n quelconque, alors c'est « normal » de trouver que P_n est vraie pour tout n ; on n'a donc rien démontré.

TA4. L'initialisation comme étape première obligatoire !

Dans les réponses des étudiants, les écritures du principe de récurrence débutent **toutes** par l'initialisation n_0 (je n'ai jamais rencontré de contre-exemple) et il est affirmé que c'est nécessaire de commencer par cette étape-là. Mais d'où vient donc le rang initial ? Il est de deux types : « c'est en général 0 ou 1 », ou « Il est donné dans l'énoncé ». Placer la recherche du rang initial avant l'étude de l'hérédité a une conséquence évidente : n_0 est souvent choisi en essayant « au hasard » des valeurs : 0, 1, 2 (plusieurs, « pour être sûr » !), à moins qu'il ne soit donné par l'énoncé du problème. Or, il existe bien sûr des cas où la propriété P peut être vraie pour les premières valeurs de *n*, puis fausse, puis de nouveau vraie.

TA5. Le rang initial est la valeur de n à partir de laquelle l'hérédité est vraie !

En fait, la recherche de l'hérédité aboutit à un nombre, notons-le *p*, à partir duquel l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie. C'est ce nombre *p* qui est candidat à être le rang initial cherché, mais ce n'est pas toujours le « bon » ($P(p)$ peut être faux). D'autre part, une propriété $P(n)$ peut être héréditaire à partir d'un certain rang ... et jamais vraie. Nous en étudions un exemple ci-après.

Les problèmes rencontrés dans l'enseignement privilégient la question : « Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq n_0$ (donné), $P(n)$ est vraie ». Ceci entraîne en particulier, dans une conception causale de l'implication (Deloustal-Jorrand 2004), une règle-en-acte fausse : si P est héréditaire à partir d'un n_0 et que $P(n_0)$ est fausse, alors P est fausse à partie de n_0 (cf l'exemple au § IV).

TA6. Comment reconnaît-on une preuve par récurrence ?

Notre questionnaire comporte le problème suivant.

> Soit le Théorème : $\sqrt{3}$ est irrationnel. Voici une preuve. Supposons que $\sqrt{3}$ soit rationnel. Soit *a* le plus petit entier positif tel qu'il existe *b* entier positif vérifiant $a/b = \sqrt{3}$. On a donc : $3b^2 = a^2$. Ceci implique que 3 divise a^2 ; *a* et *b* étant des entiers et 3 un nombre qui n'est pas un carré d'entiers, 3 divise *a* et donc, 3^2 divise $a^2 = 3b^2$. Il s'ensuit que 3 divise $3b^2$, donc 3 divise *b*. Ainsi, 3 divise à la fois *a* et *b* et *a* n'est pas le plus petit entier vérifiant $a/b = \sqrt{3}$. On a donc une contradiction. Donc $\sqrt{3}$ est irrationnel.
>
> *Question* : Cette preuve a-t-elle un rapport avec une « preuve par récurrence » ? Justifiez votre réponse.

De fait, le fondement de la preuve, qui est l'axiome de récurrence « Il n'existe pas de suite de nombres strictement décroissante dans $\mathbb{N}$ », est caché entièrement par l'hypothèse que a / b est irréductible, écrite ici volontairement sous la forme « soit a *le plus petit entier* tel que... ». La propriété fondamentale que tout nombre rationnel admet une écriture p/q irréductible se démontre justement en utilisant cet axiome de récurrence. Or, cette propriété n'est jamais explicitée dans l'enseignement, probablement parce que lorsqu'on introduit les fractions, on considère qu'il est trop « tôt » pour les élèves de ce niveau, et qu'ensuite on considère que cela va de soi dans les niveaux supérieurs.

On peut aussi énoncer cet axiome de récurrence sous la forme opératoire suivante « Si pour tout n tel que P(n) est vraie, il existe m dans $\mathbb{N}$ tel que $m < n$ et P(m) est vraie, alors pour tout n, P(n) est fausse. »

La très grande majorité des réponses des étudiants peut se décrire ainsi : il n'y a pas de rapport avec une preuve par récurrence, car il n'y a pas de propriété dépendant de n et parce que c'est une preuve par l'absurde. Voici quelques réponses-types qui illustrent cela.

« Ce n'est pas un raisonnement par récurrence puisqu'on n'a pas P(n) $\Rightarrow$ P(n+1) »

« Non, car la récurrence dépend d'un paramètre » ou « ...dépend d'un rang »

« Non, parce qu'on n'a pas le caractère héréditaire »

« Non, parce qu'il n'y a pas d'amorce », « non, il n'y a pas le cas de base »

« Non, on ne voit pas l'hypothèse de récurrence »

« Non, parce que c'est un raisonnement par l'absurde ».

Nous proposerons au § IV une autre formulation de cette preuve qui met en évidence l'axiome de récurrence qui la fonde.

Mais alors, qu'est ce qu'une preuve par récurrence ?

Toutes les réponses correspondent à l'écriture du principe sous la forme « initialisation-hérédité ». Une synthèse des réponses peut se décrire ainsi : C'est une démonstration d'une propriété bien définie, dépendant d'un entier n et pour l'utiliser, on doit avoir une manière de passer de P(n) à P(n+1), essentiellement des suites numériques ou des formules algébriques ou de dénombrement. On doit procéder par étapes : 2, 3 ou 4 étapes, selon les réponses. Mais quel que soit le nombre d'étapes, l'initialisation est toujours située avant l'hérédité. Une étape « zéro » est parfois donnée : écriture de l'hypothèse de récurrence. La conclusion est aussi parfois rajoutée comme étape finale.

Des erreurs d'écriture de l'hérédité

Cependant, le plus remarquable – et le plus problématique – est l'écriture de l'hérédité en DEUX étapes, pas toujours (bien) reliées. En voici un exemple.

C'est une preuve où l'on procède par 3 étapes :

1. On montre tout d'abord que P0 est vraie
2. On suppose ensuite que Pn–1 est vraie pour un n quelconque
3. On montre alors que Pn est vraie

Rmq : Ce raisonnement nécessite que Pn–1 et Pn soient liées.

Outre le fait que le rang initial est 0 (et rien d'autre) et qu'il faut une relation entre Pn–1 et Pn, cette écriture soulève des questions : Quel est ce « n quelconque » pour lequel on suppose que Pn–1 est vraie ? Quelle différence entre « pour un n quelconque » et « quel que soit n » ? Que se passe-t-il si on démontre que [P(n–1) vraie $\Rightarrow$ P(n) vraie] pour des n pour lesquels P(n) est faux ? Quand on pose ces questions, les étudiants ne savent pas répondre ou donnent des réponses fausses. Ils expriment des doutes sur la valeur de ce type de preuve. Voici quelques affirmations fréquentes.

« Ce qu'on montre avec une démonstration par récurrence, c'est seulement qu'on « sait comment faire pour », mais évidemment on ne le fait pas pour chaque cas. »

« Comme on suppose que P(n) est vraie pour un n quelconque, c'est normal qu'on trouve que c'est vrai pour tout n. »

« On ne fait une preuve par récurrence que si on sait que P(n) est vraie. »

« La récurrence est un moyen de trouver une relation qui est en rapport avec les termes d'avant.
Principe : on vérifie la relation pour le 1[er] terme, on suppose vraie au rang n et on calcule au rang n+1.
Définition : moyen mathématique à l'aide duquel on montre des égalités mathématiques. »

« La récurrence n'est pas une méthode de démonstration car on suppose la propriété au rang n quelconque et on calcule au rang n+1 en utilisant la supposition. »

Le doute émis sur la fiabilité d'une preuve par récurrence provient de la confusion entre « P est héréditaire » et « P est vraie », entretenue par l'expression langagière incorrecte de l'hérédité : « On suppose vraie au rang n et on calcule au rang n+1 », où l'implication a disparu et donne à lire que P est supposée vraie pour un n (quelconque). Il s'agit très probablement d'une confusion due à la recherche d'une expression sémantique « simplifiée ».

IV. Problèmes susceptibles d'améliorer les conceptions sur la récurrence

IV.1. Axiome de récurrence

Revenons sur la preuve de la non-rationalité de √3. Pour mieux « voir » que le fondement de cette preuve est l'axiome de récurrence, on peut l'écrire ainsi.

> Supposons que √3 soit rationnel. Soit a et b entiers strictement positifs vérifiant $a/b = \sqrt{3}$. On a donc : $3b^2 = a^2$. Ceci implique que 3 divise a^2 ; a et b étant des entiers et 3 un nombre qui n'est pas un carré d'entiers, 3 divise a et donc, 3^2 divise $a^2 = 3b^2$. Il s'ensuit que 3 divise b. Ainsi, 3 divise à la fois a et b. Il existe donc a' et b' entiers positifs tels que $a'<a$ et $b'<b$ vérifiant $a'/b' = \sqrt{3}$. On peut reproduire ce raisonnement et trouver des entiers positifs a'' et b'' tels que $0<a''<a'<a$ et $0<b''<b<b$ vérifiant $a''/b'' = \sqrt{3}$.

A la question « Comment terminer cette preuve ? », beaucoup d'étudiants répondent qu'on ne peut pas la poursuivre, car l'hypothèse « irréductible » a été oubliée !
De fait, c'est la supposition de l'irréductibilité de a/b qui cache le fondement de cette preuve, c'est-à-dire que la preuve nécessite l'axiome de récurrence. Comme nous l'avons déjà dit, la propriété qu'il existe une écriture irréductible d'une fraction est issue de l'axiome de récurrence. Or, dans ce début de preuve, nous sommes en train de construire deux suites strictement décroissantes d'entiers positifs, ce qui est impossible dans $\mathbb{N}$.

IV. 2. Des problèmes « classiques » un peu modifiés

Exemple 1

Considérons cet exercice que l'on trouve dans de nombreux manuels de lycée :

> **Énoncé 1**. Démontrer par récurrence que la propriété P(n) : « 10^n-1 est divisible par 9 », est vraie pour tout n entier naturel.

L'hérédité se démontre en écrivant, pour une valeur « générique » de n – que l'on peut noter m : $10^{m+1}-1 = (10^m-1).10 + 9$. Ainsi, **si** 10^m-1 est divisible par 9, **alors** $10^{m+1}-1$ est divisible par 9 comme somme de deux nombres divisibles par 9. **Ce raisonnement vaut pour tout *m* entier naturel**. De plus $10^0-1 = 0$ est divisible par 9 (initialisation pour n=0). La propriété est donc démontrée pour tout n.

Modifions l'énoncé 1.

> **Énoncé 2**. Étudier par récurrence la propriété Q(n) : « 10^n+1 est divisible par 9 », définie pour tout n entier naturel.

Pour quelle valeur de n cette propriété est -elle héréditaire ? On reproduit le travail d'écriture et le raisonnement précédent. Pour un m quelconque : $10^{m+1}+1 = (10^m+1).10-9$. Ainsi, si 10^m+1 est divisible par 9, alors $10^{m+1}+1$ est divisible par 9 comme différence de deux nombres divisibles par 9. Ce raisonnement vaut pour tout m entier naturel. Donc quel que soit n, $n \geq 0$, Q(n) $\Rightarrow$ Q(n+1) est vraie. Autrement dit, **la propriété Q(*n*) est héréditaire pour tout *n***. Il faut maintenant étudier l'initialisation. Q(0) est faux, Q(1), Q(2) aussi … finalement, Q(n) n'est jamais vraie, pour aucun n. Et ce n'est pas le principe de récurrence qui permettra de le démontrer, mais une autre preuve utilisant le critère de divisibilité par 9.

Le seul fait d'avoir changé un signe – le « moins » en « plus » – modifie le point de vue épistémologique sur la récurrence. En effet, dans l'énoncé 2, la récurrence sert à étudier une conjecture, et pas seulement à prouver une propriété dont on sait déjà qu'elle est vraie. De plus, dans l'énoncé 2, **Q(*n*) est héréditaire pour tout *n*, mais n'est vérifiée pour aucun *n***, ce qui distingue bien les deux « étapes » du principe : initialisation et hérédité.

Exemple 2

Comme dans l'exemple précédent, étudions ce qu'apporte une modification modeste de l'énoncé 1 ci-dessous (ultra-classique dans les manuels d Terminale S et en L1 sciences).

> **Énoncé 1**. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $P(n)$: $2^n \geq n^2$.
>
> **Énoncé 2**. Étudier par récurrence la propriété $Q(n)$: $2^n \geq (n+1)^2$

Dans l'énoncé 1, l'hérédité de P(n) s'établit pas un raisonnement par conditions suffisantes et un travail algébrique sur les inégalités, qui aboutit à la conclusion que P(n) est héréditaire pour $n \geq 3$. Or P(3) est faux, mais P(4) est vraie. Le principe de récurrence permet donc d'affirmer que P(n) est vraie pour tout $n \geq 4$. On peut ensuite vérifier directement que P(n) est vraie pour n = 0, 1 et 2.

Pour l'étude de Q(n), on vérifie aisément que Q(0) est vraie … mais Q(1) est faux, et Q(2) est faux ! Étudions alors l'hérédité. Après une cuisine mathématique et un raisonnement **par conditions suffisantes** (souvent écrit de manière erronée par les étudiants), on peut obtenir que P est héréditaire dès que $n \geq 2$. En voici les éléments essentiels.

> Pour tout n entier, on a $2^{n+1} = 2^n.2$. Si $2^n \geq (n+1)^2$, alors $2^{n+1} \geq 2\,(n+1)^2$; et pour que $2^{n+1} \geq (n+2)^2$, il **suffit que** $2\,(n+1)^2 \geq (n+2)^2$. On obtient ainsi que pour que $2^{n+1} \geq (n+2)^2$, **il suffit que** $n \geq 2$. [4]
> Ce qui établit que, pour tout entier, $n \geq 2$, $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$ est vraie.

On a donc prouvé que Q(n) est héréditaire pour $n \geq 2$. Mais Q(2) est fausse. Que conclure ? Rien de ce qui est donné dans les manuels ne permet de répondre à cette question, que les étudiants déclarent d'ailleurs « mal posée » !! De fait, Q(n) est vraie pour $n = 0$, fausse pour $n = 1, 2, 3, 4$ et 5 et vraie pour $n = 6$. On peut maintenant répondre à la question posée. Q(n) étant héréditaire à partir de $n = 2$ et Q(6) étant vraie, le principe de récurrence permet d'affirmer que Q(n) est vraie pour tout $n \geq 6$ (et par ailleurs pour $n = 0$). Ce qui conduit à penser qu'il peut être intéressant de poser les trois questions suivantes, qui admettent trois réponses distinctes.

> **Énoncé 3.** On considère la propriété définie pour tout entier naturel n, *Q(n)* : $2^n \geq (n+1)^2$.
>
> a) Pour quelles valeurs de n l'implication $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$ est-elle vraie ?
> *(réponse : $n \geq 1$ car Q(1) étant faux, Q(1) $\Rightarrow$ Q(2) est vraie).*
> b) Quel est le n_0 du principe de récurrence ? *(réponse : $n_0 = 6$, et non pas 0).*
> c) Pour quelles valeurs de n la propriété Q(n) est-elle vraie ? *(réponse : $n = 0$ ou $n \geq 6$).*

L'énoncé 3 et les énoncés 2 précédents permettent de mettre en évidence :

- la distinction entre le « rang initial » et les valeurs de n pour lesquelles l'hérédité est vraie, et l'origine de ce « rang initial », souvent issu de l'étude de l'hérédité,
- le principe de récurrence comme outil d'étude de conjectures,
- enfin – et ce n'est pas le moindre intérêt de ces énoncés – l' « hypothèse de récurrence » est une supposition qui peut se révéler fausse par la suite, sans que cela remette en question la conclusion sur l'hérédité de la propriété.

IV.3. La récurrence comme technique ou comme *fondement épistémologique* ?

Considérons les problèmes suivants, classiques dans l'enseignement.

> Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :
> P1. pour tout n, on a $(x^n)' = n\,x^{n-1}$
> P2. Pour tout x positif et tout n entier naturel, $(1+x)^n \geq 1 + nx$
> P3. Pour tout n entier, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7
> P4. Pour tout n entier positif,
> $$1+2+\ldots+n = \frac{(n(n+1))}{2}$$

4 Si l'on veut écrire les deux dernières phrases avec des symboles d'implication, il faut soit « retourner » les phrases, soit utiliser le symbole $\Leftarrow$ (dans un sens non usuel).

Les domaines des propositions P1 et P2 concernent des propriétés locales de fonctions : continuité, dérivabilité, limites, études locales, infiniment petits. Or, la récurrence est étrangère du point de vue épistémologique au domaine de l'analyse, car elle s'applique sur des ensembles bien ordonnés dénombrables.
Les propositions P3 et P4 concernent les nombres entiers naturels, on est donc bien dans un cadre mathématique approprié pour une preuve par récurrence ; même si P3 est en fait liée à une propriété des congruences qui, là encore, n'est pas fondée par une récurrence sur n, mais valable pour tout n de manière indépendante des rangs suivants.

Ceci pose une vraie question didactique, si la majorité des problèmes utilisant la technique de récurrence ne relève pas, du point de vue épistémologique, de l'axiome de récurrence. La récurrence étant liée à cette propriété de dénombrabilité de $\mathbb{N}$, doit donc être développée, au moins dans un premier temps, dans le contexte de l'arithmétique et de la théorie des nombres. Il peut être intéressant de l'utiliser ensuite en Analyse, car cela montre sa puissance comme outil aussi pour construire des objets.

IV.4. Des problèmes où P est une propriété d'un ensemble d'objets de taille *n*

Exemple 1. Pavage d'un polymino carré de taille 2^n avec des triminos en L

Dans Grenier (2008 & 2010), nous décrivons des problèmes de pavages de polyminos par des dominos et triminos, dans lesquels la propriété P(n) n'est pas une fonction algébrique de n et concerne un ensemble (fini) d'objets indicé par n. Dans ces problèmes, on montre l'hérédité d'une propriété de type géométrico-combinatoire et dans l'un des deux, la structure de l'hérédité peut se décrire ainsi – ce qui peut surprendre :

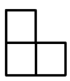
$$P(n) \text{ et } P(n) \text{ et } P(n) \text{ et } P(n) \Rightarrow P(n+1),$$

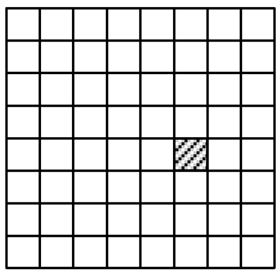
car P(n) est utilisée pour des objets de même taille mais différents.

Reprenons– pour exemple – un de ces problèmes. Auparavant, posons quelques définitions. Un ***polymino*** est un morceau d'un plan quadrillé découpé selon les cases, chaque case étant adjacente à une ou plusieurs autres cases (4 au maximum) par au moins un de ses côtés. Un polymino peut avoir des « trous » (des cases manquantes). La ***taille*** d'un polymino **rectangle** est le nombre de cases de ses côtés. ***L'aire*** d'un polymino **quelconque** est le nombre total de ses cases (une fois les éventuels trous décomptés).

Le problème[5]. Pour quelles valeurs de n et quelles positions du trou (une case), le polymino de taille 2^n est-il pavable par des « triminos en L » ?

Ci-contre, un cas particulier avec $n = 3$
et une position particulière du trou (hachuré).
La taille de ce polymino est donc 8 est son aire est 63.





5 Il existe deux sortes de triminos : le trimino-ligne (3 cases alignées) et le trimino en forme de L (ci-dessus).

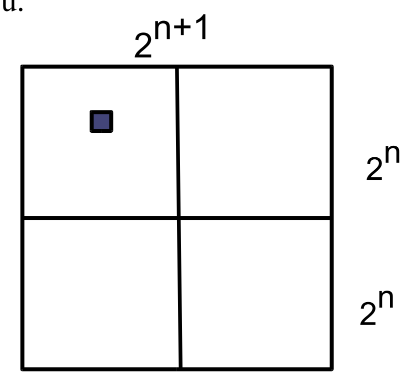
On peut facilement établir qu'une condition nécessaire pour pouvoir paver est que l'aire du polymino soit un multiple de 3. La preuve, évidente, consiste à vérifier que pour tout n, le nombre $2^{2n}-1$ (qui correspond à l'aire du polymino décomptée du trou) est divisible par 3.
Il s'agit maintenant d'étudier si cette condition est suffisante, autrement dit, si tout polymino de taille 2^n est pavable quelle que soit la position du trou. L'étude expérimentale pour des petites valeurs de n (n = 2, 3), pour laquelle du matériel manipulable[6] est nécessaire, conduit à la conjecture suivante :

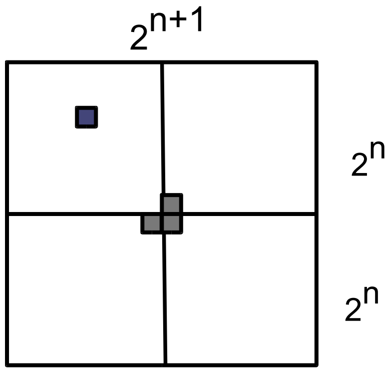
> **Conjecture**. Tout polymino carré de taille 2^n privé d'une case est pavable quelle que soit la position du trou.

La phase expérimentale de la situation conduit généralement à cette conjecture, par un raisonnement inductif. En voici la preuve « par récurrence ». La propriété à prouver, notons-la P(n), concerne un ensemble d'objets, celui des polyminos de taille 2^n privés d'une case. Elle s'écrit :

> P(n) : **quelle que soit la position du trou**, un polymino carré de taille 2^n est pavable par les triminos en L.

Étudions l'hérédité de P(n) : pour quelles valeurs de n a-t-on P(n) $\Rightarrow$ P(n+1) ?
Considérons, pour tout n, un polymino de taille 2^{n+1} avec un trou « quelconque ». On peut le partager en quatre polyminos de taille 2^n, dont l'un contient la case manquante. Les trois autres polyminos de taille 2^n ne sont pas pavables (2^{2n} n'est pas divisible par 3). Mais si l'on pose un trimino comme indiqué ci-dessous, on se retrouve avec quatre polyminos de taille 2^n ayant un trou.





On peut maintenant établir l'hérédité : P(n) $\Rightarrow$ P(n+1). Ici, P(n) a été utilisée quatre fois. On pourrait le formaliser ainsi : P(n) et P(n) et P(n) et P(n) $\Rightarrow$ P(n+1).
On vérifie que l'on peut faire ce raisonnement pour tout $n \geq 0$. L'hérédité est donc établie pour tout entier n. On vérifie ensuite que P(0) est vraie (le polymino correspondant est vide) ou si cela pose question, P(1) est vraie (on se retrouve avec un carré de taille 2 ayant un trou).

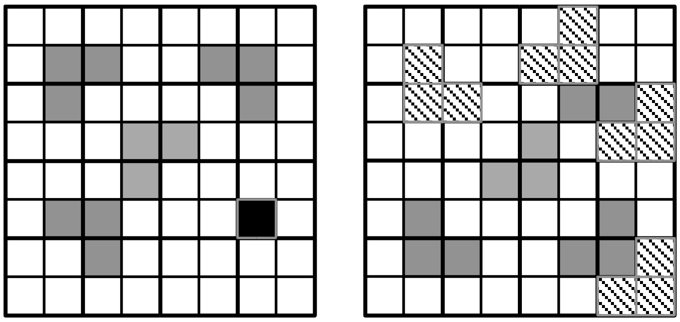
Cette preuve par récurrence met en jeu des aspects de la récurrence non usuels dans l'enseignement. En particulier :

6 Le matériel est constitué de plateaux de taille 4 ou 8, et de triminos en L, en carton ou en bois.

• P(n) est une propriété d'une « classe d'objets de taille n » et non une fonction analytique (algébrique) de n.

• La valeur initiale de la récurrence se déduit naturellement de l'étude de l'hérédité – elle ne sort pas d'un chapeau !

• La récurrence est constructive, en effet la preuve fournit un *algorithme de pavage*, ce qui est intéressant car on a peu de chance d'y arriver si on pave au hasard.



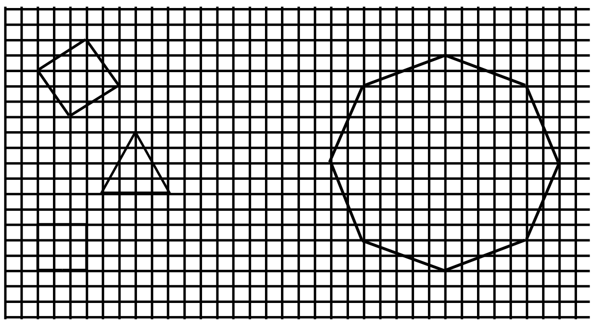
Les premières étapes du pavage.

Il s'agit de placer un trimino dans le « bon » sens au centre de chacun des carrés de taille 2^n, n décroissant jusqu'à obtenir le carré 2×2 ($n = 1$).

Exemple 2. **Une propriété des polygones à sommets entiers**

Voici un très beau résultat de géométrie combinatoire, dont une preuve efficace est basée sur la « descente infinie » de Fermat, preuve qui ne pourrait se ré-écrire sous la forme d'une récurrence ascendante.

> Question. « Pour quelles valeurs de n peut-on construire des n-polygones réguliers dont tous les sommets sont sur une grille carrée régulière ? ».



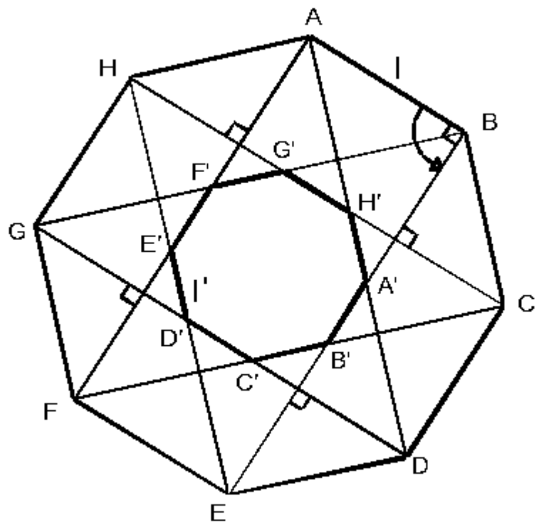
Pour $n = 3$, il est facile de prouver, par des arguments de géométrie euclidienne, qu'il n'existe aucun triangle équilatéral à sommets de coordonnées entières.

Pour $n = 4$, la réponse est évidente, de nombreux carrés sont possibles.

Pour $n = 8$, on démontre la propriété suivante.

Propriété. Il n'existe pas d'octogone régulier dont tous les sommets sont à coordonnées entières.

Preuve. On démontre qu'à partir de tout octogone régulier O à sommets de coordonnées entières et d'aire (entière) n, on pourrait construire un octogone régulier O' à sommets de coordonnées entières et d'aire $m < n$. Ceci reviendrait à construire une suite strictement décroissante d'entiers naturels, ce qui est impossible.
La construction de O' se fait de la manière illustrée ci-après : A' est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\pi/2$, B' est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\pi/2$, etc. Il est facile de prouver que si l'octogone initial est régulier, l'octogone ainsi construit est lui aussi régulier. De plus, si O est à coordonnées entières, alors par construction O' l'est aussi.



La construction précédente, qui donne un octogone d'aire strictement plus petite, est bien sûr impossible « à l'infini », l'aire étant un nombre entier naturel. Cette preuve est une illustration, dans le domaine géométrique, du principe de Fermat.
D'autre part, on voit bien ici qu'il est impossible de transformer la preuve en une preuve par récurrence « ascendante ». Car que signifierait « passer de P(n) à P(n+1) » ?

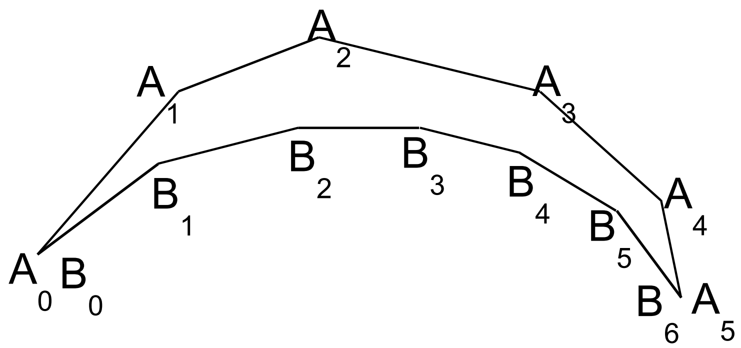
Exemple 3. Une propriété des lignes polygonales convexes

Propriété. « Toute ligne polygonale située à l'intérieur de l'enveloppe convexe d'une ligne polygonale convexe donnée et de mêmes extrémités est de longueur plus petite ».

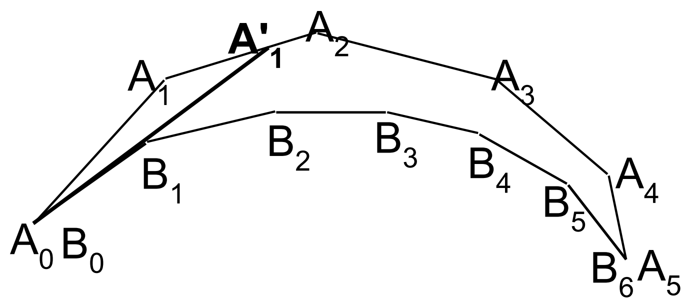
Si l'on cherche à établir un preuve « géométrique » de cette propriété, on se trouve vite embarqué dans des constructions annexes complexes. La preuve par récurrence est ici d'une étonnante efficacité.

En nommant *A0, A1, ... An,* les sommets de la ligne polygonale convexe donnée, et *B0, B1, ..., Bm,* ceux d'une ligne polygonale convexe quelconque à l'intérieur de l'enveloppe convexe de la première, et telles que *A0 = B0* et *An = Bm* , la propriété se traduit par :

l (B0 B1 ... Bm) $\leq$ *l (A0 A1 ... An)* (illustrée ci-après pour n=5 et m=6).



La preuve s'établit par récurrence sur le nombre de segments de la ligne polygonale B. « Ligne polygonale convexe » y sera abrévié par LPC. On prolonge *B0B1* jusqu'à l'intersection de la ligne A en *A'i* , situé entre deux sommets successifs *Ai* et *Ai+1. B0 B1 A'i* est un segment de droite intérieur à la LPC *A0 A1 ... A'i.* Et *B1 B2 ... Bm* est une LPC de *m* segments, intérieure à la LPC *B1 A'i Ai+1 ... An.*



Hérédité : « si *l (B0 B1 A'i)* $\leq$ *l (A0 A1 ... A'i)* et si *l (B1 B2 ...Bm)* $\leq$ *l (B1 A'i Ai+1 ... An),* alors *l (B0 B1 ... Bm)* $\leq$ *l (A0 A1 ... An).*
La structure de l'hérédité ici peut se décrire ainsi :
« Si P(m) et P(p), $m < n$ et $p < n$, alors P(n) ». Le rang initial est obtenu par l'inégalité triangulaire.

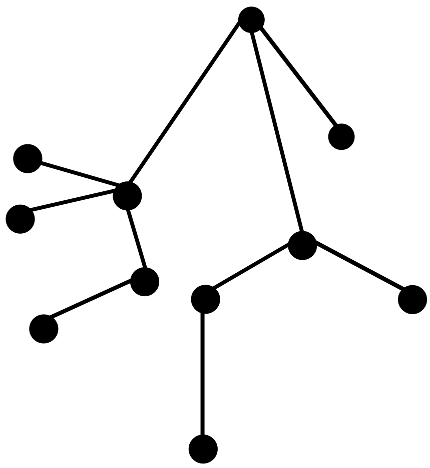
*Exemple 4***. Et … pour le plaisir, l'arbre, un objet inductif par excellence**

L'arbre est un outil graphique usuel dès le collège. On s'en sert aussi bien pour représenter les priorités des opérations dans une suite de calculs ou un algorithme que pour « modéliser » des situations de tirage en statistiques.
Cependant, la définition de l'objet arbre reste en général implicite – un arbre est un graphe (ensemble de sommets et d'arêtes) sans cycle et connexe (c'est-à-dire en un seul morceau).

Mais l'arbre est aussi un objet « inductif » par excellence : si on le « suspend » par un sommet, n'importe lequel, on peut définir un ordre (non total) sur tous les sommets. Il y aura des éléments minimaux – les derniers sommets des chaînes ainsi induites.

Il existe plusieurs définitions de l'arbre, qui montrent différents aspects constructifs et dynamiques de l'induction, sous des points de vue particuliers. Elles ont été étudiées dans la thèse de C. Ouvrier-Buffet (2003). Les voici.

Précisons d'abord qu'un *sommet isolé* est un sommet sans arête, un *sommet pendant* est un sommet qui n'est adjacent qu'à un seul autre sommet, et une *forêt, un* ensemble d'arbres disjoints.



Définition 1. Un arbre est soit un sommet isolé, soit un arbre auquel on ajoute un sommet pendant.

Définition 2. Un arbre est soit un sommet isolé, soit un graphe qui, privé d'un sommet pendant est soit un arbre, soit un sommet isolé.

Définition 3. Un arbre est soit un sommet isolé, soit le graphe obtenu à partir d'une forêt en reliant un nouveau sommet à un sommet de chacun des arbres de la forêt.

Travailler sur ces définitions peut permettre de comprendre des aspects de l'induction qui sont rarement présents dans l'enseignement. C'est aussi une occasion d'explorer un objet – le graphe – souvent considéré comme allant de soi mais rarement étudié comme objet, alors qu'il est présent partout dans les schémas comme outil de représentation ou de résolution.

Conclusion

Nous avons donné ici un état des lieux de l'enseignement et des connaissances d'étudiants de mathématiques sur le concept de récurrence. Nous avons montré que les conceptions construites par les choix didactiques usuels sont très partielles et assez éloignées du concept mathématique, et suggéré quelques pistes pour modifier ces conceptions. Nous souhaitons que les résultats de cette étude et les problèmes proposés dans ce texte soient repris, parce qu'ils permettront de développer une connaissance plus idoine du concept de récurrence.

Références

DELOUSTAL-JORRAND V. (2004) *Etude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique. Thèse* de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

FABERT C. (2010) L*e nouveau programme de logique de seconde.* Mémoire de master de Didactique des maths, Université Joseph Fourier Grenoble, en ligne : charlotte.fabert.free.fr.

FABERT C. & GRENIER D. (2011) Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique. *Petit x,* n°87, pp. 31-52, Irem de Grenoble.

GRENIER D. (2010) Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Paris, 2009.

GRENIER D. (2008) Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique. *Actes du colloque AMQ*, Sherbrooke, Québec, juin 2006.

GRENIER D. (2003) The concept of « induction » in mathematics*, Mediterranean Journal For Research in Mathematics Education*, vol. 3. ed. Gagatsis ; Nicosia Cyprus.

GRENIER D. (2001) Learning proof and modeling. Inventory of fixtures and new problems. *Proceedings of the 9th International Congress for Mathematics Education*, Tokyo, Août 2000.

GRENIER D. & Payan C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 18.1, pp. 59-100, La Pensée Sauvage, Grenoble.

OUVRIER-BUFFET C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

POINCARÉ H. (1902) *La science et l'hypothèse*. Editions Flammarion, Paris.