POINT DE DÉPART

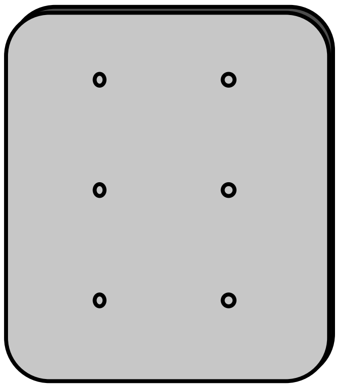
CLOUS ET ÉLASTIQUES[1]

Hélène et Mario ont planté six clous sur une planche comme le montre la figure ci-dessous. Les deux enfants essayent de former des triangles en tendant à chaque fois un élastique sur trois clous.

Mario réussit à former 9 triangles.

Quand Hélène essaie, elle obtient 14 triangles.

Et vous, combien de triangles réussirez-vous à former ?



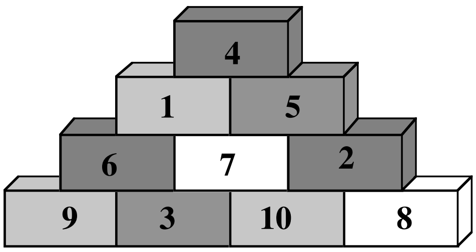
Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

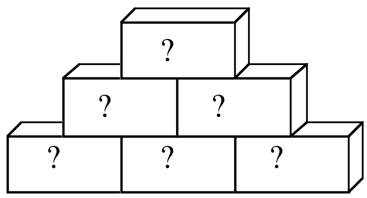
[1] Ce point de départ, comme le suivant, est tiré de la brochure *Ateliers de résolution de problèmes avec matériel* du Rallye mathématique Transalpin (RMT), http://www.armtint.org/

Grand N n° 88, 2011, pp. 7-13

POINT DE DÉPART

L'ESCALIER DES DIFFÉRENCES





L'escalier de gauche, de quatre étages, est construit ainsi :

Règle 1 : Chaque brique porte un nombre naturel qui est la différence des nombres des deux briques sur lesquelles elle repose.

Règle 2 : Tous les nombres de l'escalier sont différents.

Avec les mêmes règles, construisez des escaliers de trois étages, (comme celui de droite) en utilisant les nombres de 1 à 6.

Combien en trouverez-vous de différents ?

Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

Clous et élastiques, l'escalier des différences : premières réflexions

(par François Jaquet, avec la participation de Roland Charnay)

CLOUS ET ÉLASTIQUES

Il est évident que ce point de départ, qui peut être proposé dès le CE2, est conçu avec un matériel permettant de « tendre des élastiques sur des clous » comme l'indique la consigne (trois ou quatre ensembles de 6 clous, sur une ou plusieurs planchettes sont nécessaires). Les contenus mathématiques relèvent de la géométrie (reconnaissance de triangles, alignements de points), mais aussi de la logique et de la combinatoire (dénombrement systématique).

En quoi consiste le travail de l'élève ?

- L'élève doit d'abord comprendre qu'un triangle est déterminé par trois clous non alignés. Il faut donc admettre que, du point de vue de la définition de la figure géométrique, un élastique tendu sur deux clous situés aux extrémités d'un alignement de trois clous (à gauche ou à droite sur la figure) forme une figure assimilable à un segment de droite, même si le clou du milieu touche l'élastique ou peut y faire apparaître un renflement (une bosse) pour des raisons physiques dues à son épaisseur. De même, il faut admettre qu'un élastique tendu sur deux extrémités d'un alignement de trois clous et sur un quatrième clou (hors de l'alignement précédent) forme un triangle et que le clou du milieu de l'alignement n'intervient pas dans la figure géométrique correspondante.

- Il doit ensuite comprendre qu'il y aura plusieurs triangles égaux (isométriques) qui devront toutefois être tous comptés (par exemple il y a plusieurs (4) « petits » triangles rectangles et plusieurs (4) « grands » triangles rectangles, il y a plusieurs triangles égaux avec un angle obtus, ...). Ce sont les indications « 9 » et « 14 » de l'énoncé qui conduisent à comprendre qu'il s'agit de déterminer tous les triangles qu'on peut former sur les clous.

- Il va rapidement se rendre compte que placer des élastiques sur les clous et dénombrer des triangles est très difficile, voire impossible : il n'y a pas assez de couleurs différentes pour les distinguer tous, la construction devient trop complexe, les élastiques du dessus masquent ceux du dessous, etc.

- Il peut alors utiliser plusieurs planchettes (ou ensembles de six clous) pour répartir les triangles, mais constater que les vérifications d'une planchette à l'autre sont malaisées et que les risques d'oublier des triangles ou de compter le même plusieurs fois sont élevés.

- Comme le nombre d'ensembles de clous (ou de planchettes) n'est pas suffisant ou prendrait trop d'espace, l'élève est donc conduit à regrouper et organiser ses « élastiques disposés en triangles » pour passer des objets à une représentation possible : des triangles dessinés sur un support de papier. L'inventaire par dessins successifs va alors exiger une recherche combinatoire.

Par exemple en épuisant toutes les combinaisons comprenant les deux clous inférieurs (1 à 4 sur la Figure 1 ci-dessous), puis le clou gauche inférieur et le clou du milieu droit (5 à 7), etc.

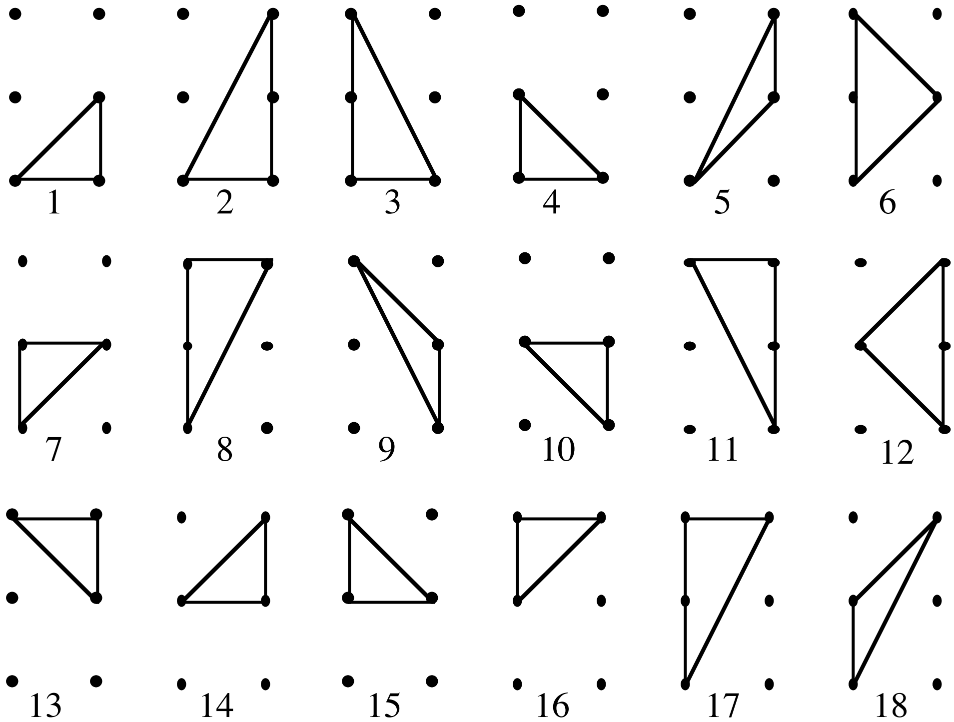


Figure 1

ou en classant les triangles selon leur forme : les 8 « petits » triangles rectangles de la partie inférieure (1 ; 4 ; 7 ; 10) et respectivement de la partie supérieure de la planchette (13 à 16), les quatre triangles rectangles basés sur les deux clous respectivement inférieurs (2 et 3) et supérieurs (11, 17), etc.

- Il peut aussi nommer les clous par des lettres, comme A, B, C, D, E, F (voir Figure 2) et procéder à un inventaire de combinaisons de ces six lettres prises trois à trois, en excluant les deux combinaisons de trois clous alignés : (A ; F ; E) et (B ; C ; D).

(A ; B ; C) serait l'une de ces combinaisons correspondant au triangle 1 de la figure précédente, puis (A ; B ; D) correspondrait au triangle 2, etc.

Remarque : comme l'énoncé ne demande que le nombre de triangles, la solution du problème peut se trouver de manière exclusivement arithmétique à l'aide de la formule donnant le nombre de combinaisons de 6 objets pris 3 à 3, dont on soustrait les deux à exclure, à savoir : $6 \times 5 \times 4 / (1 \times 2 \times 3) - 2 = 20 - 2 = 18$

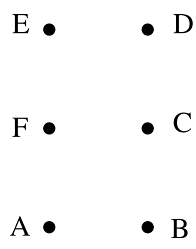


Figure 2

Développements mathématiques

L'analyse de la tâche précédente montre que les contenus géométriques du problème cèdent peu à peu le terrain aux contenus combinatoires : en choisissant des clous non alignés (pas d'alignements de 3 clous ou plus) la recherche des triangles revient à une recherche de combinaisons de *n* objets (les clous), pris 3 à 3.

Indications didactiques

Il y a peu de chances qu'un élève trouve la réponse « 18 » par un simple comptage des triangles. C'est irréalisable sur une seule planchette et, même en utilisant deux ou trois planchettes, il est extrêmement difficile de distinguer les différents triangles. Le matériel est là pour faire prendre conscience à l'élève qu'il faut dépasser le stade de la manipulation pour atteindre celui des figures géométriques (le dessin) puis arriver éventuellement à des représentations plus économiques et efficaces pour un dénombrement.
Un débat avec les élèves peut être organisé pour déboucher sur l'idée qu'une recherche à partir du dessin de triangles sur des planches représentées (avec un dessin par planche) sera plus efficace et permettra un meilleur contrôle. Un travail par groupes peut prolonger l'activité en l'orientant vers le contrôle de l'exhaustivité des solutions, sans doublon. En cas de dessin des triangles, les validations vont faire appel à la reconnaissance des différents triangles selon leurs formes et grandeurs (« petits » ou « grands » triangles rectangles, triangles avec un angle obtus, triangles isocèles, etc.) et à leur description lors des échanges verbaux. En cas de désignation des triangles par des lettres, c'est l'importance des sommets qui va apparaître.
La mise en commun et les validations peuvent donner lieu à quelques phases d'institutionnalisation, au niveau du vocabulaire et de l'expression des propriétés des triangles.
Comme développements, on peut imaginer de nombreuses variantes de l'activité, de constructions géométriques et de dénombrement. Par exemple, la question de savoir si, avec six clous, on pourrait obtenir plus de 18 triangles, va déboucher sur le maximum possible (20) et les conditions pour le réaliser (aucun alignement de trois clous).

L’ESCALIER DES DIFFÉRENCES

L’énoncé parle de « construction », avec des « briques », ce qui sous-entend l’existence d’un matériel de manipulation pour ce point de départ. En effet, il serait fastidieux de dessiner les escaliers et d’y noter et d’y effacer les nombreux essais nécessaires. Les briques sont faciles à réaliser (matériel récupéré, listes de bois à découper, …), il en faut au moins quatre ensemble de 1 à 6 (des rectangles de carton numérotés peuvent aussi faire l’affaire si l’on renonce à la manipulation en trois dimensions).

Ce problème peut être posé dès le CE1. Les contenus mathématiques en jeu concernent la soustraction (différences de nombres de 1 à 6), la logique et le raisonnement (chaînes de déduction pour un inventaire), ainsi que la symétrie.

En quoi consiste le travail de l’élève ?

- Il faut d’abord comprendre la situation : la signification de « différence » de deux nombres (en valeur absolue, en partant toujours du plus grand) et sa relation avec les positions des briques concernées. Puis, engager des premiers essais, souvent au hasard et qui peuvent durer longtemps chez les jeunes enfants de 7 à 9 ans, avec les contrôles correspondants pour vérifier le respect des consignes.
- Les élèves peuvent découvrir de petits « théorèmes locaux », par exemple : *le « 6 » ne peut pas être ailleurs que dans la base*, sous-entendant qu’ils se sont rendu compte que 6 ne peut pas être une différence dans l’ensemble des six premiers nombres naturels ; ou, comme on l’observe souvent : *le « 6 » et le « 3 » ne peuvent pas être placés l’un à côté de l’autre ou l’un sur l’autre* (car le nombre 3 apparaît deux fois dans la relation 6 – 3 = 3), ce qui permet d’écarter systématiquement la brique « 3 » lorsqu’on a en main la brique « 6 », etc.
- Une recherche plus organisée peut alors être envisagée à partir d’un triplet de pièces correctement disposées ; l’une sur deux autres voisines. Par exemple, si la pièce 4 est placée sur les pièces de la base 2 et 6 voisines, on arrive à une impasse en plaçant 1 ou 3 à côté du 6, mais on trouve une solution en plaçant le 5 à côté du 6, ce qui entraîne 1 à côté du 4 et 3 au sommet (voir la quatrième solution ci-dessous).
- Lorsqu’une solution est trouvée, il faut encore se demander s’il y en a d’autres et les découvrir en procédant de manière systématique. Par exemple, on peut rechercher toutes les dispositions où 1, puis 2, puis 3 sont au sommet (le 5 et le 6 étant exclus et le 4 se révélant rapidement impossible lui aussi) ; ou en essayant les différentes positions du « 6 » de ses voisins possibles dans la base, etc.
- Enfin, il est nécessaire de contrôler que les solutions trouvées, sont différentes.

Il y a **4 escaliers** différents, considérés comme des « solides » constitués de six « briques » dont les numéros apparaissent sur les deux faces des escaliers. C’est la réponse à la question posée dans l’énoncé.

1	2	3	3
4 3	5 3	5 2	4 1
6 2 5	6 1 4	1 6 4	2 6 5

Si l’on n’envisage que les figures planes formées de 6 rectangles numérotés, on trouvera 8 solutions en s’interdisant de retourner les figures ou 4 en admettant l’égalité de figures symétriques (ce qui peut conduire à des disputes aussi vaines qu’inutiles si l’on tient compte des écritures asymétriques des chiffres sur les rectangles).

Développements mathématiques

Compléter un « escalier de différence » avec des nombres imposés est un problème qui se révèle fort complexe dès que le nombre d’étages augmente. Il n’y a pas d’autre méthode que les essais successifs et organisés, que l’on confie en général à des machines.

Les escaliers des différences de quatre étages, avec les 10 premiers nombres naturels, comme dans le premier exemple de l’énoncé sont encore abordables à l’école primaire, mais il paraît difficile de trouver toutes les solutions.

Indications didactiques

Dans une variante avec « contrat minimum », les élèves devraient conserver une trace écrite de leur activité avec les solutions trouvées, afin de pouvoir les confronter avec celles de leurs camarades.

Dans une variante plus ambitieuse, on peut envisager des mises en commun pour expliquer les stratégies de recherche et éventuellement se répartir le travail : par exemple, certains cherchent les solutions avec la brique « 1 » au sommet, d’autres avec la brique « 2 », d’autres la « 3 », … Des raisonnements élémentaires permettent d’éviter les recherches avec les briques « 6 » ou « 5 » au sommet, une succession de déductions arrive aussi à exclure la brique « 4 » dans cette position. La construction effective des escaliers permet de dissiper les doutes sur les solutions que certains estiment différentes : si l’on compare les solutions visibles sur chacune des deux faces, on constate qu’elles sont symétriques par rapport à un axe vertical mais qu’elles représentent le même « escalier ».

Il y a plusieurs développements du thème des « escaliers des différences » pour des élèves qui s’y intéressent :

- recherche d’escaliers de trois étages avec des nombres plus grands, pour des calculs de différences moins évidents (par exemple : 4, 8, 17, 21, 25, 29) ;
- recherche des solutions de l’escalier de quatre étages avec les nombres de 1 à 10 ;
- escaliers à compléter avec les nombres de la base donnés (simple exercice de calcul) ou avec quelques nombres des différents étages, qui peuvent mener à des problèmes plus stimulants.

POUR ALLER PLUS LOIN AVEC CES PROBLÈMES

Le lecteur pourra faire part de ses expériences à la rédaction de Grand N (revue.grandn@ujf-grenoble.fr) ou aux animateurs du RMT.