UNE ÉTUDE DIDACTIQUE DE QUELQUES ÉLÉMENTS DE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE ET DE LOGIQUE

Charlotte FABERT
Denise GRENIER
Institut Fourier, Université Joseph Fourier Grenoble

Résumé. Après avoir proposé quelques éléments de réflexion sur les thèmes « notations et raisonnements mathématiques » et « logique » des programmes de lycée qui viennent d'être mis en place (2009 à 2011), nous donnons quelques résultats didactiques sur l'état actuel des connaissances d'élèves de lycée et d'étudiants de début d'université sur ces notions. En particulier, nous identifions certains obstacles dans l'apprentissage des quantificateurs, du rôle de l'exemple et du contre-exemple et de la compréhension de l'implication. Un questionnaire a été proposé à des élèves, de la Seconde aux classes préparatoires. Les résultats montrent que les outils préconisés dans les ressources des programmes risquent de ne pas s'avérer suffisants pour faire entrer les élèves dans la syntaxe et la sémantique du raisonnement mathématique.

Mots clés. Didactique, logique, raisonnement, implication, quantification, contre-exemple.

I. Introduction

Les nouveaux programmes du lycée comprennent un thème transversal intitulé « notations et raisonnement mathématiques » et dans lequel figurent des éléments absents des programmes antérieurs récents, tels les notations de la théorie des ensembles, les quantificateurs, certains connecteurs, les propositions conditionnelles et la négation des propositions. Ces notions constituent une base indispensable pour faire des mathématiques et notamment pour produire des raisonnements et des preuves mathématiques. Logique et raisonnement mathématique ne sont pas des notions nouvelles dans l'enseignement, cependant leur enseignement était précédemment repoussé aux premières années d'université, où elles sont sources de nombreuses erreurs. Elles deviennent donc explicites dans les programmes des trois années de lycée (programmes 2009 à 2011). Citons-en les éléments essentiels.

> Différents types de r*aisonnements et preuves :* inductif ou déductif, implication, contraposée, réciproque, équivalence, absurde, contre-exemple, condition nécessaire, condition suffisante
> Notations et vocabulaire mathématiques, *langage des ensembles*
> Sens en mathématique des conjonctions *et*, *ou* et du mot *un*
> Distinguer la *logique mathématique* de la *logique du « langage courant »*
> *Distinguer implication mathématique et causalité.*

D'autre part, il est demandé de faire travailler les élèves sur l'expression orale, avec des exigences moindres sur les écritures de preuve. On peut donc supposer que le travail de distinction entre le langage courant et le langage mathématique occupera une place importante de ce thème transversal.

Enfin, une consigne forte du programme est de ne pas faire d'exposé sur la logique, de la traiter « naturellement » au fil des chapitres, ou « à l'occasion de questions ou erreurs d'élèves » – tel que dit dans le texte des programmes de seconde.

L'organisation présentée dans le document « ressources » 2nde « Notations et raisonnements mathématiques » du MEN, suggère dans quel chapitre introduire et travailler ces notions, conformément à l'esprit de ce programme. Nous la reproduisons in extenso.

dans le cadre des fonctions
Notions d'ensemble, sous-ensemble, appartenance, inclusion
Explicitation des quantifications
Implications et équivalences
en géométrie
Condition nécessaire, condition suffisante
Appartenance d'un point à une droite
en statistiques et probabilités
Réunion et intersection
Négation
Langage courant et langage mathématique
Langage courant explicite et implicite
Implication mathématique

Ce choix d'organisation didactique, dont on ne peut trouver aucune explication dans les documents officiels, amène des remarques et pose quelques questions.
Toutes ces notions ne sont pas de complexité analogue ; il est dommage qu'il n'y ait pas d'avertissement précisant que, par exemple, il sera probablement plus facile de définir le « ou » mathématique relativement au « ou » du langage courant, que de faire « distinguer implication mathématique et causalité ».

Il y a les notions derrière les « notations » ensemblistes. Sur quels types d'ensembles faire travailler l'inclusion, le complémentaire, les quantifications (universelle, existentielle), le contre-exemple ? Le choix du thème « fonction » est-il le plus pertinent ? De plus, « montrer » sur un schéma ce qu'est l'intersection ou l'union de deux ensembles sans en donner aucune propriété (comment fait-on l'intersection ou l'union de trois ensembles ?) restreint beaucoup leur utilisation. Il n'est jamais dit que ces opérateurs binaires sont associatifs et commutatifs, ces implicites sont-ils considérés comme allant de soi ? De même, l'inclusion est-elle à prendre au sens large (inclus ou égal), ou encore qu'est-ce que l'ensemble vide ?

Aborder les notions de « condition nécessaire » et « condition suffisante » en géométrie, domaine des mathématiques où il y a beaucoup d'équivalences, est-il le meilleur lieu pour apprendre à les distinguer (de manière non artificielle) ?
Enfin, il nous semble qu'il est toujours difficile pour un élève d'aborder deux notions complexes dans le même temps, ce qui risque d'être le cas par exemple, dans l'introduction des quantifications en même temps que le travail sur les fonctions, ou encore dans le travail de distinction entre condition nécessaire et condition suffisante en même temps que des propriétés géométriques. Introduire ces connaissances sans faire de cours donne une importance primordiale au choix des problèmes, puisque ceux-ci seront les appuis essentiels pour les élèves de leur compréhension des notions introduites.
Il serait donc pertinent de choisir des problèmes où les enjeux d'apprentissage sont clairement sur les notions de logique et du raisonnement, s'appuyant sur des notions mathématiques stabilisées ou à consolider, mais non nouvelles : mais ceci nécessite de faire un pas de côté par rapport aux chapitres.

D'autres questions se posent. Quels aspects de la logique mathématique peuvent être accessibles à des élèves de lycée ? Comment justifier la négation d'une proposition conditionnelle – qui nécessite la traduction de l'implication avec et, ou, non – sans faire de « cours » ? Quels problèmes vont permettre de travailler la distinction entre implication mathématique et causalité ? Notons que cette distinction passe par la compréhension de l'implication lorsque la prémisse est fausse, ce qui relève de la logique des propositions basée sur le tiers exclu et la vérifonctionnalité (ces notions sont définies au paragraphe II).
Finalement, ce programme est-il réalisable et comment ? Et de quelle logique s'agit-il ?

II. Quelques éléments théoriques de logique

Commençons par faire le point sur les éléments théoriques relevant du domaine de la logique et qui sont concernés par le programme de lycée, explicitement ou implicitement – il y a en effet des objectifs du programme nécessitant des éléments théoriques qui ne sont pas évoqués.

II.1 Le « si … alors » en logique du « langage courant » et en logique mathématique

On peut avoir une « bonne » logique naturelle, proche de la logique mathématique mais plus généralement, nous parlerons du registre de la logique du langage courant conformément aux expressions utilisées dans les programmes et les documents d'accompagnement. Le « si .. alors » y est souvent interprété (entendu) comme une équivalence, ou confondu avec sa réciproque.

De plus, l'implication y a des ***caractéristiques causale et temporelle***, qui ne sont pas compatibles avec l'implication mathématique. Autrement dit :

> $A \Rightarrow B$ n'a de sens, dans la logique commune, que si A est *avan*t B et que si A est une *cause* de B.

D'où une difficulté répandue chez les élèves et les étudiants en Sciences pour reconnaître qu'en mathématique, la proposition conditionnelle « $A \Rightarrow B$ vraie » équivaut à « B est une condition nécessaire pour A », ou encore que « A n'est réalisé que si B est réalisé ».

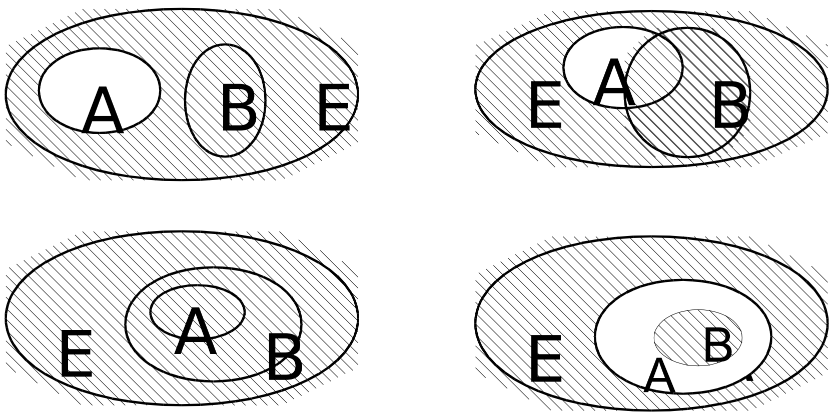
Précisons cela sur un exemple assez classique.
Une mère dit à son enfant : « Si tu manges ta soupe, tu auras un dessert ». Quel sens la mère veut-elle donner à cette phrase, et quel sens l'enfant donne-t-il à cette phrase ? Probablement le même, ici la logique naturelle fonctionnera bien entre eux : manger sa soupe est une condition qui paraît nécessaire pour avoir un dessert. Cette interprétation n'est pas conforme à celle de l'implication mathématique, puisqu'il s'agit de l'implication réciproque de la proposition conditionnelle donnée. De plus, cette phrase contient une *temporalité* (manger la soupe *vient avant* de manger le dessert) et une *causalité* (avoir un dessert est une conséquence d'avoir mangé la soupe) qui peut créer des non-sens dans un travail plus formel. Par exemple, ici, la contraposée (« Si tu n'as pas de dessert, alors tu ne manges pas ta soupe ») n'a pas grand sens ici ! Il n'est donc pas sûr que, sur de tels exemples, on puisse faire « distinguer la *logique mathématique* de la *logique du « langage courant ».* D'une manière plus générale, de tels exemples de la vie courante ne permettent pas d'aller très loin dans le travail sur l'implication mathématique.

Prenons un autre exemple, plus « mathématique », où la logique naturelle se confronte à la logique mathématique. On affirme que « 5 est un nombre pair $\Rightarrow$ 3 est un nombre pair » est vraie. Les réactions fréquentes d'étudiants vont de « ça n'a aucun intérêt », « aucun sens » à : « on est d'accord à condition de redéfinir pair et impair ». Ici, on ne peut se convaincre sans connaître et accepter les règles de la logique des propositions, dont le représentant de base est la « table de vérité ». Or, celle-ci n'est pas prévue au programme.

II.2 Définition ensembliste de l'implication

Le registre ensembliste est pertinent pour travailler les quantifications et le contre-exemple. En fait, quand on quantifie une variable libre, on est en général implicitement dans un ensemble.

Soit E un ensemble d'objets, A le sous-ensemble des éléments x de E qui vérifient une propriété A, B le sous-ensemble des éléments x de E qui vérifient une propriété B.
Le sous-ensemble de tous les éléments x de E pour lesquels ($A(x) \Rightarrow B(x)$) est vraie est représenté ci-après (parties hachurées), dans tous les cas possibles de positions respectives de A et B. Elles correspondent au sous-ensemble des éléments x pour lesquels A(x) et B(x) sont vraies toutes les deux auquel on ajoute le sous-ensemble des x pour lequel A(x) est faux.



Une justification convaincante de ces réponses est l'équivalence suivante :

$$(\forall x,\ A(x) \Rightarrow B(x)\ ) \Rightarrow (\forall x,\ \text{non } A(x) \text{ ou } B(x)\ ),$$

qui s'interprète bien en termes de sous-ensembles A ⇒ B, après avoir bien sûr défini l'union de deux ensembles et le complémentaire d'un ensemble (ces deux notions sont prévues au programme).
Sans cette équivalence, comment comprendre pourquoi on hachure le complémentaire de A ?

II.3 Logique formelle (classique)

Le programme s'appuie sur des conventions de la logique classique des propositions qu'il n'est pas prévu d'expliciter au lycée, bien qu'elles soient fondamentales.

Bivalence des propositions

Une proposition a exactement deux valeurs de vérité : Vrai ou Faux.

Principe du tiers exclu

Une proposition est soit vraie soit fausse, jamais les deux en même temps.

Vérifonctionnalité

La valeur de vérité d'une phrase ne dépend que des valeurs de vérité des propositions en jeu et de la définition des connecteurs qui les relient.

Ce qui entraîne qu'une proposition conditionnelle de type A $\Rightarrow$ B peut être vraie sans que A et B ait un lien entre elles, ce qui remet en question le point de vue « causal » de l'implication dans la logique commune.
Un énoncé est ***contingent*** si on n'a pas les moyens de savoir si cet énoncé est vrai ou faux (exemple, la phrase ouverte « $x > 4$ »).
Lorsqu'une phrase dépend de variables, on parle de ***prédicat***. Un prédicat contient des variables libres et des variables liées. Il faut le « calculer » pour qu'on puisse décider s'il est vrai ou faux, ce qui revient à quantifier les variables libres, par des quantifications existentielle ou universelle. Un énoncé contingent peut devenir vrai ou faux selon les quantifications qu'on décide de choisir. Exemple : « Quel que soit x réel, $x > 4$ » est un énoncé faux, « Il existe x réel, $x > 4$ » est un énoncé vrai.

II.4 Logique des propositions

Les bases de la logique des propositions sont données dans la table ci-dessous, qui donne les valeurs de vérité de A $\Rightarrow$ B en fonction de celles de A et de B. Cette table est construite sur les principes du tiers exclu et de la vérifonctionnalité, et ne tient pas compte de l'existence ou non d'une causalité entre A et B. Cependant, la logique naturelle peut permettre de se convaincre des choix faits pour les deux premières lignes de cette table ; et la dernière ligne peut être ramenée à la première ligne en passant par la contraposée. Un raisonnement « naturel » assez simple peut convaincre :

> « Supposons que A $\Rightarrow$ B est vraie, alors si B est faux, nécessairement A est faux, car si A était vraie, B serait vraie ».

A	B	A $\Rightarrow$ B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En revanche, pour la troisième ligne, aucun raisonnement «naturel» ne peut aider à décider. Et la contraposée conduit à la même situation : prémisse (non B) fausse, conséquent (non A) vrai. Deux choix sont possibles a priori : Vrai ou Faux . La logique naturelle est ici prise en défaut. Remarquons que le choix « Faux » ne permettrait pas de distinguer l'implication stricte de l'équivalence. Accepter cette ligne nécessite de se démarquer de la logique naturelle.

II.5 Raisonnement déductif

Le raisonnement déductif (par implication directe ou par contraposée) est une des formes les plus travaillées dans l'enseignement, à l'occasion de tâches de types « démontrer que », « justifier ». Il permet d'établir des résultats (conclusions) à partir de certaines hypothèses par une succession de chaînons élémentaires qui sont le plus souvent des propriétés du cours ou des données du problème. Les règles de logique formelle qui régissent ce raisonnement sont rarement explicitées en classe en raison de la proximité entre raisonnement déductif et logique naturelle. Cependant, ces implicites peuvent empêcher la compréhension d'autres aspects de la logique mathématique (raisonnement inductif, contre-exemple, vérifonctionnalité).

Nous donnons ci-après la formalisation, pour les propositions et les prédicats, du raisonnement par implication directe (modus ponens) et du raisonnement par contraposée (modus tollens).

propositions	*prédicats*
Règle du *modus ponens*	
A vraie	A(a) vraie
Or (A $\Rightarrow$ B) vraie	Or $\forall x$, A(x) $\Rightarrow$ B(x)
Donc B vraie	Donc B(a) vraie
Règle du m*odus tollens*	
A $\Rightarrow$ B vraie	$\forall x$, A(x) $\Rightarrow$ B(x)
Or (Non B) vraie	Or (Non B(a)) vraie
Donc (Non A) vraie	Donc (Non A(a)) vraie

II.6 Les termes *ou, et, un*

Distinguer les sens de ces termes dans le langage courant de ceux du langage mathématique est un objectif des programmes de lycée. Dans le langage courant, comme en mathématique, ***un*** représente aussi bien le chiffre, le nombre, l'article indéfini, un, au moins un, un quelconque, un parmi d'autres, etc. *Tous ces sens existent donc dans les deux registres de langage.*
La conjonction ***ou*** est souvent exclusive dans le langage courant, alors qu'elle ne l'est pas, sauf précision, en mathématique. Il faudrait donc éviter – ce que font certains manuels scolaires – de la présenter comme une « disjonction ».
Le ***et*** et le ***ou*** peuvent relier dans le langage courant deux phrases qui ont entre elles un lien temporel ou causal, ce qui n'est pas (toujours) le cas en mathématiques. Néanmoins, des difficultés liées au changement de registre existent dans l'utilisation de ces connecteurs à l'intérieur même des mathématiques, en particulier dans le cadre de la résolution d'équations. Prenons un exemple concret : x est solution de l'équation (E) $x^2=1$ si et seulement si x=1 OU x=-1 , donc les solutions sont 1 ET -1. Le changement de registre, entre la résolution de l'équation et l'écriture de l'ensemble des solutions de cette équation, est un facteur d'erreurs récurrentes chez les élèves.

II.7 Négation

Négation d'une phrase quantifiée (simple)

La négation de « $\forall x$, A(x) » est « $\exists x$, non (A(x)). La notion de *contre-exemple* trouve ici tout son sens. La négation de « $\exists x$, A(x) » est « $\forall x$, non (A(x)) ». Ces formalisations sont presque nécessaires à la compréhension.

Négation d'une implication

L'écriture de la négation d'une proposition conditionnelle ne va pas de soi. On a :

$$\text{non}(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \text{ et non } B)$$

Un raisonnement « naturel » peut convaincre (en partie) : si A $\Rightarrow$ B est faux, c'est que A n'implique par B, on peut donc avoir A et non B. Cependant, une difficulté récurrente chez les élèves et les étudiants tient au fait que la négation de l'implication A $\Rightarrow$ B ne peut pas s'écrire sous forme d'implication. La justification nécessite de passer par la logique formelle.
Dans le registre ensembliste, la négation de « $\forall x$, $x \in$ A $\Rightarrow x \in$ B » est « $\exists x$, $x \in$ A et $x \notin$B ».
Dans le registre des prédicats, la négation de « $\forall x$, A(x) $\Rightarrow$ B(x) » est « $\exists x$, A(x) et non (B(x) ».

III. Questions didactiques et conceptions d'étudiants

III.1 Comment peut-on traiter le thème « Logique » au lycée ?

- Les solutions proposées dans le document ressources de seconde sont-elles adaptées aux objectifs du programme ?
- Comment les enseignants ont-ils ajusté leur cours face à ces nouvelles exigences ? Quelles sont les principales difficultés qu'ils rencontrent ?
- Dans quels chapitres ces notions ont-elle été traitées et ces choix sont-ils pertinents ? Par exemple, est-ce qu'il y a des contextes plus adaptés que d'autres pour travailler les quantificateurs, les connecteurs logiques ou encore l'implication ?
- Quelles sont les connaissances actuelles des élèves sur ces différents points, quelles sont les difficultés principales qu'ils rencontrent ? Le nouveau programme a-t-il une influence sur la capacité des élèves à raisonner et à produire une preuve ?

Pour répondre à certaines de ces questions, nous avons élaboré, à partir de l'étude de pratiques enseignantes et des éléments disponibles dans le programme et le document ressources, un questionnaire sous forme de problèmes faisant appel à diverses notions de logique. Nous avons soumis ce questionnaire à des élèves de différents cursus ayant suivi ou non ce nouveau programme, afin d'évaluer les bénéfices et limites de ce programme et plus généralement de constater les connaissances des élèves sur ces notions et le cadre dans lequel elles sont fonctionnelles.

Auparavant, nous donnons quelques résultats d'études didactiques déjà menées sur le concept d'implication en particulier Deloustal-Jorrand (2004), Deloustal & Grenier (2001), Durand-Guerrier (2007), Grenier (2008 & 2009).

III.2 Quelques conceptions d'étudiants

Au fil de nos études expérimentales et de nos enseignements, nous avons constaté des difficultés durables dans la compréhension et l'utilisation de l'implication, base du raisonnement déductif. Les étudiants interrogés sont en L1 et L2 sciences (Licence 1 ou 2), en L3 de mathématiques. Voici les constats les plus marquants :

- des confusions fréquentes entre Condition Nécessaire et Condition Suffisante, ces expressions langagières n'étant pas opérationnelles, de l'aveu même de beaucoup d'étudiants, et cela même si la propriété « P est une condition suffisante pour avoir Q » est bien associée à l'implication $P \Rightarrow Q$,

–un rabattement de « P implique Q » sur « P **donc** Q », cette dernière étant une instanciation de l'implication lorsque P est vraie,

- le terme *proposition* recouvre aussi bien des propositions closes que des énoncés contingents ou des phrases ouvertes.

Des connaissances essentielles sont largement absentes chez les étudiants.

- la reconnaissance que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow$ (Q est une condition nécessaire pour P) $\Leftrightarrow$ (P est vraie seulement si Q est vraie)
- l'expression de la négation de $P \Rightarrow Q$ – par exemple sous la forme P et Non Q – et la propriété que la négation d'une implication ne peut s'écrire sous forme d'une implication.

De fait, dans l'enseignement universitaire, l'implication est un outil usuel mais *pas un objet d'étude*, et les relations entre la logique naturelle et la logique mathématique ne sont pas étudiées.

L'écriture ensembliste de l'implication est absente. De plus, lorsqu'on étudie une propriété sur un ensemble d'objets (numériques, géométriques), on a tendance dans l'enseignement à désigner un représentant et non l'ensemble lui-même. Prenons un exemple. On va dire classiquement que « Tout parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle ». En fait, on écrit même le plus souvent « un » au lieu de « tout ». Les ensembles implicites sont celui P des parallélogrammes, celui D des quadrilatères ayant un angle droit et celui R des rectangles, sous-ensembles de l'ensemble Q des quadrilatères. On a $P \cap D=R$, et $R\subset P$.

La logique formelle est absente de l'enseignement. Or certains éléments théoriques de logique sont nécessaires pour savoir calculer des prédicats, nier une implication, utiliser correctement une raisonnement par l'absurde, ou encore comprendre pourquoi la négation d'une implication n'est pas une implication.

On trouve ainsi dans les conceptions des étudiants des affirmations liées à la « logique naturelle », telles que :

La phrase « $A \Rightarrow B$ » n'a pas d'intérêt (n'a pas de sens) lorsque A est fausse.

La phrase « $A \Rightarrow B$ » est fausse lorsque A est fausse.

L'utilisation du raisonnement déductif lorsque la prémisse est fausse fait obstacle à la compréhension de la propriété « $A \Rightarrow B$ est vraie lorsque A est faux ». Ainsi, pour les étudiants, « 3 pair $\Rightarrow$ 4 pair » est fausse pour deux raisons : 3 n'est pas pair et deux entiers consécutifs n'ont pas la même parité. De même « 3 pair $\Rightarrow$ 4 impair » est fausse, mais « elle pourrait être vraie si on redéfinissait les pairs et les impairs » (!)
La conception répandue des étudiants sur l'implication contient une propriété-en-acte de *causalité, que l'on peut exprimer ainsi :* $A \Rightarrow B$ n'a de sens que lorsque A et B ont un lien de cause à effet entre elles ; et une propriété-en-acte de *temporalité :* Dans $A \Rightarrow B$, A est vérifiée avant B.
Une conséquence est que des formulations équivalentes à $A \Rightarrow B$ ne sont pas reconnues, telles que : B est une condition nécessaire pour A, ou A est vraie seulement si B est vraie.
La question « Donnez la négation de la phrase $A \Rightarrow B$ » atteste qu'il y a des difficultés récurrentes, des tentatives (vaines) d'essais de toutes sortes d' implications. Deux causes principales à cet échec : la négation d'une proposition conditionnelle n'est pas une proposition conditionnelle, et les éléments de logique formelle de base qui sont nécessaires pour répondre sont absents de leurs connaissances.

IV. Une étude expérimentale

IV.1 Choix des problèmes

Le questionnaire est constitué de cinq problèmes (cf annexe 1).
Les problèmes 1 et 3 traitent de la notion de *proposition conditionnelle* dans le registre de la logique du langage courant puis dans le cadre mathématique de la résolution d'inéquations.
Les problèmes 2 et 5 portent sur les *quantificateurs* dans le registre de la logique du langage courant puis dans le cadre mathématique de l'étude des variations d'une fonction.
Nous choisissons d'évaluer ces notions dans ces deux cadres pour voir si le changement de cadre modifie ou non les conceptions des élèves sur ces éléments de logique.

Le problème 4 traite des notions d'*implication*, d'*équivalence*, et des *connecteurs logiques «et» et «ou»* dans le cadre mathématique de la résolution d'équation.

	Proposition conditionnelle Implication	Quantificateurs	Connecteurs logiques
Logique du langage courant	Problème 1	Problème 2	
Logique mathématique	Problème 3 (inéquations) Problème 4 (équations)	Problème 5 (variation de fonctions)	Problème 4 (équations)

a) Problèmes 1 et 3

Problème 1. *Répondre aux questions par oui (O), non (N) ou ne peux pas savoir (NPPS).*

Une mère dit à son enfant : « Si tu manges ta soupe alors tu auras un dessert. »
L'enfant aura-t-il un dessert s'il mange sa soupe ?
S'il ne la mange pas ?
Si la mère avait dit : « Tu auras un dessert si tu manges ta soupe »,
vos réponses changeraient-elles ? (Si oui, précisez.)

Il s'agit de reconnaître une implication du type $P \Rightarrow Q$ dans une proposition conditionnelle énoncée en langage courant sous la forme « si P alors Q » (où P serait « l'enfant mange sa soupe » et Q « sa mère lui donne un dessert »), et de ne pas confondre la proposition directe avec sa réciproque (qui prend plus de sens sous la forme équivalente non $P \Rightarrow$ non Q).
L'énoncé est ensuite reformulé sous une forme équivalente « Q si P » pour travailler sur la conception causale-temporelle de l'implication que nous avons évoquée précédemment, qui consiste à ne reconnaître une implication que si la cause est avant la conséquence.
Nous avons choisi cette situation particulière pour attirer l'attention sur l'importance du contexte dans le langage naturel. En effet, nous pouvons penser que, dans la plupart des cas, par ces mots, la mère veut signifier à son enfant qu'il aura un dessert seulement s'il mange sa soupe. Manger sa soupe est une condition nécessaire pour avoir un dessert, et suffisante sous certaines conditions implicites : il va de soi pour l'enfant que s'il fait une bêtise au cours du repas, il n'aura pas le droit à un dessert même s'il a mangé sa soupe ; cependant si aucun événement ne se produit, il obtiendra son dessert. Pourtant la formulation choisie, dans son sens mathématique, signifie que manger sa soupe est une condition suffisante pour avoir un dessert, quoiqu'il arrive jusqu'à la fin du repas. Le contexte de cette situation modifie le sens de la phrase et le rend non conforme à son interprétation en logique mathématique (cf chapitre II).

Problème 3. *Indiquer si les propositions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F) et justifier.*

Propositions	*V/F*	*Justifications*
Si $x^2 > 1$ *alors* $x > 1$		
Si $x < -1$ *alors* $x^2 > 1$		
$x^2 > 1$ *si* $x < -1$		
$x > 1$ *si et seulement si* $x^2 > 1$		

Il s'agit ici d'étudier la véracité d'implications et d'une équivalence et de justifier les réponses. Les connaissances mathématiques mises en jeu dans ce problème sont la résolution d'inéquations de la forme $f(x) < k$ où f est une fonction polynomiale de degré 2 (ici $f(x)=x^2$ et $k=1$). Ces compétences font partie du programme de seconde.

Nous avons choisi une inéquation qui relève du niveau Seconde, pour diminuer l'interférence des difficultés liées aux notions mathématiques avec les questions de logique. Cependant, ce problème nécessite aussi d'utiliser des connaissances sur la fonction carré et de ne pas se restreindre à l'étude dans le cas positif. Ces notions constitueront vraisemblablement un facteur important d'erreur que nous devrons tenter de discerner des erreurs de logique.

Les difficultés principales que présente ce problème, du point de vue de la logique, sont en partie les mêmes que pour le problème 1 : reconnaître une implication dans la formulation « si ... alors ... » et dans la formulation « ... si ... », ne pas confondre cette implication avec la réciproque, et donc avec la formulation « … si et seulement si ... » qui caractérise une équivalence entre deux propositions. S'ajoutent à cela, la reconnaissance du quantificateur universel implicite (pour tout x réel) et le problème de la justification du résultat. Il s'agit de connaître les différents types de justifications correctes pour affirmer ou infirmer de telles propositions. Plus précisément, il s'agit de savoir qu'une proposition avec quantificateur universel, de la forme « tout x dans un certain ensemble E vérifie une propriété P », se justifie uniquement dans un cadre général – des exemples ne suffisent pas – mais qu'un contre-exemple (il existe un x dans E qui ne vérifie pas P) suffit à l'infirmer.

b) Problèmes 2 et 5

> ***Problème 2.*** *On considère l'affirmation "Tous les Voironnais aiment la montagne".*
> *Indiquer si les quatre propositions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F) du point de vue de la logique :*
> *1/ Cette affirmation est vraie, car tous mes amis voironnais aiment la montagne.*
> *2/ Cette affirmation est fausse, car je ne suis pas Voironnais et j'aime la montagne.*
> *3/ Cette affirmation est fausse, car mon ami voironnais n'aime pas la montagne.*
> *4/ Je ne peux rien dire, car je ne connais pas tous les Voironnais.*

Il s'agit donc de dire lesquelles de ces quatre phrases sont correctes du point de vue de la logique. La première difficulté est de reconnaître le quantificateur universel dans l'affirmation initiale, la deuxième, de connaître les différents types de justifications correctes pour affirmer ou infirmer une telle proposition et de reconnaître celles qui ne le sont pas.

Ce problème est susceptible, dans le registre du langage courant, de nous permettre de repérer les élèves qui pensent que des exemples suffisent pour montrer une propriété générale, et ceux qui ne reconnaissent pas le contre-exemple comme un moyen d'infirmer une proposition. Ces deux difficultés ont été soulevées par des enseignants du secondaire interrogés dans le cadre de l'élaboration de ce questionnaire.

Problème 5. *On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur [0,2]. Indiquer si les propositions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F) et justifier.*

x	0		1		2
$f(x)$	-2	↗	1	↘	-5

Il existe un nombre réel de l'intervalle [0,2] dont l'image par f est négative.
Tous les nombres réels de l'intervalle [0,2] ont une image par f négative.
Tous les nombres réels de l'intervalle [0,2] ont une image par f inférieure à 3.

L'étude des images d'une fonction dont on fournit le tableau de variation, fait partie des compétences exigibles en seconde. Il s'agit ici d'étudier la véracité de trois propositions comportant des quantificateurs existentiels et universels et de justifier les réponses. Ce problème confronte également l'élève avec l'utilisation mathématique du mot *un* qui signifie « au moins un », et non pas « exactement un » comme dans le langage courant.
Ce problème a les mêmes ambitions que le problème 2, mais dans un cadre mathématique : évaluer la proportion des élèves de seconde qui pensent qu'un exemple suffit à démontrer une propriété générale et celle des élèves qui maîtrisent l'utilisation du contre-exemple.

Dans ces deux couples de problèmes, il sera intéressant de voir si les réponses changent selon les deux contextes (« naturel » ou mathématique).

c) Problème 4

Problème 4. *a et b désignent deux nombres réels. On donne cinq propositions numérotées de 1 à 5.*
1/ $a^2=b^2$ ***2/*** $a=b$ ***3/*** $a=b$ *ou* $a=-b$ ***4/*** $a=b$ *et* $a=-b$ ***5/*** $a=0$ *et* $b=0$
(Nota bene : L'implication **1** $\Rightarrow$ **2** *signifie «* $a^2=b^2$ *implique* $a=b$ *»)*
Quelles sont les implications vraies du type **1** $\Rightarrow$ **..** *?*
Quelles sont les implications vraies du type **...** $\Rightarrow$ **1** *?*
Quelles sont les propositions équivalentes ?

Les notions en jeu ici sont celles d'implication, d'équivalence, et implicitement celles de condition nécessaire et condition suffisante. Les connaissances sur les connecteurs logiques *et* et *ou* sont également interrogées. Nous retrouvons de plus une quantification universelle implicite sur les variables *a* et *b* à l'image de celle rencontrée dans le problème 3.
Ce problème est largement inspiré d'un exercice du document ressources de seconde. Dans notre questionnaire, il a pour but de confirmer ou infirmer notre hypothèse sur sa grande complexité et sur la difficulté de reconnaître, à partir de sa résolution, des conceptions erronées sur l'implication. En effet, il fait intervenir de nombreuses notions de logique (connecteurs, implications, quantifications implicites...) dans un cadre mathématique abstrait et peu présent dans les manuels.
Par rapport au docuemnt ressources cité, nous avons ajouté la proposition 4/ qui diffère de la proposition 3/ uniquement par son connecteur logique. Nous souhaitons, par cet ajout, mettre en évidence une éventuelle confusion entre ces deux connecteurs et tester l'hypothèse, qui nous a été suggérée par les enseignants, concernant l'instabilité des connecteurs logiques *et* et *ou*, notamment lors de la résolution d'équations.

IV.2 Analyse a priori

a) Problèmes 1 et 3

Pour le premier problème, les réponses prévues sont de trois types :

- type A : O – N – N

Les deux énoncés sont interprétés comme une équivalence ($P \Leftrightarrow Q$), ce qui correspond à une compréhension de la phrase selon les principes du langage courant prenant en compte le contexte et l'implicite de la situation.

- type B : O – NPPS – O

La phrase « Si P alors Q » est interprétée comme l'implication mathématique $P \Rightarrow Q$. Il n'y a pas de confusion entre la proposition directe et sa réciproque. P est vue comme une condition suffisante mais non nécessaire pour Q. En revanche, la deuxième formulation « Q si P » n'est pas interprétée comme logiquement équivalente à la précédente. Elle est vue soit comme la proposition réciproque $Q \Rightarrow P$, soit comme une équivalence $P \Leftrightarrow Q$.

- type C : O – NPPS – N

Les deux énoncés sont reconnus logiquement équivalents et sont interprétés comme l'implication $P \Rightarrow Q$ sans confusion avec la réciproque.

Nous ne considérerons pas un type de réponse plus correct qu'un autre, en particulier parce qu'il n'était pas mentionné dans ce problème qu'il faut répondre selon les principes de la logique formelle ou selon ceux de la logique naturelle. Nous retiendrons néanmoins les différents concepts en vigueur et les comparerons à ceux rencontrés dans le problème 3.

Pour le troisième problème, la bonne réponse prévue est F – V – V – F avec deux types de justifications :

- les quatre propositions peuvent être traitées indépendamment avec un contre-exemple dans le cas où x est négatif comme justification aux propositions 1 et 4 et une démonstration brève mais générale pour les propositions 2 et 3 (aucune exigence particulière n'est attendue pour cette justification mais nous serons attentifs à l'utilisation abusive d'exemples).
- il est également possible de remarquer les liens entre ces différentes propositions, en particulier, les propositions 2 et 3 peuvent être remarquées comme logiquement équivalentes, si l'une est vraie l'autre aussi, et la proposition 4 peut être vue comme la proposition 1 et sa réciproque, donc fausse puisque la proposition 1 est fausse.

Nous serons particulièrement attentifs à l'interprétation de la quantification universelle implicite.

Les erreurs prévues sont : (* désigne une réponse quelconque)

- erreur 1 : * – V – F – *

La formulation « si … alors … » est vue comme une implication mais la deuxième formulation « ... si … » est vue, soit comme une équivalence, soit comme la proposition réciproque. Cela peut correspondre au concept causal-temporel de l'implication, la cause placée après la conséquence empêche de voir l'implication logique correcte.

- erreur 2 : V – * – * – *

La proposition directe est soit confondue avec sa réciproque, soit considérée comme vraie car se vérifie sur des exemples (pour les réels positifs) ou parce qu'on suppose implicitement que x est positif.

- erreur 3 : * – * – * – V

L'équivalence est reconnue vraie, soit pour les mêmes raisons que dans le cas de l'erreur 2 (réponse du type V – * – * – V), soit parce qu'une des implications est vraie (réponse du type F – * – * – V).

b) Problèmes 2 et 5

Pour le second problème, la réponse prévue est F – F – V – V.
Aucune erreur n'est attendue en particulier ici, mais il sera intéressant de voir les répercussions des erreurs au problème 2 sur les réponses au problème 5, ou encore au problème 3, et les concepts des élèves sur les notions de quantificateur universel, exemple et contre-exemple dans le registre du langage naturel.

Pour le problème 5, la bonne réponse prévue est : V – F – V avec un exemple pour justifier l'existence dans le premier point, un contre-exemple pour infirmer la deuxième proposition, et enfin, pour le dernier point, une démonstration générale.
L'utilisation d'exemples comme justification de la dernière assertion ne sera pas accepté, mais nous accepterons toutes les démonstrations mettant en évidence le maximum f(1)=1 de la fonction.
L'erreur principale attendue est : F – * – * (compréhension de *un* par « exactement un »)
Nous attendons également des erreurs de justifications, notamment, absence du contre-exemple pour la deuxième proposition ou justification par des exemples pour la dernière (les valeurs f(0), f(1) et f(2), inférieures à 3, ne suffisent pas à démontrer ce point, il faut parler aussi des variations de la fonction).

c) Problème 4

Dans ce problème, nous voulons, comme condition nécessaire à la proposition 1, la proposition 3, c'est-à-dire comme implication vraie : $1 \Rightarrow 3$. Toutes les propositions sont des conditions suffisantes, la bonne réponse attendue est donc : $2 \Rightarrow 1$, $3 \Rightarrow 1$, $4 \Rightarrow 1$ et $5 \Rightarrow 1$ sont vraies.
Les équivalences vraies sont $1 \Leftrightarrow 3$ et $4 \Leftrightarrow 5$. La notion d'équivalence est au programme de Première et Terminale S, mais elle est présente également dans le document ressources de Seconde.
Dans ce problème, le plus intéressant est de repérer les erreurs qui apparaissent dans les copies des élèves de Seconde, confrontés pour la première fois à ce type de question. Ces erreurs seront autant d'obstacles qu'il faudra traverser pour permettre l'acquisition de ces notions.
Nous prévoyons des erreurs par rapport à l'utilisation des connecteurs *et* et *ou*, d'où des réponses du type $1 \Rightarrow 4$ ou $4 \Rightarrow 3$. Nous attendons également des erreurs du type $1 \Rightarrow 2$, par oubli du cas négatif. Cette dernière erreur pourrait être due, soit à une difficulté dans la résolution mathématique, soit à une confusion entre proposition directe et réciproque. Le cadre mathématique, très abstrait ici, pourrait être un facteur d'erreurs important, au moins pour les élèves de seconde.
Nous pouvons faire l'hypothèse que les conditions suffisantes seront rarement toutes trouvées, surtout dans les copies des élèves de Seconde. Nous attendons davantage de bonnes réponses dans les copies des élèves de Terminale ou des étudiants. Nous prévoyons plus particulièrement la reconnaissance de l'équivalence $1 \Leftrightarrow 3$, car c'est un résultat du cours de Seconde.

IV.3 Analyse des productions

Dans ce paragraphe, nous proposons d'analyser les 117 copies d'élèves de Seconde, de Terminale S et de classe préparatoire aux grandes écoles d'ingénieurs, interrogés sur ce questionnaire. Seuls les

élèves de Seconde ont suivi le nouveau programme incluant les notions de base de logique évoquées précédemment.
Dans un premier temps, nous étudierons ces réponses selon les critères mis en évidence précédemment. Nous comparerons cette analyse des copies à l'analyse a priori du questionnaire que nous avons fait dans le chapitre précédent. Puis, nous résumerons les conclusions que nous pouvons tirer de cette étude, les bénéfices de ce programme, les lacunes persistantes des élèves, et les conceptions qui prédominent sur les notions de logique que nous avons évaluées.

a) Problèmes 1 et 3

En ce qui concerne le premier problème, sur les 59 élèves de Seconde interrogés, on constate 29 réponses de type A, 12 de type B, 6 de type C.
Parmi les 58 élèves de la Terminale S à la deuxième année de classe préparatoire aux grandes écoles d'ingénieurs qui ont également subi ce questionnaire, nous relevons 12 réponses de type A, 26 de type B et 16 de type C.
La plupart des élèves de Seconde interrogés analysent donc cet énoncé comme une équivalence.

Problème 1 : Répondre aux questions par oui (O), non (N) ou ne peux pas savoir (NPPS).

Une mère dit à son enfant : "Si tu manges ta soupe alors tu auras un dessert."
L'enfant aura-t-il un dessert s'il mange sa soupe ? Oui si la mère tiens sa parole
S'il ne la mange pas ? Non

Si la mère avait dit : "Tu auras un dessert si tu manges ta soupe."
Vos réponses changeraient-elles ? (Si oui, précisez.) NON

Copie 1 d'un élève de Seconde

Nous pouvons émettre plusieurs hypothèses pour justifier cette prédominance de réponse de type A. Soit les élèves ont interprété cet énoncé selon la logique naturelle en prenant en compte l'implicite du langage courant plutôt que la signification mathématique d'une proposition sous la forme « si P alors Q » (cf copie 1 ci-dessus), soit ils ont été peu confrontés à des implications qui ne sont pas également des équivalences et ne distinguent donc pas les formulations de la forme « si P alors Q » et « P si et seulement si Q » (cf copie 2 ci-dessous).

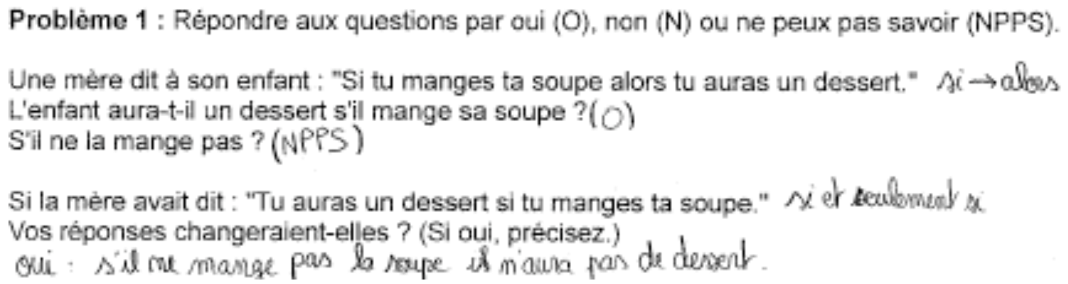
Problème 1 : Répondre aux questions par oui (O), non (N) ou ne peux pas savoir (NPPS).

Une mère dit à son enfant : "Si tu manges ta soupe alors tu auras un dessert."
L'enfant aura-t-il un dessert s'il mange sa soupe ? O
S'il ne la mange pas ? N

Si la mère avait dit : "Tu auras un dessert si tu manges ta soupe."
Vos réponses changeraient-elles ? (Si oui, précisez.) Oui car si il ne la mange pas on NPPS du fait que elle n'impose pas la condition comme précédemment : si ... alors ... . La on trouve : si seulement, ce qui nous avance pas sur : si non.

Copie 2 d'un élève de Seconde

Nous retiendrons également que parmi les élèves qui interprètent le premier énoncé comme une implication ce qui correspond à la logique mathématique (« si P alors Q » signifie « $P \Rightarrow Q$ »), la moitié d'entre eux interprète la deuxième formulation (« Q si P ») différemment. C'est ce type de réponse (type B) qu'on retrouve majoritairement dans les copies d'élèves de Terminale S et des étudiants. En effet, la plupart des élèves de Terminale et étudiants interrogés reconnaissent une implication dans la première formulation (« si ... alors … »), mais interprètent la seconde tournure (« … si … ») soit comme la proposition réciproque (cf copie 3) soit comme une équivalence (cf copie 4), ce qui dénote la forte prédominance de la conception causale-temporelle de l'implication.

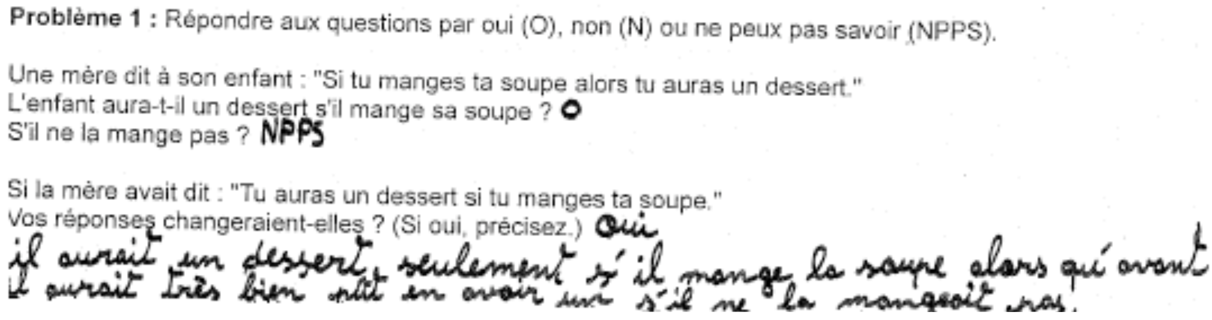


Problème 1 : Répondre aux questions par oui (O), non (N) ou ne peux pas savoir (NPPS).

Une mère dit à son enfant : "Si tu manges ta soupe alors tu auras un dessert." si → alors
L'enfant aura-t-il un dessert s'il mange sa soupe ? (O)
S'il ne la mange pas ? (NPPS)

Si la mère avait dit : "Tu auras un dessert si tu manges ta soupe." si et seulement si
Vos réponses changeraient-elles ? (Si oui, précisez.)
oui : s'il ne mange pas la soupe il n'aura pas de dessert.

Copie 3 d'un élève de Terminale scientifique



Problème 1 : Répondre aux questions par oui (O), non (N) ou ne peux pas savoir (NPPS).

Une mère dit à son enfant : "Si tu manges ta soupe alors tu auras un dessert."
L'enfant aura-t-il un dessert s'il mange sa soupe ? O
S'il ne la mange pas ? NPPS

Si la mère avait dit : "Tu auras un dessert si tu manges ta soupe."
Vos réponses changeraient-elles ? (Si oui, précisez.) Oui
il aurait un dessert seulement s'il mange la soupe alors qu'avant il aurait très bien put en avoir un s'il ne la mangeait pas.

Copie 4 d'un élève de classe préparatoire aux grandes écoles d'ingénieurs

Enfin, la réponse de type C correspondant à la logique mathématique a été peu rencontrée que ce soit dans les copies des élèves de Seconde ou dans les copies des élèves de Terminale et des étudiants, pourtant beaucoup plus expérimentés face à la notion d'implication et disposant d'un bagage mathématique plus conséquent. Une hypothèse que nous pouvons émettre est que la conception causale-temporelle de l'implication prédomine encore à tous les niveaux dans ce contexte du langage courant.

Pour le problème 3, nous relevons la réponse attendue dans seulement 15 copies d'élèves de Seconde et 17 copies d'élèves de Terminale S et d'étudiants. Parmi les élèves de Seconde, les trois types d'erreurs attendues sont intervenues, chacune sur une vingtaine de copie environ. Pour les autres élèves, la principale erreur rencontrée subsiste dans la proposition avec la formulation « ... si … », qui est vue soit comme la proposition réciproque, soit comme une équivalence (cf copies 5 et 7 ci après).

Si $x<-1$ alors $x^2>1$	V	cs $x<-1<0$, pour décroissance de $x\mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^-$, cela implique $x^2>(-1)^2>0$ soit $x^2>1$ cqfd.
$x^2>1$ si $x<-1$	F	$x^2>1$ si $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. Ainsi il n'est pas nécessaire que x soit inférieur à -1, puisqu'il peut être >1.

Copie 5 d'un étudiant de classe préparatoire

Cette erreur concerne 30 copies et montre, comme pour le problème 1, que la conception causale-temporelle de l'implication prédomine toujours même dans le cadre mathématique de résolution d'inéquations. Les deux autres types d'erreurs sont survenus, chacun, sur une dizaine de copies.
Nous remarquons également que les justifications rencontrées, même pour les bonnes réponses, sont souvent incorrectes. Plus précisément, parmi les réponses correctes pour les propositions 2 et 3, de nombreuses justifications fausses ont été rencontrées dans les copies des élèves de Seconde mais également dans celles des élèves de Terminale et celles des étudiants ; nous retiendrons principalement la justification par des exemples (cf copie 6 ci-dessous) et une autre erreur inattendue, la confusion entre « plus grand que 1 » et « positif ». Cette dernière erreur est d'ordre mathématique et elle n'est pas forcément en lien avec des conceptions de logique erronées.

Nous ajouterons que seulement 10 élèves ont invoqué le caractère logiquement équivalent de ces propositions 2 et 3.

Problème 3 : Indiquer si les propositions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F) et justifier.

Propositions	V/F	Justifications
Si $x^2>1$ alors $x>1$	V	Si $4>1$ alors $2>1$

Copie 6 d'un élève de Seconde

Parmi les bonnes réponses des élèves de Seconde aux propositions 1 et 4, on retrouve un contre-exemple en justification dans la plupart des cas. En revanche, on retrouve cette justification par contre-exemple dans seulement 24 copies parmi les 50 bonnes réponses à ces questions dans les copies des élèves de Terminale et de classe préparatoire, la plupart se contentant pour justifier leur réponse de compléter la proposition pour qu'elle devienne correcte (cf copie 7 ci-dessous).

Problème 3 : Indiquer si les propositions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F) et justifier.

Propositions	V/F	Justifications
Si $x^2>1$ alors $x>1$	F	si $x^2>1$ alors $x<-1$ ou $x>1$.
Si $x<-1$ alors $x^2>1$	V	$x<-1 \Rightarrow -x>1 \Rightarrow -x\times -x>1\times 1$ (car $-x$ positif) $\Rightarrow x^2>1$
$x^2>1$ si $x<-1$	F	$x^2>1$ si $x<1$ ou $x>1$

Copie 7 d'un étudiant de classe préparatoire

Nous remarquons également que seulement trois élèves ont utilisés le lien entre ces deux propositions pour justifier leurs réponses. Enfin, signalons que tous les étudiants semblent avoir interprété les propositions comme universellement quantifiées bien que la quantification n'ait pas été explicitée.

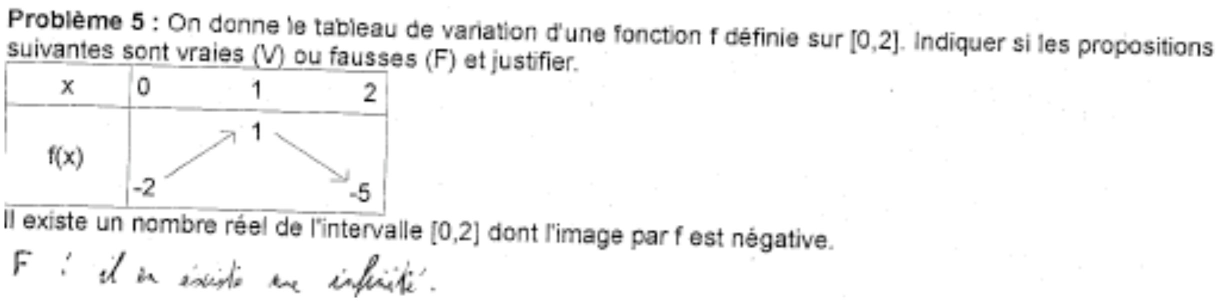
Nous pouvons ici émettre de nouvelles hypothèses. Ce problème semble indiquer que les bases de logique mathématique enseignées cette année ont amené ces élèves de Seconde à une meilleure maitrise de l'utilisation du contre-exemple, en comparaison avec les élèves de Terminales et étudiants interrogés. Nous vérifierons cette hypothèse sur les réponses aux problèmes 2 et 5. Ce constat montre un aspect bénéfique de ce programme : l'utilisation des contre-exemples, lesquels demeurent trop souvent absents dans les copies des lycéens et étudiants qui n'ont pas suivi ce programme. Cependant ce constat est à nuancer puisque de nombreuses notions de logique sont encore instables ou absentes. Nous retrouvons principalement la prédominance de la conception causale-temporelle de l'implication chez tous les élèves interrogés, occasionnant une confusion entre proposition directe et réciproque. Nous retiendrons également, chez les élèves de Seconde, l'utilisation abusive d'exemples pour justifier une proposition générale.

Enfin, en ce qui concerne la cohérence entre les réponses aux problèmes 1 et 3, nous avons relevé, parmi les 22 copies dont la réponse au premier problème était de type C (c'est-à-dire celle correspondant le mieux à la logique mathématique), 7 erreurs de type * – V – F – *, dans le troisième problème, marquant une mauvaise interprétation de la formulation « … si … », contre 13 réponses de type * – V – V – *. Pour les 28 copies dont la réponse au premier problème était de type B (c'est-à-dire que la formulation « … si … » est mal interprétée dans le registre de la vie courante), on remarque cette erreur 18 fois dans le problème 3, contre 13 réponses de type * – V – V – *. Enfin pour les 53 copies concernées par le type A au problème 1, on relève 24 erreurs de type * – V – F – * contre 23 réponses de type * – V – V – *.
On peut déduire de ces résultats que l'interprétation de la formulation « … si … » dans le cadre de la situation réelle a une influence sur son interprétation dans le cadre mathématique. Cependant, la corrélation entre les réponses au premier et au second problème est faible, ce qui semble indiquer que peu d'élèves font un lien entre eux.

b) Problèmes 2 et 5

Sur le deuxième problème encore, les résultats sont homogènes entre élèves de Seconde et ceux des autres niveaux. La plupart des élèves interrogés ont réussi ce problème, nous verrons par la suite si ces notions visées – quantificateurs, exemples et contre-exemples – sont suffisamment maîtrisées pour être utilisées dans le problème 5.

Pour ce dernier problème, 42 élèves de Seconde ont donné la réponse attendue avec des justifications correctes dans presque tous les cas. Parmi eux, on remarque néanmoins 12 justifications erronées de la dernière proposition par des exemples de valeurs, sans étude des variations ; et 13 élèves ont répondu faux à la première proposition en comprenant « exactement un » au lieu de « au moins un » (cf copie 8 ci-après).


Problème 5 : On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur [0,2]. Indiquer si les propositions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F) et justifier.

x	0	1	2
f(x)	-2	1	-5

Il existe un nombre réel de l'intervalle [0,2] dont l'image par f est négative.

F : il en existe une infinité.

Copie 8 d'un élève de seconde

Les autres lycéens et étudiants, ont presque tous répondu correctement. On ne retrouve pas, comme dans le problème 3, une absence de justification par contre-exemple.
Dans ce problème 5, les difficultés liées aux quantificateurs et aux justifications semblent mieux maîtrisées ; cela peut être dû aux notions mathématiques concernées, moins complexes pour les élèves que les inéquations du problème 3. Nous ajouterons que le problème 5 est un exercice « type bac » auquel les élèves ont souvent été confrontés. Un travail plus poussé sur les notions de base de logique dans ce domaine mathématique pourrait permettre une compréhension plus profonde et donc une meilleure appréhension du problème 3 ou d'autres problèmes relevant de ces mêmes difficultés de logique et de raisonnement.

c) Problème 4

En ce qui concerne le problème 4, la moitié des élèves de Seconde trouvent la condition nécessaire (proposition 3) attendue pour la proposition 1, résultat souvent associé à d'autres conditions nécessaires fausses. En ce qui concerne les conditions suffisantes (propositions 2, 3, 4 et 5) pour 1, seulement une dizaine d'élèves de Seconde a donné une réponse complète. Pour les équivalences (notion au programme de Première et Terminale S à la rentrée prochaine), une dizaine d'équivalences correctes ont été trouvées dans les copies au niveau Seconde.
Concernant les diverses erreurs survenues, nous retiendrons principalement les difficultés concernant l'utilisation de *et* et de *ou*, notamment la différence entre « a=b et a=-b » et « a=b ou a = -b » n'est pas maitrisée.
Une des difficultés majeures rencontrées est la compréhension de 1, 2, 3, 4 et 5 comme des propositions, et de $1 \Rightarrow 2$ (respectivement $1 \Leftrightarrow 2$) comme une implication (respectivement une équivalence), qui peuvent être vraies ou fausses. Nous avons notamment relevé des réponses du type 4=5 au lieu de $4 \Rightarrow 5$, des implications vues comme des propositions, d'où des réponses du type $1 \Rightarrow 2$ équivaut à $3 \Rightarrow 4$; ou encore la confusion entre proposition directe et réciproque. Plus surprenant, beaucoup de ces erreurs ont été retrouvées dans les copies de Terminale S et d'étudiants, pourtant plus expérimentés face à ce type de question.

Devant la diversité des réponses proposées par les élèves interrogés, il est difficile de tirer des conclusions sur les obstacles principaux liés à cette notion d'implication. Nous retiendrons néanmoins des confusions entre condition nécessaire et condition suffisante, et la non reconnaissance des conditions suffisantes lorsque la conclusion est donnée. Ce problème a surtout été révélateur de l'absence de connaissances théoriques sur l'implication mathématique.

IV.4 Synthèse des connaissances

Ce questionnaire nous a permis d'évaluer l'état des connaissances d'élèves et d'étudiants sur certains points de logique. Nous en donnons ici les résultats essentiels.

a) Les connecteurs logiques «et» et «ou»

Le problème 4 nous a permis de constater l'ignorance des élèves, toutes classes confondues, sur ces deux connecteurs logiques. Les propositions comportant ces connecteurs ont été mal reconnues, ou pas suffisamment maitrisées pour reconnaître des implications ou équivalences logiques. Une conception, rencontrée fréquemment, notamment dans les copies des élèves de Seconde, est que ces deux connecteurs ont la même signification.

b) Les quantificateurs

Les problèmes 2 et 5 problématisaient la quantification. Le problème 3 comportait un quantificateur universel implicite.
Dans ce dernier problème, le quantificateur implicite « pour tout x réel » a été reconnu par tous les élèves qui ont traité la question. Cependant, dans certaines propositions, le cas négatif a été oublié, mais nous pouvons penser que cette erreur est d'ordre mathématique et ne provient pas d'une incompréhension du quantificateur universel.

Une conception assez présente, en particulier chez les élèves de Seconde, est que des exemples sont suffisants pour justifier une proposition avec un quantificateur universel. En revanche, cette conception se limite au cadre mathématique, en effet presque tous les élèves interrogés ont reconnu la fausseté de ce type d'argument dans le contexte du problème 2.
En ce qui concerne la quantification existentielle, le problème 5 a suscité l'apparition d'une conception sur le sens de l'expression « il existe un », souvent interprétée comme « il existe exactement un ». Cette conception n'a été relevée que dans certaines copies d'élèves de Seconde.
Les quantificateurs semblent, dans l'ensemble, bien maitrisés par les élèves de Terminale et de classe préparatoire.

c) La proposition conditionnelle

La proposition conditionnelle a été un des points principaux traités dans ce questionnaire.
Le problème 4 a permis de mettre en évidence les faibles connaissances de la plupart des élèves sur l'implication et l'équivalence logique. Une conception rencontrée dans les copies des élèves de Seconde concerne la proximité des symboles d'équivalence et d'égalité : nous avons relevé des substitutions incorrectes entre ces deux symboles.

Les problèmes 1 et 3 ont permis de distinguer différentes conceptions des élèves sur les deux formulations de propositions conditionnelles : « si A alors B », ou « B si A ». En particulier, il s'agissait de voir si les changements de cadre ou de formulation avaient une influence sur la compréhension des propositions conditionnelles, et éventuellement de remarquer des confusions entre proposition directe et réciproque, ou encore équivalence.

Le problème 1 a montré que, dans une situation de la vie courante, les propositions conditionnelles sont le plus souvent interprétées selon le contexte de la situation, en particulier pour les élèves de Seconde – ce qui n'a rien d'étonnant. Cette interprétation diverge souvent de l'interprétation mathématique de la phrase.

De plus, l'étude croisée des problèmes 1 et 3 a montré que cette interprétation différente des propositions conditionnelles dans une situation de la vie courante avait une influence sur l'interprétation de propositions dans le cadre mathématique.
Enfin, cette étude a montré que la conception causale-temporelle de l'implication, qui entraîne une compréhension de l'expression « B si A » comme la réciproque de la proposition conditionnelle « si A alors B », est souvent effective dans les deux cadres.

d) Le contre-exemple

Les problèmes 2, 3 et 5 traitaient de la notion de contre-exemple. Le problème 2 a montré que l'utilisation du contre-exemple est reconnue par la plupart des élèves comme une justification correcte pour infirmer une proposition universelle dans une situation « réelle ».

Les problèmes 3 et 5 n'ont pas amené les mêmes conclusions. Dans le problème 5, le cadre de l'étude des variations d'une fonction a été propice à l'utilisation du contre-exemple par la plupart des élèves, toutes classes confondues. En revanche, dans le problème 3, la justification par contre-exemple a été absente des copies des élèves de Terminale et classe préparatoires. Au contraire, les élèves de Seconde ont presque tous utilisé le contre-exemple comme justification, lorsque c'était possible. Le problème 3 a également mis en évidence une pratique d'élèves de Terminale et de classe préparatoire, à savoir la justification de la fausseté de propositions par transformation en une proposition correcte.

V. Conclusion

Les résultats de cette recherche montrent que les connaissances des élèves de lycée et des étudiants sur le raisonnement mathématique et la logique sont peu stables, voire absentes, et sont sources d'obstacles. On peut donc supposer qu'un travail au fil des chapitres, sans construction théorique des notions de logique mathématique, comme il est préconisé dans le programme actuel de lycée, ne permettra pas d'enseigner correctement ces notions. Par exemple, le problème 4 issu d'un document ressources du ministère est tout à fait pertinent pour travailler l'implication, à condition d'avoir ces outils théoriques ; mais, sans cet apport, le traitement de ce type de problème ne semble pas pouvoir suffire à déstabiliser les conceptions fausses des élèves et à les faire entrer dans les règles, notamment syntaxiques, de la logique mathématique.

Il nous semble également qu'il faudrait organiser l'enseignement de ces notions de manière à croiser les différents registres qui leur donne du sens (raisonnement déductif, logique formelle, registre ensembliste) dans les différents cadres mathématiques (algèbre, géométrie et analyse).

Bibliographie

DELOUSTAL V., GRENIER D. (2001) L'implication dans le raisonnement mathématique : Etat des lieux dans l'enseignement en France et conceptions d'étudiants, *Learning in mathematics and Science and Educational Technology,* A. Gagatsis editeur, Intercollege press Cyprus, 2001.

DELOUSTAL-JORRAND V. (2004) *Étude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique,* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

DURAND-GUERRIER V. (2007) Logique mathématique et logiue du sens commun, Rupture ou continuité ? In *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone,* 27-31 mai 2006.

FABERT Ch. (2010) L*e nouveau programme de logique de seconde,* mémoire de master de Didactique des maths, Université Joseph Fourier Grenoble, en ligne : charlotte.fabert.free.fr.

GRENIER D. (2009) Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes, A*ctes du séminaire de l'ARDM*, Paris.

GRENIER D. (2008a) Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique, *Actes du colloque* de l'*Association Mathématique Québecoise*, Sherbrooke, juin 2006.

GRENIER D. (2008b) Expérimentation et preuve en mathématiques, in *Didactique, épistémologie et histoire des sciences*, collection « Science, histoire et société », direction Laurence Viennot, PUF.

Annexe 1

Problèmes de logique

Problème 1 : Répondre aux questions par oui (O), non (N) ou ne peux pas savoir (NPPS).

Une mère dit à son enfant : "Si tu manges ta soupe alors tu auras un dessert."
L'enfant aura-t-il un dessert s'il mange sa soupe ?
S'il ne la mange pas ?
Si la mère avait dit : "Tu auras un dessert si tu manges ta soupe."
Vos réponses changeraient-elles ? (Si oui, précisez.)

Problème 2 : On considère l'affirmation "Tous les Voironnais aiment la montagne".
Indiquer si les quatre propositions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F) du point de vue de la logique :

1/ Cette affirmation est vraie, car tous mes amis voironnais aiment la montagne.
2/ Cette affirmation est fausse, car je ne suis pas Voironnais et j'aime la montagne.
3/ Cette affirmation est fausse, car mon ami voironnais n'aime pas la montagne.
4/ Je ne peux rien dire, car je ne connais pas tous les Voironnais.

Problème 3 : Indiquer si les propositions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F) et justifier.

Propositions	V/F	Justifications
Si $x^2>1$ alors $x>1$		
Si $x<-1$ alors $x^2>1$		
$x^2>1$ si $x<-1$		
$x>1$ si et seulement si $x^2>1$		

Problème 4 : a et b désignent deux nombres réels. On donne cinq propositions numérotées de 1 à 5.
1/ $a^2=b^2$ **2/** $a=b$ **3/** $a=b$ ou $a=-b$ **4/** $a=b$ et $a=-b$ **5/** $a=0$ et $b=0$
*(Nota bene : L'implication **1** $\Rightarrow$ **2** signifie « $a^2=b^2$ implique $a=b$ »)*
Quelles sont les implications vraies du type **1** $\Rightarrow$ **..**?
Quelles sont les implications vraies du type **..** $\Rightarrow$ **1**?
Quelles sont les propositions équivalentes?

Problème 5. On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur [0,2]. Indiquer si les propositions suivantes sont vraies (V) ou fausses (F) et justifier.

x	0		1		2
f(x)	-2	↗	1	↘	-5

Il existe un nombre réel de l'intervalle [0,2] dont l'image par f est négative.
Tous les nombres réels de l'intervalle [0,2] ont une image par f négative.
Tous les nombres réels de l'intervalle [0,2] ont une image par f inférieure à 3.