

LA PROCÉDURE DE LA MESURE DU PÉRIMÈTRE TERRESTRE PAR LA MÉTHODE DITE « D'ÉRATOSTHÈNE » : UN SUPPORT POUR UNE RECONSTRUCTION DIDACTIQUE

Cécile de HOSSON

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot - Paris 7

Nicolas DECAMP

Lycée Condorcet, Montreuil

Introduction

C'est au milieu du 19^{ème} siècle qu'apparaît pour la première fois dans les textes législatifs, une référence explicite à l'histoire des sciences dans l'enseignement au niveau secondaire. Cette référence se retrouvera ensuite régulièrement dans les programmes de sciences physiques sous des formes plus ou moins incitatives. Il n'est pas question ici de faire l'histoire de l'histoire des sciences dans l'enseignement français. Nous renvoyons pour cela au remarquable « aperçu » historico-critique publié en 1984 par Nicole Hulin qui retrace l'histoire de l'intervention historique dans l'enseignement scientifique français depuis cent cinquante ans (Hulin, 1984). Ainsi, depuis plusieurs décennies, les programmes scolaires mentionnent l'idée qu'une insertion historique peut s'avérer bénéfique pour l'enseignement des sciences. Dans les programmes scolaires actuels, cette mention revêt une importance toute particulière. Ainsi, pour les auteurs des programmes de collège, « *la perspective historique donne une vision cohérente des sciences et des techniques et de leur développement conjoint. Elle permet de présenter les connaissances scientifiques comme une construction humaine progressive et non comme un ensemble de vérités révélées* » (BOEN spécial n°6 du 28 août 2008, p. 1). C'est cette même volonté d'approcher la nature de la science qui a guidé la création d'un certain nombre de supports pédagogiques pour l'enseignement des sciences et de la technologie à l'école primaire. Les deux ouvrages *L'Europe des découvertes* (Jasmin, 2004) et *Découvertes en pays d'Islam* (Djebbar et al., 2009) illustrent parfaitement cette volonté de « *permettre aux enfants de retrouver le sens qui habite la science et ceux qui l'ont incarnée* » (Jasmin, 2004).

D'une manière assez générale, l'histoire des sciences dans les programmes tend à faire de l'enseignement des sciences physiques une humanité qui vise moins à faire acquérir les résultats de la science que d'en faire comprendre les procédures. La référence

épistémologique des démarches d'investigation prônées depuis 2002 par les Instructions Officielles procède sans doute d'une volonté identique (voir à ce sujet Mathé & *al.*, 2008).

Dans ce contexte, la mesure du périmètre terrestre par la méthode dite « d'Ératosthène » est devenue une activité familière de l'enseignement des sciences en France comme à l'étranger¹. L'objectif de cet article est de spécifier les écarts entre les choix qui président à l'utilisation standard de cette activité au sein de la sphère scolaire et la méthode telle qu'elle nous est parvenue par l'auteur Grec Cléomède et de proposer une alternative pédagogique à cette utilisation. Nous montrerons que ces choix scolaires standards se tiennent à l'écart des difficultés psycho-cognitives associées à la représentation géométrique de la propagation de la lumière du Soleil et qu'ils présentent des aspects dont l'historicité apparaît discutable. Ce double constat nous conduira à proposer une reconstruction didactique de la mesure du périmètre terrestre prenant en compte des aspects historiques et psycho-cognitifs.

La mesure de la circonférence de la Terre : Éléments historiques

La première mesure de la Terre semble avoir été effectuée par Ératosthène (276-194 av. J.C.). À cette époque, la sphéricité de la Terre est acquise et corroborée par des observations rapportées notamment par Aristote (383-322 av. J.C.) dans son *Traité du ciel*. De l'œuvre d'Ératosthène, il ne reste presque rien, aussi, l'essentiel de la méthode utilisée par Ératosthène pour calculer le périmètre de la Terre nous est-il parvenu par des témoignages dont les plus importants sont le *Traité de géographie* de Strabon (58 av. JC – 21 ap. J.C.) et le *De motu circulari corporum caelestium* de Cléomède, écrivain grec que l'on situe au 1^{er} siècle avant J.C. Nous avons choisi de nous attarder sur un extrait du *De motu circulari corporum caelestium* dont la traduction française est présentée en annexe de cette partie (Annexe 1). Cléomède présente la méthode d'Ératosthène en considérant comme « admis » les cinq présupposés suivants :

1. Syène (l'actuelle Assouan) et Alexandrie sont situées sur le même méridien ;
2. la distance entre Syène et Alexandrie est connue (5000 stades) ;
3. les rayons envoyés par le Soleil arrivent sur Terre parallèles entre eux ;
4. les droites sécantes des parallèles forment des angles alternes égaux ;
5. les arcs de cercles qui reposent sur des angles égaux sont semblables.

S'ensuit l'énoncé de quelques faits d'observation : au solstice d'été, sous le tropique du Cancer, les gnomons (styles) des cadrans solaires concaves (*scaphe*) sont nécessairement sans ombre tandis que ceux d'Alexandrie (située au nord d'Assouan) projettent une ombre (voir figure 1). Comme les arcs *DA* et *AS* sont limités par des angles égaux (présupposé n°4, voir figure 2), ils délimitent une portion de cercle identique (présupposé n°5). La portion d'arc formée par l'ombre du gnomon de la *scaphe* située à Alexandrie est donc égale à la portion d'arc délimitée par la ligne Syène-Alexandrie. Autrement dit, l'arc qui va de Syène à Alexandrie représente une portion du cercle terrestre identique à celle du cercle de la *scaphe* délimitée par l'ombre du gnomon d'Alexandrie (figure 2).

¹ À titre d'exemple, l'équipe de la Main à la Pâte a développé un module pédagogique de 166 pages pour accompagner les élèves et les enseignants dans un projet collaboratif de mesure du périmètre terrestre par l'observation et la mesure d'ombres de bâtons plantés dans le sol à différents endroits du globe : www.lamap.fr/eratos

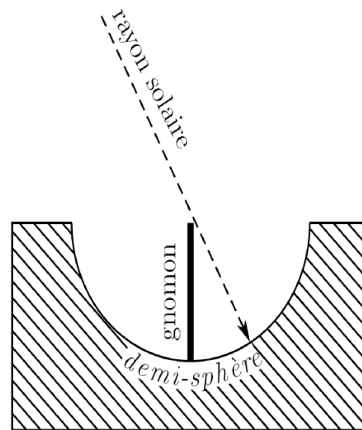


Figure 1 - Cadran solaire hémisphérique ou *Scaphe*

L'hypothèse du parallélisme des rayons du Soleil semble prendre une forme quelque peu différente de la forme construite dans le cadre de l'optique géométrique. Cléomède précise en effet que le parallélisme concerne les lignes « reliant différents points du Soleil à différents points de la Terre ». Dans cette perspective, le Soleil n'est pas considéré comme un ensemble de points d'où émanent un ensemble de cônes contenant un ensemble de rayons, mais comme un ensemble de points envoyant chacun un rayon unique. En outre, l'évaluation de la distance entre Syène et Alexandrie demeure encore aujourd'hui sujette à discussions (Bowen, 2008). Enfin, l'utilisation de la *scaphe* n'est pas certaine mais il est clair qu'en l'absence d'outils mathématiques tels que la tangente², il s'agissait là d'un moyen efficace pour convertir un rapport de distance (longueur de l'ombre / hauteur du gnomon) en un arc de cercle (Goldstein, 1984). Précisons à cette occasion que l'ouvrage de Cléomède auquel nous nous référons ici est équivalent à nos manuels scolaires, et que l'on peut supposer que l'appel à la *scaphe* est le résultat d'une volonté de simplification de la méthode utilisée par Ératosthène qui demeure, à ce jour, incertaine.

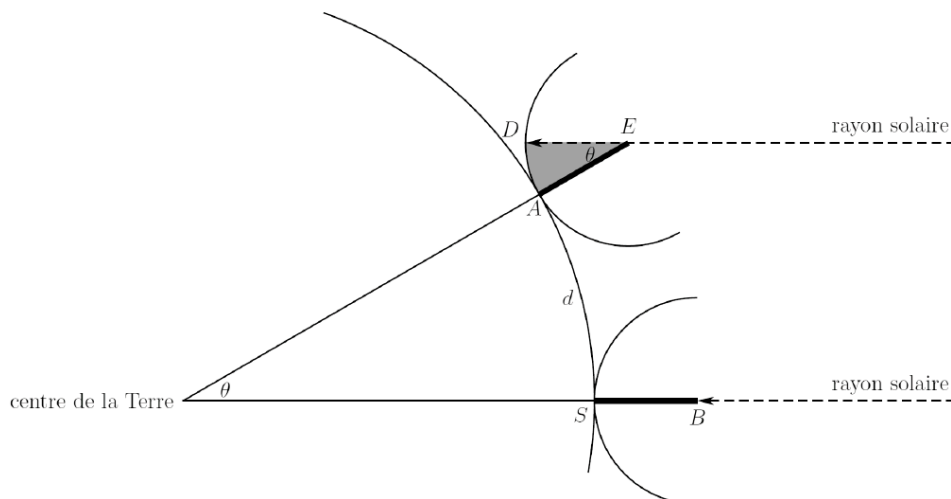


Figure 2 - Schéma représentant la méthode d'Ératosthène telle que décrite par Cléomède. L'arc AD est égal à $1/50^\circ$ du cercle de centre E et de rayon [EA]. Comme les angles *téta* aux sommets E et centre de la Terre sont égaux, l'arc AS délimite $1/50^\circ$ du cercle terrestre

² La « tangente » a été inventée au II^{ème} siècle avant J.C. par Hipparque, un siècle après Ératosthène.

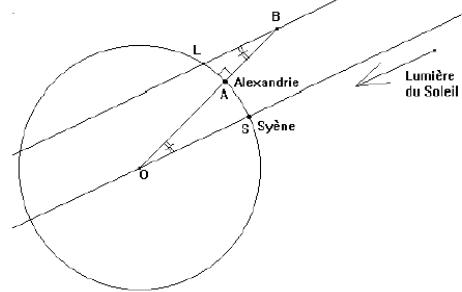
Si certaines des exégèses auxquelles nous nous référons semblent remettre en cause le caractère réaliste de la technique de mesure rapportée par Cléomède, le *De motu circulari corporum caelestium* se pose comme l'un des rares témoignages historiques de la méthode qu'aurait utilisé Ératosthène pour calculer le périmètre de la Terre. Il constitue en cela une source historique dont le contenu se distingue de la plupart des récits vulgarisés que l'on trouve notamment dans les ouvrages scolaires.

L'utilisation standard de la mesure du périmètre terrestre par la méthode dite « d'Ératosthène »

L'analyse d'un certain de supports pédagogiques (ouvrages, fiches disponibles sur les sites académiques ...) visant la mise en place dans la classe d'une activité de « redécouverte » de la procédure supposément utilisée par Ératosthène pour mesurer la circonférence de la Terre nous a permis d'accéder aux formes prises par cette procédure au sein de la sphère scolaire, et de les confronter aux témoignages historiques qui sont aujourd'hui disponibles.

Les supports que nous avons examinés s'organisent à peu près tous de la même façon : énoncé des faits observés, de quelques données chiffrées (angle pertinent, distance entre Alexandrie et Syène), des hypothèses nécessaires (parallélisme des rayons, lois des angles alternes égaux, sphéricité de la Terre), schéma donnant à voir la façon dont la mesure a pu être réalisée. Lorsque le récit de la mesure fait l'objet de questions, celles-ci portent pour la plupart sur le calcul du périmètre terrestre que l'on demande aux élèves d'effectuer à partir de la valeur de l'angle entre la droite passant par un bâton planté à Alexandrie et la droite verticale passant par le sommet du bâton.

Activité n°2 : Calcul de la circonférence et du rayon de la Terre

 <p>[AB] : Bâton d'Erathosthène de 1,25 m de long [AL] : Ombre portée par le bâton on mesure $AL = 0,16$ m</p>	<p>Eratosthène (-284 à -192 AVJC environ) est bibliothécaire à Alexandrie.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Il a appris que les caravanes de chameaux mettent cinquante jours pour venir de Syène à Alexandrie. A 100 stades par jour en moyenne, il en déduit la distance entre les deux villes : 5000 stades, ... soit environ 800 kilomètres. • Eratosthène a lu qu'à SYENE, les rayons du Soleil tombent verticalement au fond d'un puits, le jour du Solstice d'Été. Le même jour il a mesuré l'ombre de son bâton, posé verticalement devant sa bibliothèque à Alexandrie; il attribue la différence à la rotondité de la Terre. <p>Enfin, il suppose les rayons du lointain Soleil parallèles et le triangle BAL rectangle en A.</p>
--	---

- D'après les mesures d'Eratosthène à Alexandrie, donner une valeur de l'angle \widehat{ABL} au dixième près.
- Que peut-on dire des angles \widehat{ABL} et \widehat{AOS} ? Justifier par une démonstration.
- Connaissant la distance Alexandrie-Syène, calculer la circonférence de la Terre (choisir une unité appropriée).
- Calculer ainsi une valeur approchée au km près du rayon de la Terre.

Figure 3 - Activité proposée sur le site internet de mathadoc pour la classe de 3^{ème} 3

Sur la forme, on remarque que les références historiques (les sources) ne sont jamais mentionnées. Il n'est, par exemple, jamais précisé aux élèves si les schémas proposés sont historiques ou non, s'ils ont été faits de la main d'Ératosthène. On ne sait pas non plus comment (et sous quelle forme) nous est parvenu le récit de la mesure. En outre, les récits des différents supports ne disent pas tous la même chose : dans certains cas, l'observation à

³ <http://www.mathadoc.com/Documents/college/3eme/3trigo/astro.PDF>

Syène s'est faite à l'aide d'un puits, d'en d'autres cas, à l'aide d'un bâton, d'un gnomon, d'en d'autres cas encore, grâce à un obélisque. La mesure de la distance entre Syène et Alexandrie correspondrait tantôt à un nombre de pas de bématises, tantôt à un nombre jours de voyage de caravanes de chameaux.

Sur le fond, la façon dont la mesure de l'angle au sommet du bâton d'Alexandrie a pu être obtenue ne fait l'objet d'aucun questionnement (pas de mention du cadran concave). Sa valeur est généralement donnée, et lorsque ce n'est pas le cas, les élèves sont invités à la calculer en utilisant la notion de tangente, outil indisponible à l'époque d'Ératosthène. Concernant l'aspect lié à la nature de la science, là encore l'apport des activités est assez faible. Le rapprochement de ces différents éléments avec ceux du récit de Cléomède nous incite à conclure que la forme prise par la mesure d'Ératosthène au sein de la sphère scolaire présente un intérêt historique limité. Qu'en est-il de l'intérêt didactique ?

Intérêt didactique de la découverte d'Ératosthène : la question du parallélisme des rayons du Soleil

Des élèves de cycle 3 et/ou de collège à qui l'on demande d'expliquer à l'aide de schémas la raison pour laquelle aucune ombre n'est visible au pied des obélisques à Syène à midi au solstice d'été alors qu'au même moment des ombres sont visibles aux pieds des obélisques à Alexandrie (ville située plus au nord, sur le même méridien) représentent la propagation de la lumière du Soleil en utilisant des rayons divergents (Merle, 1985 ; Farges & *al.*, 2002 ; Ducourant, 2007 ; voir figure 4). Cette modélisation « spontanée » de la propagation de la lumière du Soleil s'avère tout à fait performante (elle permet d'expliquer pourquoi il n'y a pas d'ombre à un endroit et une ombre à un autre endroit de la terre) et pourrait même, dans une certaine mesure, être considérée comme correcte. Représenter la propagation de la lumière du Soleil en des rayons parallèles n'est pas naturel⁴. Les élèves optent spontanément pour un modèle en rayons divergents et font figurer le Soleil sur la plupart de leurs dessins. Le passage de la divergence au parallélisme nécessite un passage à la limite complexe, un saut conceptuel dont la difficulté ne doit pas être sous-estimée.

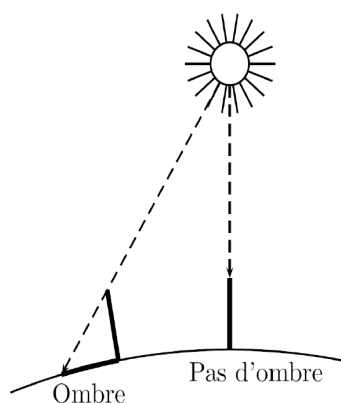


Figure 4 - Dessin prototypique d'élèves à qui l'on demande d'expliquer pourquoi au solstice d'été deux gnomons ne projettent pas la même ombre en deux endroits différents de la Terre situés le long du même méridien (Merle, 1985 ; Farges & *al.*, 2002 ; Ducourant, 2007). Nous ne considérons ici que les cas où la courbure de la Terre est représentée par les élèves, ce qui n'est pas toujours le cas

⁴ Cette modélisation est d'ailleurs discutable dans la mesure où le Soleil est une source étendue : chaque point du Soleil émet de la lumière dans toutes les directions. Mais l'éloignement du Soleil est tel que cette divergence tend vers un parallélisme. Cependant, le Soleil n'est pas un point mais une somme de points et pour tous ces points, il se produit un phénomène identique. Par conséquent, les gnomons de Syène et d'Alexandrie sont atteints par des cônes divergents issus de tous les points du Soleil, ce qui donne naissance à des zones de pénombre au pied des gnomons (y compris au pied du gnomon de Syène).

Pourtant, la plupart des activités que nous avons examinées se contente d'énoncer l'hypothèse du parallélisme sans que celle-ci ne soit réellement construite voire interrogée⁵.

L'activité visant à faire reproduire aux élèves de primaire et/ou de collège la mesure de la circonférence de Terre par la méthode dite d'Ératosthène a, selon nous, deux inconvénients majeurs. Le premier, c'est que telle qu'elle apparaît dans les documents à finalité scolaire (notamment) cette activité présente de nombreux anachronismes (on peut donc questionner son caractère « historique »). Le second, c'est qu'elle laisse de côté une difficulté de taille, celle liée à la représentation de la propagation de la lumière pour une source très éloignée. Ce constat anéantit-il pour autant tout projet d'insertion de la mesure du périmètre terrestre par la méthode dite « d'Ératosthène » au sein de la sphère scolaire ? Si tel n'est pas le cas, quelles sont les conditions d'une telle insertion ? Détachées du contexte singulier de la découverte d'Ératosthène, ces questions renvoient à celle plus générale soulevée il y a quelques années par Martinand :

« Pour espérer réaliser le vœu de réintroduire l'histoire dans l'enseignement, il faut reprendre les problèmes à la base. Le problème fondamental doit sans doute être formulé ainsi : quelles sont les conditions d'articulation entre une approche du sens historique et une initiation aux connaissances opératoires ? » (Martinand, 1993, p. 95).

Question à laquelle la section suivante se propose d'apporter quelques éléments de réponses engageant l'élaboration d'un cadre spécifique d'utilisation scolaire d'éléments historiques.

Utilisation scolaire de l'histoire des sciences : vers l'idée de « reconstruction didactique »

Notre projet de cadre tel que défini plus haut est né d'un constat issu des recherches consacrées aux processus de transposition didactique. Selon ces recherches, l'étude et la prise en compte des contraintes propres au monde scolaire (plus particulièrement, celui de la classe de sciences) fondent la spécificité du projet de construction didactique, et par là-même, la spécificité de l'organisation des savoirs scolaires. Ceux-ci apparaissent le plus souvent selon un ordre qui a peu à voir avec l'ordre historique (Chevallard, 1991 & 1994). Autrement dit, **la genèse historique ne résiste pas au procès qui conduit le savoir du monde savant vers le monde scolaire** puisque celui-ci est « inévitablement finalisé dans un cadre scolaire » (Joshua & Dupin, 2003, p. 195). Cette disjonction entre genèse scolaire et genèse historique n'empêche pas (ainsi que nous l'avons montré précédemment) les plaidoyers en faveur d'une plus grande insertion de l'histoire des sciences dans l'enseignement. L'enseignement scientifique semble donc poursuivre deux objectifs difficilement conciliables en apparence :

- l'appropriation par l'élève d'un ensemble de savoirs dont l'ordonnement, régi par des contraintes scolaires, peut se trouver très éloigné de celui proposé par

⁵ Signalons toutefois qu'il existe, dans la littérature pédagogique, certaines activités consacrées à la découverte d'Ératosthène qui ont pris le parallélisme des rayons du Soleil comme un objectif d'apprentissage *per se*. Ces activités suggèrent de construire cette hypothèse sur la base d'observations locales d'ombres formées au pied de petits bâtons proches l'un de l'autre (Farges & *al.*, 2002 ; Ducourant, 2007). L'inconvénient de ce type d'activité c'est qu'il oblige les élèves à admettre que ce qui se produit localement (à l'échelle d'une feuille de papier par exemple) se produit de manière identique à l'échelle d'une portion du cercle terrestre.

l'anamnèse historique,

- la présentation plus conforme de la science telle qu'elle s'est faite.

La mise en fonctionnement conjointe de ces deux objectifs explique sans doute le fait que l'histoire des sciences du cours de science vise, au moins dans le cadre institutionnel, de permettre aux élèves de se construire une image de la science plus conforme à celle du monde savant (ce que ne permet pas finalement pas l'activité « Ératosthène » telle qu'elle apparaît dans la plupart des supports scolaires) et ne fait qu'effleurer l'idée qu'elle pourrait contribuer à l'appropriation de certains savoirs. Quant à nous, nous pensons qu'il est possible de concevoir l'insertion historique au sein du cours de science comme un *medium* d'apprentissage des concepts et des lois de la physique. Cependant, les limites posées par la transposition didactique, notamment, l'impossibilité de conserver l'ordre historique pour l'organisation scolaire des savoirs, rendent nécessaire la création d'un cadre permettant une telle insertion. Ce cadre sera appelé « reconstruction didactique ». Il se pose comme un moyen de faire de l'histoire des sciences un vecteur d'apprentissage tout en donnant l'opportunité aux élèves de s'immerger dans un contexte réellement historique.

Les chercheurs anglais Monk et Osborne proposent un « modèle pédagogique » en vue de structurer une séquence d'enseignement à partir d'un matériau historique (Monk & Osborne, 1997). Celui-ci comporte six étapes : la première consiste à présenter aux élèves un problème à résoudre. Dans la seconde étape, les élèves proposent diverses explications ou solutions en vue de résoudre le problème posé. La troisième étape est celle de l'introduction de l'histoire des sciences ; les théories ayant eu cours dans l'histoire en relation avec le problème à résoudre sont présentées aux élèves. Cette présentation peut prendre plusieurs formes : extraits de textes historiques, récits historiques, documents iconographiques, etc. Elle a pour but d'inciter les élèves à exprimer des points de vue divergents. Ceux-ci doivent ensuite imaginer une expérimentation permettant de déterminer le point de vue le plus valide (étape 5). L'avant-dernière étape (étape 6) consiste en l'étude approfondie des théories scientifiques actuelles. Enfin, la dernière étape (étape 7) permet une discussion sur les apprentissages réalisés grâce à l'introduction de la composante historique. Dans ce modèle, les théories ayant eu cours dans l'histoire sont directement liées aux idées préalables des élèves, ces deux aspects constituant pour le chercheur des objets à explorer : « *Selon notre modèle, les phénomènes présentés aux élèves doivent avoir fait l'objet de théories historiques pouvant faire écho aux idées des élèves* » (Monk & Osborne, 1997, p. 414 (notre traduction)). Le modèle des chercheurs anglais apparaît sous-tendu par deux hypothèses (1), (2) implicites :

(1) Il existe des ressemblances entre les idées des élèves et celles des savants. Cette hypothèse est étayée par l'idée que les errances et les polémiques dont l'histoire des sciences est témoin, apparaissent souvent comme des indicateurs plutôt performants des notions qui risquent de poser certaines difficultés d'apprentissage (Saltiel & Viennot, 1984).

(2) Il existe une expérience permettant de valider certaines idées d'élèves. Cette hypothèse repose sur l'idée d'expérience cruciale dont le rôle dans la création du savoir scientifique demeure largement débattue (Duhem, 1906).

L'un des ressorts pédagogiques récurrents des séquences visant l'apprentissage par l'intermédiaire du matériau historique est sans aucun doute la création des conditions permettant l'installation d'une controverse au sein de la classe (Merle, 2002 ; Guedj, 2005 ; Crépin, 2009). Il s'agit de choisir une question dont on prévoit qu'elle peut donner lieu à

un débat au sein de la classe, et de concevoir un parcours cognitif qui prend appui sur ce débat et qui conduit les élèves vers la construction d'un savoir scientifique donné. Cette modalité d'utilisation de l'histoire des sciences nécessite une connaissance préalable de l'état conceptuel des élèves, en particulier des idées et des raisonnements risquant de faire obstacle à l'apprentissage envisagé. Elle nécessite également que la question historique fasse sens dans la classe pour favoriser sa dévolution et son appropriation par les élèves, et susciter l'émergence de propositions de résolution. Le choix du problème à extraire hors de l'écologie historique se voit donc assujéti aux contraintes qui fondent l'écologie didactique (difficultés spécifiques au savoir à enseigner, idées préalables des élèves, temps didactique, ...). Dans une telle perspective, l'histoire des sciences est une source d'inspiration qui permet aux chercheurs d'identifier et d'exporter un problème à résoudre au sein de la classe. En revanche, les stratégies de résolution du problème posé apparaissent souvent affranchies des idées clés historiquement fécondes.

À titre d'exemple, dans le modèle de Monk et Osborne, les modalités de résolution du problème posé sont expérimentales et paraissent indépendantes des solutions historiques. Il semble pourtant que l'on puisse aller plus loin en poussant l'aide historique jusqu'à la prise en compte d'idées historiquement fécondes, quitte à en proposer une réorganisation spécifique. Il ne s'agit pas d'inventer une histoire des sciences *ad hoc*, ni de faire de la « pseudo-histoire » (Matthews, 1994, p. 72), mais de tenir compte des contraintes qui pèsent sur l'apprentissage d'une notion donnée pour proposer une reconstruction à la fois valide et adaptée. Les éléments historiques retenus par le didacticien, ainsi que la façon dont celui-ci choisit de les organiser peuvent conduire à des reconstructions différentes de celles proposées par les historiens des sciences. Les motivations étant, de part et d'autre, spécifiques, elles induisent des lectures particulières dont la légitimité est garantie, non par une éventuelle proximité avec un parcours idéal (qui reste de toute façon inaccessible⁶), mais par la « fécondité » (Berthelot, 2002, p. 234) du programme qui les sous-tend :

« Il n'y a donc pas de lecture plus vraie ou plus fausse [de l'histoire des sciences, NDLR] ; pas davantage de lecture neutre ou de lecture n'impliquant pas de décision préalable, dans la définition de l'aire des événements retenus (notamment dans l'approche événementielle) ou dans celle des matériaux, des entités, des mécanismes reconnus comme pertinents. À chaque fois, un principe de sélection s'applique, relevant, en dernière analyse, du programme adopté. Chaque récit, chaque reconstruction, chaque modélisation est donc une stylisation, ordonnée à un principe de lecture déterminé. Ce principe de lecture est l'effet d'un programme, c'est-à-dire d'une manière générique d'expliquer et de donner sens à un objet » (Berthelot, 2002, p. 242).

Parmi les différents programmes (rationnels, sociologiques, biographiques, etc.), admettons qu'il existe un programme de *reconstruction didactique*, dont la finalité est l'élaboration d'un outil d'apprentissage, et qui se voit commandé par :

- l'analyse du savoir à enseigner,
- l'analyse des difficultés des élèves,
- la nécessaire visibilité du matériau historique pour les élèves⁷,

⁶ Voir à ce sujet Koyré A. (1973) *Perspectives sur l'histoire des sciences - Étude d'histoire de la pensée scientifique*, pp. 390-399. Gallimard.

⁷ La question de la visibilité de l'histoire des sciences reste ouverte. Nous voyons un intérêt fort à organiser un cours sur la base d'éléments historiques qui peuvent permettre par exemple de prendre la mesure de certaines difficultés d'ordre psycho-cognitives. Dans ce cas, l'histoire des sciences devient une aide pour

La fécondité d'un tel programme peut être ensuite attestée par les effets de l'utilisation de cet outil sur l'apprentissage. Associer histoire des sciences et didactique revient à créer une dialectique entre deux enquêtes, l'une, centrée sur les raisonnements des élèves, l'autre tournée vers l'évolution des idées dans l'histoire des sciences selon une approche rationnelle. Nous suivons en cela la voie ouverte par Dorier qui s'intéresse à l'épistémologie « *en ce qu'elle nous permet de mieux comprendre les liens entre la constitution du savoir dans la sphère savante d'une part et l'enseignement et l'apprentissage de ce savoir d'autre part* » (Dorier, 2000, p. 16).

La dialectique envisagée permet :

- 1) de préciser les contraintes didactiques auxquelles le savoir est soumis dans le cadre scolaire,
- 2) d'assujettir l'enquête historique à ces contraintes de façon à en faire un outil cognitif, sorte d'artefact didactique spécifique à l'écologie didactique.

Dans le cadre de la transposition didactique cette étape prend le nom de « décontextualisation » : elle consiste à quitter l'instance productrice du savoir savant. S'ensuit une étape de « recontextualisation » au cours de laquelle le savoir prend place dans le système didactique sous une forme dissemblable à celle qu'il prend au sein de la sphère savante. Appliqué à l'histoire des sciences, ce processus de transposition donne naissance à ce que nous appelons une « reconstruction didactique ». Celle-ci est contrôlée par l'explication et la détermination de contraintes didactiques spécifiques (attendus de l'enseignement en termes conceptuels, difficultés sous-jacentes, visibilité du matériau historique...).

Notre programme vise l'élaboration d'une séquence d'enseignement et renvoie pour partie aux principes fondateurs de l'Ingénierie didactique qui inclut une prise en compte de trois types de contraintes (Artigue, 1990) :

- épistémologiques (le calcul du périmètre terrestre s'appuie sur plusieurs hypothèses dont celle du parallélisme des rayons du Soleil ; celle-ci est délicate car le Soleil est certes une source située à l'infini mais n'est pas une source ponctuelle) ;
- cognitifs (l'idée que la propagation de la lumière du Soleil peut être figurée en des rayons parallèles constitue une difficulté majeure et s'oppose à une figuration spontanée en rayons divergents issus d'un point) ;
- didactiques (l'objectif d'une séquence d'enseignement construite sur la base de la mesure historique du périmètre terrestre par Ératosthène doit prendre en compte la difficulté énoncée ci-dessus et viser une nouvelle schématisation de la lumière du Soleil par les élèves)

Nous ajoutons à ces trois contraintes le fait que la « reconstruction didactique » vers laquelle nous tendons s'appuie sur une réorganisation d'idées explicitement situées historiquement et inclut, de ce fait, l'utilisation d'un matériau reconnu comme historique et pouvant être identifié comme tel par les élèves.

Proposition de reconstruction didactique d'une mesure historique du périmètre terrestre

La reconstruction que nous avons imaginée (voir tableau 1) émerge de la connaissance que

l'enseignant et peut rester totalement invisible pour les élèves.

nous avons des difficultés des élèves à propos de la propagation de la lumière du Soleil et de la nécessité de présenter de manière explicite des éléments historiquement situés. Le procédé choisi est une adaptation du modèle pédagogique de Monk et Osborne, exception faite de l'étape 5 dite « expérimentale » qui se voit remplacée par une activité de modélisation (étape 4 du tableau 1 en page suivante). Le texte utilisé est une traduction française d'un extrait du *De Motu* et se trouve en annexe de cet article. Étant donné que la procédure utilisée ne nécessite pas de calcul d'angle par la voie trigonométrique, cette activité est adaptée au cycle 3 et au collège.

La première étape consiste en la présentation d'un fait d'observation (pas d'ombre au pied des gnomons situés à Assouan, une ombre au pied de ceux situés à Alexandrie, à midi, le jour du solstice d'été). Les élèves sont invités à proposer un schéma d'explication dans lequel plusieurs modélisations sont susceptibles de s'exprimer (rayons divergents, parallèles, ligne entre Alexandrie et Assouan plate ou courbe...). Ces schémas d'explication sont discutés lors d'un débat collectif, et mis en perspective d'une explication qui semble avoir été suggérée par Anaxagore pour proposer une première estimation de la distance Terre-Soleil⁸. C'est l'étape 2. S'ensuit une étape d'étude historique dont l'objectif est d'approcher l'explication et la méthode décrites par Cléomède. Les élèves sont invités à expliciter l'architecture du texte, à retrouver les hypothèses nécessaires au calcul du périmètre terrestre, et à reproduire pas à pas la construction décrite entre les lignes 16 et 19 (voir figure 2). À l'issue de cette étape (étape 3), les approximations et les choix faits par Cléomède sont discutés à la lumière des savoirs astronomiques en jeu (diamètre apparent du Soleil, rapport des distances, échelles...). L'étape 4 vise la construction de la géométrisation de la propagation de la lumière du Soleil à **partir d'un point**. L'idée que le Soleil n'est pas une source ponctuelle peut-être discutée mais ne fait pas l'objet d'un travail spécifique ici.

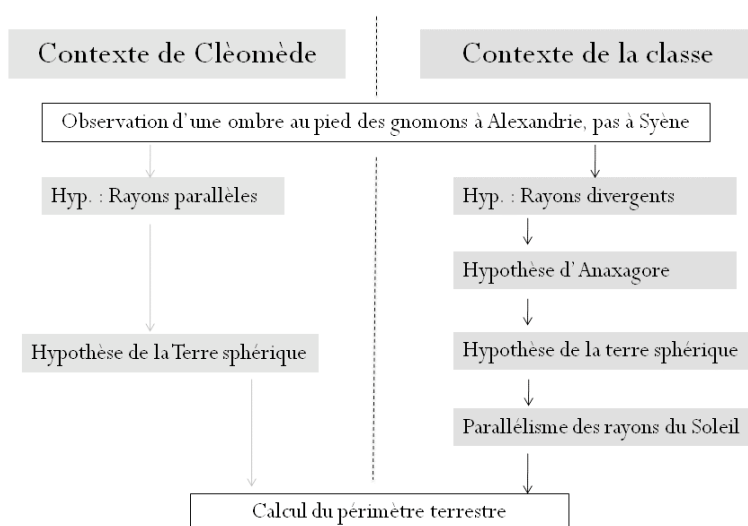


Figure 5 - Cet organigramme met en perspective l'approche choisie par Cléomède dans le *De motu* pour aborder la mesure du périmètre terrestre et notre propre reconstruction

⁸ Cette explication repose sur l'idée que la ligne Assouan et Alexandrie est plate et sur une géométrisation de la propagation de la lumière du Soleil en rayons divergents (explication sous-tendue par l'idée que le Soleil est une source proche).

<p>Étape 1</p> <p>Présentation d'un phénomène / d'un problème à résoudre</p>	<p><i>Au solstice d'été, à midi, lorsque le Soleil est au milieu de sa course, un bâton planté verticalement projette une ombre à Alexandrie alors qu'aucune ombre n'est visible à Syène, ville située sur le même méridien⁹.</i></p> <p><i>Faites un schéma où vous expliquerez les raisons de ce phénomène.</i></p>
<p>Étape 2</p> <p>Propositions d'explication et confrontation</p>	<p>Sur les schémas des élèves :</p> <ul style="list-style-type: none"> - La propagation de la lumière du Soleil est figurée en lignes parallèles - La propagation de la lumière du Soleil est figurée en rayons divergents - La ligne reliant Alexandrie à Syène est courbe ou droite <p><i>Ces observations ont probablement permis à Anaxagore de calculer la première mesure de la distance Terre-Soleil. Ce calcul repose sur les hypothèses suivantes :</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>La Terre est plate</i> - <i>Le Soleil est proche et ses rayons divergent</i> <p><i>Comment a-t-il pu procéder ? Discuter cette méthode. Est-elle toujours valable si l'on considère que la Terre est sphérique et le Soleil très éloigné ?</i></p>
<p>Étape 3</p> <p>Étude historique</p>	<p>L'étude historique se fait sur la base du texte de Cléomède.</p> <p>(1) Les élèves sont invités à discuter :</p> <ul style="list-style-type: none"> - L'architecture du texte - Les hypothèses nécessaires au calcul du périmètre terrestre - L'instrument utilisé (le « cadran concave ») <p>(2) Les élèves sont invités à reproduire pas à pas la construction décrite entre les lignes 16 et 29 (voir figure 2), puis à vérifier le résultat de la mesure.</p> <p>(3) Les sources d'incertitudes sont discutées.</p>
<p>Étape 4</p> <p>Modélisation et conceptualisation</p>	<p><i>Que pensez-vous de la 3^{ème} hypothèse énoncée par Cléomède ? Comment peut-on montrer expérimentalement que deux droites issues d'un point très éloigné peuvent être considérées en un certain lieu comme parallèles ?</i></p> <p>(1) On peut réaliser l'expérience suivante : deux fils de 2 m de long sont attachés à une extrémité à un même clou. Lorsque les fils sont tendus, leurs extrémités sont quasi-parallèles.</p> <p>(2) Ce phénomène est expliqué à partir de la propriété de la somme des angles dans un triangle rectangle dont l'angle au sommet tend vers zéro (voir figure 5).</p>

Tableau 1 - Proposition de reconstruction didactique à partir du modèle pédagogique de Monk et Osborne pour approcher la géométrisation de la propagation de la lumière du Soleil à partir du récit de Cléomède

La mise en perspective de l'approche choisie par Cléomède et notre propre reconstruction (figure 5) révèle deux parcours hétéromorphes. La dissymétrie entre les deux approches

⁹ On suppose comme acquises les notions suivantes : solstice, méridien, midi solaire, ombre, propagation rectiligne de la lumière, angles alternes égaux.

porte sur les présupposés associés à la modélisation de la propagation de la lumière du Soleil. Cette dissymétrie implique une reconstruction *de facto* que nous avons choisi de structurer autour de l'hypothèse d'Anaxagore concernant la géométrie terrestre. La dimension historique s'incarne dans l'utilisation d'un texte de première main : celui de Cléomède auquel nous n'avons apporté que de mineures modifications¹⁰ (voir annexe 1). Elle s'appuie également sur un travail géométrique visant un passage à la limite (complexe) illustré par la figure 6 ci-dessous.

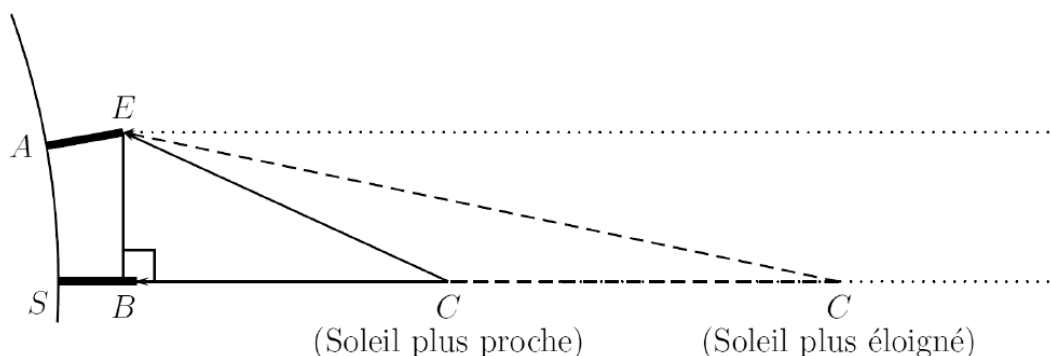


Figure 6 - Plus le Soleil C s'éloigne et plus l'angle C tend vers zéro et plus les droites passant par les points E et B tendent à devenir parallèles entre-elles

L'idée de ce travail est de partir de la représentation spontanée des élèves (voir figure 4) et de leur montrer que lorsque le point C se déplace le long de la droite SB en s'éloignant de la Terre, l'angle C devient proche de zéro. Si l'on considère que la somme des angles dans un triangle est toujours égale à 180° et que l'angle B est un angle droit, alors lorsque C tend vers zéro, l'angle E tend vers 90° . Ce passage à la limite conduit à conclure que lorsque le Soleil est très éloigné de la Terre, les droites passant respectivement par E et B sont parallèles entre-elles. Les limites de ce travail géométrique c'est qu'il s'appuie sur l'idée que le Soleil est une source lumineuse ponctuelle, ce qui est une approximation à discuter explicitement avec les élèves.

Conclusion

L'analyse qui précède et le cadre auquel elle a conduit viennent confirmer l'idée selon laquelle « *tout projet de construction didactique des savoirs est spécifique au monde l'école, hétérogène avec les pratiques savantes des savoirs, et irréductible aux genèses historiques* » (Chevallard, 1991). Et même s'il arrive qu'une certaine proximité existe entre les idées des élèves et celles des Anciens et que celle-ci favorise effectivement, par le jeu de l'identification, l'appropriation d'un problème et l'émergence d'un débat (Guedj, 2005 ; de Hosson & Kaminski, 2006), la thèse « récapitulacioniste » selon laquelle il serait possible de faire passer l'individu par des étapes identiques à celles propres au développement historique de la science (Langevin, 1950, p. 215) ne trouve, dans notre démarche, aucun écho favorable.

Au contraire, l'élaboration de séquences d'enseignement se donnant pour but d'articuler « *une approche du sens historique et une initiation aux connaissances opératoires* » (Martinand, *op.cit.*) doit, selon nous, réussir le pari de concilier l'idée d'une reconstruction

¹⁰ Nous avons supprimé les passages dans lesquels Cléomède évoque la notion de « plus grand cercle ».

contrainte par des exigences didactiques (un « programme » spécifique au monde de l'école), tout en faisant une place importante au matériau historique lui-même ; deux exigences qui s'avèrent parfois largement antagoniques. L'une des difficultés de cet exercice est d'identifier le matériau historique pertinent et de lui assigner une juste place afin que son exploitation en classe prenne sens. Une connaissance approfondie des idées des élèves à propos d'un savoir donné peut guider ce double processus d'extraction puis d'insertion et doit s'accompagner d'une enquête historique minutieusement menée.

Références bibliographiques

- ARTIGUE M. (1990) Ingénierie didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 9 (3), 283-307.
- BERTHELOT J.M. (2002) Pour un programme sociologique non réductionniste en étude des sciences. *Revue Européenne des sciences sociales*, 40 (124), 233-252.
- BOWEN A. (2008) Cleomedes and the measurement of the Earth: a question of procedures. *Centaurus*, 50 (1-2), 195-204.
- CHEVALLARD Y. (1994) Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In. G. Arzac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand, Andrée Tiberghien (Eds), *La transposition didactique à l'épreuve*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD Y. (1991) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage (2^{ème} édition revue et augmentée, en coll. avec Marie-Alberte Joshua).
- CREPIN P. (2009) Problématisation comparée d'un débat scolaire et d'une controverse historique à propos de l'origine des coquilles fossiles. *6^{ème} journées scientifiques de l'ARDIST*, Nantes, 14-16 octobre 2009.
- de HOSSON C. & KAMINSKI W. (2006) Un support d'enseignement du mécanisme optique de la vision inspiré de l'histoire des sciences : compte-rendu d'innovation. *Didaskalia*, 28, 101-124.
- DI FOLCO E. & JASMIN D. (2003) Mesurer la Terre avec un bâton : sur les pas d'Ératosthène. *ASTER*, 36, 163-167.
- DORIER J.L. (2000) Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire, perspectives théoriques sur leurs interactions. *Cahiers Leibniz*, n°12 : Grenoble.
- DUCOURANT D. (2007) L'observation d'Ératosthène en cinquième avec deux punaises. *BUP*, 101, 825-841.
- DUHEM P. (1906) *La Théorie physique, son objet, sa structure*. Paris : Vrin.
- FARGES H., DI FOLCO E., HARTMANN M. & JASMIN D. (2002) *Mesurer la Terre est un jeu d'enfant : Sur les pas d'Ératosthène*. Paris : Le Pommier.
- GOLDSTEIN B. (1984) Eratosthenes on the "measurement" of the Earth. *Historia mathematica*, 11, 411-416.
- GOULET R. (1980) *Cléomède : Théorie élémentaire*. Vrin : Paris.

- GUEDJ M. (2005) Utiliser des textes historiques dans l'enseignement des sciences physiques en classe de seconde des lycées français : compte rendu d'innovation. *Didaskalia*, 26, 75-95.
- HULIN N. (1984) L'histoire des sciences dans l'enseignement scientifique. *Revue Française de Pédagogie*, 66, 15-28.
- JOSHUA S. & DUPIN J.J. (2003) *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. PUF.
- KOYRE A. (1973) Perspective sur l'histoire des sciences, *Étude d'histoire de la pensée scientifique*. Gallimard : Paris.
- LANGEVIN P. (1950) *La pensée et l'action*. Les éditeurs français réunis : Paris.
- MARTINAND J.L. (1993) Histoire et didactique de la physique et de la chimie, quelles relations. *Didaskalia*, 2, 89-99.
- MATHE S., MEHEUT M. & de HOSSON C. (2008) La démarche d'investigation au collège : quels enjeux ? *Didaskalia*, 32, 41-76.
- MATTHEWS M. (1994) *Science Teaching: The Role of History and Philosophy of Science*. New York: Routledge.
- MERLE H. (1994) Sensibilisation à l'histoire des sciences d'enfants de 9 à 11 ans : l'expérience d'Ératosthène. *Actes des 17^{ème} journées internationales sur l'enseignement des sciences*, Giordan A., Martinand J.L. & Raichvarg D. (eds), pp. 475-480.
- MERLE H. (2002) Histoire des sciences et sphéricité de la Terre : compte-rendu d'innovation. *Didaskalia*, 20, 115-136.
- MONK M. & OSBORNE J. (1997) Placing the History and Philosophy of Science on the Curriculum: A Model for the Development of Pedagogy. *Science Education*, 81 (4), 405-424.
- SALTIEL E. & VIENNOT L. (1984) What do we learn from similarities between historical ideas and the spontaneous reasoning of students? In P. Linjse (Ed.) *The many faces of teaching and learning mechanics*. Utrecht : GIREP/SVO/UNESCO.
- BOEN hors-série n°2 du 30 août 2001.
Documents d'accompagnement des programmes de physique de la classe de seconde, MEN, 2000.
- BOEN spécial n°6 du 28 août 2008.
- BOEN spécial du 4 avril 2010.

Annexe

Extrait du *De motu* de Cléomède dans la traduction de R. Goulet (1980)

Qu'il soit admis pour nous, premièrement que Syène et Alexandrie sont établies sous le méridien, deuxièmement que la distance entre les deux cités est de 5000 stades, troisièmement que les rayons envoyés de différents endroits du soleil sur différents endroits de la Terre sont parallèles ; en effet, les géomètres supposent qu'il en est ainsi. Quatrièmement que ceci soit admis comme démontré auprès des géomètres, que les droites sécantes des parallèles forment des angles alternes égaux, cinquièmement que les arcs de cercle qui reposent sur des angles égaux sont semblables, c'est à dire qu'ils ont la même similitude et le même rapport relativement aux cercles correspondants, ceci étant démontré aussi chez les géomètres. Lorsqu'en effet les arcs de cercle reposent sur des angles égaux, quel que soit l'un (d'entre eux) s'il est la dixième partie de son propre cercle, tous les autres seront les dixièmes parties de leurs propres cercles.

Celui qui pourrait se prévaloir de ces faits comprendrait sans difficulté le cheminement d'Ératosthène qui tient en ceci : il affirme que Syène et Alexandrie se tiennent sous le même méridien (...). Il dit aussi, et il en est ainsi, que Syène est située sous le tropique de l'été. À cet endroit, au solstice d'été, lorsque le Soleil est au milieu du ciel, les gnomons des cadrans solaires concaves sont nécessairement sans ombres, le soleil se situant exactement à la verticale (...). À Alexandrie à cette heure-là, les gnomons des cadrans solaires projettent une ombre, puisque cette ville est située davantage vers le nord que Syène (...).

Si nous nous représentons des droites passant par la Terre à partir de chacun des gnomons, elles se rejoindront au centre de la Terre. Lorsque donc le cadran solaire de Syène est à la verticale sous le soleil, si nous imaginons une ligne droite venant du soleil jusqu'au sommet du gnomon du cadran, il en résultera une ligne droite venant du soleil jusqu'au centre de la Terre. Si nous imaginons une autre ligne droite à partir de l'extrémité de l'ombre du gnomon et reliant le sommet du gnomon du cadran d'Alexandrie au soleil, cette dernière ligne et la ligne qui précède seront parallèles, reliant différents points du Soleil à différents points de la Terre. Sur ces droites donc, qui sont parallèles, tombe une droite qui va du centre de la terre jusqu'au gnomon d' Alexandrie, de manière à créer des angles alternes égaux; l'un d'eux se situe au centre de la Terre à l'intersection des lignes droites qui ont été tirées des cadrans solaires jusqu'au centre de la Terre, l'autre se trouve à l'intersection du sommet du gnomon d'Alexandrie et de la droite tirée de l'extrémité de son ombre jusqu'au soleil, à son point de contact avec le gnomon. Et sur cet angle s'appuie l'arc de cercle qui fait le tour de la pointe de l'ombre du gnomon jusqu'à sa base tandis que celui qui est proche du centre de la terre s'appuie l'arc qui va de Syène à Alexandrie. Ces arcs de cercle sont donc semblables l'un à l'autre en s'appuyant sur des côtés égaux. Le rapport qu'a l'arc du cadran avec son propre cercle, l'arc qui va de Syène à Alexandrie a ce rapport aussi.

Mais on trouve que l'arc du cadran est la cinquantième partie de son propre cercle. Il faut donc nécessairement que la distance qui va de Syène à Alexandrie soit la cinquantième partie du plus grand cercle de la Terre. Et elle est de 5000 stades. Le cercle dans sa totalité fait donc 250 000 stades. Voilà la méthode d'Ératosthène.