CALCULATRICE ET PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Luca DEL NOTARO
Enseignant en division élémentaire[1]
Département de l'Instruction Publique, Genève

Ruhal FLORIS
Chargé d'enseignement, équipe DiMaGe
Institut Universitaire de Formation des Enseignants, Université de Genève

Cet article analyse une expérience inédite d'utilisation de la calculatrice dans l'enseignement de la numération pour des jeunes élèves âgés entre 6 et 7 ans (1ère et 2ème année de la scolarité obligatoire à Genève). Plus particulièrement, à travers la description de notre dispositif d'enseignement et de recherche, nous présenterons quelques nouvelles activités spécifiquement pensées pour ce type d'enseignement, de même que nous essayerons d'analyser leurs principaux apports à la construction des connaissances numériques chez l'élève.

Rares sont les travaux spécifiquement consacrés à la calculatrice chez les jeunes élèves de l'école élémentaire (Wheatley & Shumway, 1992 ; Favre, 1994). À l'instar de la perspective adoptée dans d'autres niveaux d'enseignement (Floris & Conne, 2007), nous prenons l'option de ne pas considérer la calculatrice comme un simple outil de calcul remplaçant le travail papier/crayon, mais de l'intégrer en un milieu pertinent pour l'apprentissage à travers des situations contraignant le jeu de l'élève et de là, faisant évoluer ses connaissances dans la perspective de la Théorie des Situations (Brousseau, 1986 & 1998).

Au débat traditionnel sur les avantages de l'utilisation de la calculatrice par rapport aux méthodes usuelles de l'enseignement du nombre, cet article apporte l'évidence de la richesse de l'investigation possible des mathématiques permise par l'instrument. À certaines conditions, la calculatrice est porteuse de contraintes et de potentialités, permettant de la considérer comme un réservoir de modèles mathématiques. Parmi ces conditions, la situation proposée et le rôle de l'enseignant sont essentiels.

Nous poursuivons l'article par la description de la situation, puis par celle du dispositif de

[1] Enseignant ayant conçu et mené l'expérimentation décrite.

recherche. Quelques balises théoriques seront ensuite proposées, sans analyse a priori de la situation, que nous avons choisi de présenter succinctement au cours et en fin d'article. La richesse de la situation est telle, qu'une analyse pourrait faire l'objet d'un texte à elle seule. Le paragraphe suivant présentera les observations faites sur l'étude de la parité des nombres, puis nous exposerons dans quelles conditions la multiplication a pu être introduite. La partie suivante de l'article concerne le travail avec des « grandes valeurs numériques » qui a permis d'évaluer la potentialité des connaissances acquises précédemment par les élèves. Une observation fine du travail de deux élèves complète cette partie de l'article. L'étonnante découverte des nombres premiers sera ensuite relatée. Après plusieurs mois d'expérimentation, quelle est l'autonomie des élèves par rapport à la calculatrice ? C'est à cette question que se propose de répondre la dernière partie du texte, qui sera suivie d'éléments de conclusion.

La situation des « cibles »

Dans un précédent article (Del Notaro & Floris, 2005), nous avons présenté un certain nombre d'activités ayant pour but de développer une culture mathématique de la calculatrice à l'école élémentaire et qui contribuent, selon nous, à la construction du nombre entier. Ces activités s'appuient sur la fabrication de bandes numériques (encadré 1).

> Sur des rouleaux de papier du type utilisé pour les calculatrices ou les caisses enregistreuses, écrire la suite des nombres entiers naturels en respectant un espacement régulier sur le papier. Chaque nombre est suivi d'un point. Si l'élève ne peut continuer la suite des nombres parce que ses connaissances s'épuisent, il peut utiliser la calculatrice en exploitant la touche +1 ou la touche = qui ajoute toujours la valeur du deuxième terme de l'addition.

Encadré 1 - La bande numérique

L'observation et l'analyse des données relatives à ces activités nous ont permis de montrer comment la calculatrice peut être exploitée comme un moteur très puissant amenant l'élève à questionner des propriétés numériques et arithmétiques fondamentales[2].

Pour ce deuxième volet de la recherche, nous avons développé une situation dite des « cibles » (voir encadré 2) qui s'inscrit aussi dans un processus d'investigation du nombre entier et de ses propriétés. Dans cet article, nous montrons ce que cette situation a produit en termes de connaissances mathématiques. En effet, comme on le verra par la suite, « les cibles » ont amené la classe à aborder de manière assez aisée des contenus comme la parité, les multiples et diviseurs, la multiplication, savoirs normalement destinés à des élèves plus âgés[3].

Le choix des « nombres cibles » à traiter est donc guidé par les variables décrites dans l'encadré ci-dessus. Afin d'amplifier le registre des expériences numériques et donc de

---

[2] Grâce au principe du +1, moteur de la construction de la suite des nombres naturels selon les règles de Peano.

[3] Nous utilisons ici les termes mathématiques conventionnels, bien que dans la classe des formulations inventées par les élèves ont été souvent utilisées. Si ces dernières on fait l'objet d'une utilisation significative et efficace, le vocabulaire mathématique conventionnel, quant à lui, a été introduit progressivement en fonction de l'état d'avancement des objets de savoir (voir plus loin encadré 7).

favoriser la mise en relation des relations sous-jacentes, nous puisons dans ce réservoir de variables les tâches à soumettre aux élèves. Bien entendu, le choix de celles-ci est tributaire de la nature des expériences précédentes. Par exemple, à une série de tâches avec des cibles paires nous avons fait suivre des exercices avec des cibles impaires et à celles-ci, encore, des cas particuliers comme les cibles avec des nombres premiers.

Le lecteur pourra également prendre connaissance d'une phase de travail avec des « grandes cibles ». À la suite d'une conjoncture de passage au nouvel an 2006, nous avons tenté d'explorer la faisabilité et le transfert des connaissances à ces nombres plus grands et inhabituels pour des jeunes élèves de l'école élémentaire.

Pour les productions des élèves, nous avons utilisé des feuilles de format A3 prises horizontalement et quadrillées à 1 cm (encadré 3, donné en annexe 1). Les cibles sont inscrites dans la première colonne de gauche alors que les possibles diviseurs sont distribués dans la ligne du haut de la page comme le montre le croquis ci-dessous. La tâche des élèves consiste à remplir les cases dont l'intersection est le « nombre cible » avec un de ses diviseurs.

À l'aide de la calculatrice, chercher les nombres qui permettent, par additions itérées, d'atteindre des valeurs-cibles entières. Les nombres cherchés correspondent aux diviseurs de la cible. Par exemple, la cible 48 peut être atteinte en additionnant de manière répétée 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 et le 48.

Plusieurs configurations et suites de nombres-cibles sont possibles. En voici quelques-unes, utilisées dans notre dispositif :

- De 1 en 1 (nombres pairs et impairs consécutifs) : 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

- De 2 en 2 (nombres pairs) : 40, 42, 44, 46, 48, 50, 51, 52, 53, 54

- De 2 en 2 (nombres impairs) : 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69

- De 10 en 10 (nombres pairs à intervalles réguliers) : 8, 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 88, 98

- De 4 en 4 (nombres impairs à intervalles réguliers) : 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 59

- De 3 en 3 (nombres pairs et impairs à intervalles réguliers) : 62, 65, 68, 71, 74, 77, 80, 83, 86, 89

- Nombres pair et/ou impairs sans configuration précise : 13, 28, 41, 67, 75, 99, 102, 115, 128

Encadré 2 - La situation « des cibles »

Le dispositif d'enseignement/recherche et le jeu de tâches

Notre dispositif de recherche est le résultat d'une collaboration étroite entre un enseignant d'école élémentaire et un chercheur en didactique des mathématiques de l'Université de Genève. Pendant deux ans, le chercheur s'est rendu dans une classe de 2ème primaire (année scolaire 2004/05) puis dans une classe de 1ère primaire (année scolaire 2005/06) pour observer une partie des leçons organisées autour de la calculatrice. Il s'agit principalement d'une observation des choix didactiques et des faits et gestes de l'enseignant et de ses élèves. Le chercheur n'est intervenu que dans l'analyse a posteriori des séquences d'enseignement observées ou alors dans quelques occasions où de brefs entretiens avec des élèves s'avéraient nécessaires. Cette collaboration repose sur un principe de régularité ainsi que sur une démarche d'analyse systématique des données permettant une régulation des séquences d'enseignement suivantes. Des observations régulières (hebdomadaires ou toutes les deux semaines selon les périodes de l'année scolaire) ont été organisées.

La démarche de l'enseignant observé se situe dans une perspective de « jeu de tâches », notion proposée par Conne (2003), Del Notaro & Scheibler (2003) et Favre (2008)[4]. Dans le cadre de leurs recherches, ces auteurs nomment ainsi l'ensemble des questions et relances construites au cours du temps à travers le jeu de l'expérimentateur avec le jeu de l'élève et le milieu, dans le but d'étudier les potentialités de ce dernier. En classe, nous avons transposé quelque peu cette posture de recherche, principalement du fait de la finalité didactique de la situation : l'apprentissage par l'élève de propriétés des nombres. Néanmoins, les longues périodes d'investigation dévolues aux élèves permettent à l'enseignant de se positionner en tant qu'observateur de leur travail et le temps entre deux séances de réfléchir aux relances, qui seront parfois improvisées (voir plus loin « La cible 2006 »). Ce jeu de tâches est ainsi un véritable moteur pour l'enseignant et lui permet de ne pas se confiner dans une analyse dichotomique en termes de réussite-échec des productions d'élèves.

Les leçons ont été dispensées selon deux modalités : avec toute la classe ou avec une demi-classe (une dizaine d'élèves environ). Chaque séance est organisée selon une alternance de parties de recherches individuelles (environ 45 minutes), avec ou sans calculatrice, suivies de moments collectifs visant le rappel de certaines découvertes précédemment faites par les élèves ou alors des mises en commun de nouveaux résultats[5]. Une séquence d'enseignement autour de la cible commence, en règle générale, par l'analyse préalable par l'enseignant des propriétés du nombre recherchées[6]. En effet, cette situation a le grand avantage d'être modulable selon la « nature » des nombres choisis. En d'autres termes, on ne sollicitera pas les mêmes connaissances si les valeurs des cibles se suivent ou si elles ne sont formées que par des nombres se terminant par 6. Ce travail d'exploration fine des relations numériques sous-jacentes aux cibles nourrit le jeu de tâches que l'enseignant réinjecte dans la situation didactique.

Quant au matériel, chaque élève dispose de deux modèles de calculatrices de la marque *Texas Instruments* : la TI-106 et la TI-34 II utilisées en alternance selon les besoins de la tâche[7]. La calculatrice TI-106 est en dotation dans les classes de 3ème et 4ème de l'enseignement primaire genevois. Elle permet de faire les quatre opérations, de calculer la racine carrée et les pourcentages. Elle dispose en outre d'une fonction de mémoire avec possibilité d'effacement ainsi que d'une touche de remise à zéro et de correction. Une touche permet de changer les nombres en leurs opposés. Dans la suite du texte, nous la nommerons « calculette ». Le modèle TI-34 II qui est offert aux élèves de 5ème année (10-11 ans) est un modèle de type scientifique avec un écran de deux lignes qui

---

[4] Cette notion est travaillée dans le groupe de recherches de Didactiques des Mathématiques de l'Enseignement Spécialisé (DDMES, Suisse) dont l'un des deux auteurs fait partie (www.ssrdm.ch/ddmes).

[5] On trouvera plus loin un extrait de discussion illustrant ce travail collectif.

[6] Certaines tâches toutefois sont le produit d'une conjoncture favorable à l'investigation des potentialités du milieu. Par ce fait elles peuvent parfois échapper, du moins partiellement, à la procédure de l'analyse préalable (cf. grandes cibles).

[7] La TI34II correspond au cahier de charges défini dans l'annexe II du document d'accompagnement du ministère d'éducation nationale français « Utiliser les calculatrices en classe »; www.snuipp.fr/IMG/pdf/Utliser_la_calculatrice_C2_et_C3.pdf (lien consulté en juillet 2010).

conserve l'affichage du calcul et ce dernier reste en mémoire. L'enseignant a utilisé, quant à lui, des versions transparentes de ces modèles utilisables sur le rétroprojecteur et favorisant les mises en commun pour l'ensemble des élèves de la classe.

Le matériel nécessaire à la tâche de la cible se complète, comme on l'a vu plus haut, d'une feuille en papier de format A4 ou A3 sur laquelle est représenté un tableau à double entrée. Cette feuille, utilisée plutôt horizontalement pour avoir plus de colonnes de diviseurs possibles et donc exploiter des valeurs de cibles plus grandes, permet aux élèves de noter les résultats de leurs recherches. Pour faciliter les parties collectives de mise en commun, l'enseignant reproduit systématiquement un quadrillage identique sur l'ensemble de la surface du tableau noir avec les cibles soumises à l'investigation.

Ce dispositif de recherche a produit un corpus d'analyse riche et varié : parallèlement aux séquences d'enseignement filmées nous disposons de multiples productions d'élèves ainsi que d'analyses préalables de tâches sur les cas de figures de cibles les plus diverses (cibles consécutives, cibles alternées, cibles paires et impaires, cibles constituées par des nombres premiers, grandes cibles, etc.). Les notes prises par l'enseignant viennent compléter ce corpus.

Balises théoriques : milieu, calculatrice, « mini-culture »

Il nous paraît judicieux d'introduire ici quelques éléments théoriques. En quoi peuvent-ils être utiles au lecteur qui s'intéresse principalement aux activités décrites ici ? Nous déclarons que la situation proposée favorise l'apprentissage de propriétés des nombres entiers, telles que la parité, la divisibilité et la multiplication. Les observations que nous avons faites peuvent conforter cette assertion, mais l'analyse théorique a pour but de comprendre comment l'émergence des connaissances revêt un caractère structurel et qu'elle peut donc être reproductible.

Dans cet article, nous utilisons le concept de milieu en nous référant à la Théorie des Situations (Brousseau, 1998). Toute tâche proposée à l'élève met en jeu des objets et des connaissances, ce qui constitue un milieu initial qui va évoluer en fonction du résultat d'action tel que : calculs, dessins ou manipulations. L'évolution du milieu pour une tâche donnée mène à ce que Brousseau nomme le « milieu d'apprentissage ». Il s'agit de la phase pendant laquelle les résultats obtenus vont être mis à l'épreuve ou directement évalués par l'enseignant. La mise à l'épreuve pourra être une vérification matérielle[8], ou une vérification validée par d'autres élèves, ou encore par l'appel d'une propriété reconnue par tous. Selon le type de milieu, une vérification autonome peut ne pas être possible, par exemple, lorsque la maîtrise technique est faible ou encore lorsque les rétroactions du milieu peuvent être ambigües comme avec le dessin en géométrie.

Quelle place pour la calculatrice dans le milieu ? Quelles sont ses caractéristiques ?

En elle-même, la calculatrice ne constitue pas un milieu, pas plus qu'un calcul isolé effectué avec crayon et papier. Un lien doit être construit. Ce lien permet alors de parler d'orchestration et instrumentation didactique (Floris & Conne, 2007), c'est-à-dire

[8] Cf. la situation du puzzle à agrandir morceau par morceau et dans laquelle la validation consiste à reconstituer le puzzle agrandi (Brousseau, 1981).

d'une prise en charge organisée et publique de l'utilisation de la calculatrice en classe. C'est ainsi qu'avec l'appui de la calculatrice transparente, les pratiques d'additions itérées et de remplissage collectif du tableau des cibles se sont institutionnalisées, devenant un milieu pour la validation des propositions des élèves.

C'est dans le milieu d'apprentissage que se situe la possibilité de faire le lien entre ce qui a été proposé par le maître et ce qu'a réalisé l'élève. À ce titre, les résultats d'actions effectuées à la calculatrice font partie de ce milieu.

Observons encore que le milieu d'apprentissage élaboré à travers le jeu de tâches proposé par l'enseignant ne peut fonctionner durablement sans la présence de ce que nous appelons une « mini-culture » formée d'un vocabulaire, décrivant des actions et des propriétés relatives aux résultats de ces actions (par exemple : « en ajoutant plusieurs fois le même nombre pair, on obtient toujours un nombre pair »). Nous insistons sur la notion de résultats matériels qui peuvent être des objets ou des traces sur un tableau noir, sur du papier, sur l'écran d'une calculatrice. Ce milieu matériel est indispensable en vue du rappel des actions effectuées et pour l'élaboration de conjectures. L'étude du déroulement de la « course à vingt » (Brousseau, 1986) met en évidence ce rôle du milieu et son importance dans les phases de formulation et de validation. À cet égard, l'utilisation de calculatrices conservant l'affichage et la mémoire des opérations effectuées est très importante, ainsi que la possibilité d'en présenter le résultat à l'ensemble de la classe via une calculatrice transparente sur rétro-projecteur. Les travaux de Trouche (2002 & 2007), de Artaud (2003) et de Kieran & Guzman (2007), montrent l'importance de l'exploitation didactique des éléments du milieu.

On pourra encore s'interroger sur l'utilisation du terme « situation », à envisager non pas pour une seule situation associée à un savoir précis, mais pour une suite de situations modulées par le jeu des variables didactiques qui ont permis de produire les différentes tâches proposées aux élèves. Nous estimons que ce raccourci de langage facilite la lecture de ce texte.

Dans la suite de l'article, nous présentons et analysons quelques points forts de la « mini-culture » développée tout au long du dispositif d'enseignement et de recherche. Au fil des leçons, les élèves ont pu faire de multiples expériences sur le nombre. Ces expériences, guidées par le jeu de tâches en relation à la situation « cible », ont produit des connaissances. Certaines d'entre elles ont été discutées, partagées, formalisées et enfin institutionnalisées pour devenir des objets mathématiques « sensibles » de la classe. Passons-en en revue quelques-unes.

Cibles : parité, imparité et moitié

Parmi les propriétés élémentaires du nombre que la situation « cibles » a permis de travailler, nous trouvons la parité. Cette propriété est quelque peu négligée dans le cursus mathématique élémentaire, son traitement étant essentiellement laissé à la charge de l'élève. C'est pour cela que nous proposons ici de faire une incursion détaillée dans ce domaine afin de montrer comment le traitement des nombres pairs et impairs à la calculatrice permet d'ouvrir un champ d'investigation plus vaste sur les multiples et diviseurs.

La question de la parité/imparité des nombres est apparue très rapidement dans l'historique de notre dispositif de recherche. Les premières séances de la situation « cibles » ont offert aux élèves l'occasion d'observer que certains nombres sont plus efficaces que d'autres pour atteindre rapidement la cible et qu'il y a une relation forte entre le diviseur et la « nature » même de la cible, plus particulièrement selon qu'elle se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 ou pas. Au fil des séances et de l'évolution du dispositif, l'étude de ce rapport est devenue plus précise jusqu'à devenir un savoir institutionnalisé par des règles écrites sur une affiche géante (voir encadré 7). Ces règles ont permis d'une part de fixer le vocabulaire mathématique approprié au traitement des problèmes posés mais surtout d'institutionnaliser des procédures de contrôle dont le vocabulaire spécifique constitue l'enjeu sémiotique et mathématique majeur. C'est, par exemple, ainsi que les élèves ont constaté que pour les cibles impaires, il n'y a que des diviseurs impairs et que pour les cibles paires il peut y avoir des diviseurs pairs et impairs. L'utilisation d'un vocabulaire mathématique spécifique et institutionnalisé se conjugue à la contingence et à la nécessité du contrôle mathématique demandé par la tâche.

Nous présentons maintenant l'observation de trois élèves aux prises avec la recherche de la moitié d'un nombre pair et nous nous intéressons plus particulièrement à la façon dont ils contrôlent, ou non, les gestes effectués sur la calculette.

Les séances sur les « nombres tout de suite » (NTDS)

Deux séances du dispositif de recherche ont été consacrées à ce que les élèves de la classe avaient nommé les « nombres tout de suite » (NTDS). Il s'agit des nombres qui permettent d'atteindre la cible en appuyant deux fois sur la touche [=], après avoir affiché le nombre initial puis appuyé sur [+] avec la calculette. L'idée des NTDS a été évoquée par un élève qui avait été surpris de voir qu'il y a des diviseurs qui permettent d'atteindre la cible avec deux manipulations seulement. Les camarades de classe se sont emparés très rapidement de cette découverte qui, par ailleurs, témoigne de la force du milieu numérique instrumenté par la calculatrice. Dans notre dispositif de recherche nous avons décidé de garder ces appellations et définitions spontanées car elles permettent de mesurer la portée de la connaissance sans engager, dans un premier temps, des contraintes « externes » trop coercitives. Il est aussi intéressant de constater que les jeunes élèves font coexister aisément plusieurs appellations (nombre tout de suite, diviseur, multiple) se référant aux mêmes propriétés numériques mais que les définitions spontanées ont un degré opératoire plus proche de la connaissance utile du moment.

Sur la base de cette découverte, l'enseignant a alors décidé de proposer l'exercice suivant : *« sur l'ensemble des cibles de 13 à 35, chercher celles qui ont un NTDS »*. Nous allons présenter le travail de trois élèves.

Amélia cherche le NTDS de 14

Nous avons observé Amélia qui cherche le NTDS de 14. L'extrait vidéo montre qu'elle passe en revue deux diviseurs non consécutifs : le 4 et le 7. Avec le 4 elle explore les multiples 8, 12 et 16 (quatre gestes sur la touche [=]). Voyant que la cible 14 est dépassée, elle essaye avec 7 ce qui l'amène à obtenir la cible 14 en deux gestes de touche [=]. Elle repère ensuite la ligne de la cible 14, compte sept cases de gauche à droite et inscrit le NTDS trouvé. Cette élève fait ainsi une première incursion efficace dans le champ des propriétés des nombres pairs.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
13	1												13			
14	1						**7**							14		
15	1														15	
16	1							8								16

Encadré 4 - Amélia cherche le NTDS de 14

Le choix d'Amélia qui consiste à essayer deux nombres non consécutifs, nous permet d'avancer l'hypothèse d'une connaissance relative à l'estimation des grandeurs des nombres : 4 étant trop petit pour atteindre la cible en deux coups de touche, elle essaye et réussit avec 7. Le fait que l'élève n'ait essayé ni le 5 ni le 6 peut être interprété comme la mise en œuvre embryonnaire d'une connaissance qui permet de vérifier que, si l'on obtient la cible en appuyant *k* fois sur la touche [=] à partir du nombre N, alors on peut l'obtenir à partir d'un nombre plus grand que N en moins de gestes. Il y a là la manifestation d'un geste sous contrôle, que nous nommons ***geste signifié.*** On observe ensuite que les connaissances conditionnent alors la suite du travail de l'élève, puisque ce dernier vérifie immédiatement si le 8 est le NTDS de 16. Nous parlons ici de connaissances au pluriel, car il peut s'agir du contrôle du nombre de touches, du repérage de 8 au milieu du tableau ou encore de relations connues par cœur, comme 8 + 8 = 16.

Jean-Philippe cherche le NTDS de 24

L'exemple de Jean-Philippe est intéressant à plusieurs titres. Voici ce que l'on observe : après quelques essais, l'élève trouve le NTDS 12 pour la cible 24 et inscrit le nombre dans la bonne case de son tableau. Ensuite, il appuie une fois encore sur la touche [=] et atteint 36. À ce moment, il décide d'inscrire le diviseur 12 pour la cible 36. Notons ici que quelques élèves de la classe ont joué avec le vocabulaire et associé le rapport de « trois fois le nombre » à l'appellation « nombres *presque* tout de suite » (NPTDS). En lien avec l'exemple précédant des NTDS dont le rapport traduit « deux fois le nombre », les « *nombres presque tout de suite* » constituent un prolongement intelligent de la première règle. Ceci témoigne d'une part de l'utilité de la première règle et surtout de son adaptation à la nouvelle contingence numérique instrumentée par la calculatrice.

Dans cet exemple toutefois, contrairement au précédent, tout se passe comme si l'élève partait à la pêche aux résultats, sans guidage précis lié à des connaissances sur la moitié d'un nombre. La gestuelle de base sur la calculette (N [+] [=] [=] [=] …) lui donne la possibilité de produire des symboles et de remplir le tableau sans que ces résultats aient une signification mathématique, un peu comme ces élèves de classes élémentaires qui égrènent la suite des nombres (la comptine) sans pouvoir les employer de façon efficace pour aller chercher un nombre donné d'objets. L'appellation « *nombres tout de suite* » avec ses connaissances implicites, serait-elle en cause pour cet élève ? Si d'une part l'exploitation du vocabulaire spontané des élèves permet de nourrir le projet de l'enseignant en y greffant de nouvelles connaissances, le caractère parfois arbitraire des mots peut expliquer, en partie du moins, certaines difficultés d'interprétation. Ou pourrait alors faire l'hypothèse que des formules telles que « deux fois le nombre » et

« trois fois le nombre » seraient plus appropriées et permettraient de produire des réponses plus conformes à la situation même si ces premières, à leur tour, pourraient être riches en conséquences interprétatives. Le mot « fois » pourrait à lui seul transformer le projet de l'enseignant.

Samuel cherche le NTDS de 18

Il s'y prend à deux reprises de la façon suivante : appuie sur 9, puis sur la touche [-][9], puis trois fois sur la touche [=] ce qui l'amène à atteindre -27. L'utilisation du signe « moins » ne semble pas déranger l'élève. Il inscrit ensuite le NTDS 9 dans la ligne du tableau correspondant à la cible 18. Par la suite, Samuel passera en revue les nombres de -1 à -9 en utilisant la technique de base [1] [-] [=] [=] [=]. Cette recherche lui permet de traiter le NTDS 9 comme une nouvelle cible que l'on peut atteindre par des pas de 1, comme s'il fallait s'assurer que 9 fait bien partie de l'ensemble des nombres. Cette observation nous permet d'extraire deux éléments de discussion : l'utilisation du signe opératoire « - » et le dépassement de la cible 18.

La calculette utilisée permet, comme beaucoup d'autres, la possibilité de travailler aisément avec les nombres négatifs. Ceux-ci apparaissent lors de certaines soustractions ou par l'usage de la touche « opposé » (conversion du signe positif en signe négatif ou vice versa). Sans autre information, il est difficile de savoir si la touche négative a été convoquée par inadvertance ou intentionnellement. Quoi qu'il en soi, on remarquera que le signe « - » qui apparaît à gauche de la fenêtre de la calculatrice, ne semble pas déranger l'élève outre mesure.

Quant au dépassement de la cible 18, il semble qu'on ait ici une trace d'une version primitive de la technique de base de recherche des multiples, où il s'agit de repérer ce dépassement pour déclarer qu'un nombre ne permet pas d'atteindre la cible. Les éléments de contrôle des gestes ne sont pas aussi élaborés que ceux d'Amélie, mais ils sont présents.

Des additions itérées à la multiplication

Un des moments forts du dispositif de recherche a été celui du passage de l'addition itérée à la multiplication. Cette évolution marquante des connaissances des élèves est en lien avec la nature même de la situation et avec le milieu mathématique qui la supporte. Afin de préciser les choses, nous utilisons ici la définition de multiplication suivante (pour les nombres entiers).

La multiplication est une opération arithmétique consistant à répéter un nombre, appelé multiplicande, autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre donné, appelé multiplicateur, de façon à obtenir un troisième nombre appelé produit.

Encadré 5 - Définition de multiplication dans N

L'évolution vers la multiplication a pris forme après plusieurs séances de travail avec l'addition itérée qui a permis aux élèves d'étudier certaines propriétés numériques liées aux liens entre diviseurs et cibles, la parité des nombres étant à ce propos un exemple

[9] La calculatrice TI-106 permet aussi d'utiliser l'algorithme N [-] [=] [=] [=] pour explorer le champ des nombres négatifs.

significatif. Cette évolution a été provoquée par une modification importante de la situation, l'enseignant ayant introduit la tâche visant à dénombrer et noter le nombre de fois que l'on doit appuyer sur la touche [=] pour atteindre la cible avec un nombre donné. Avec ce changement, la procédure se complexifie car il faut à la fois soumettre à la machine un nombre potentiellement adéquat pour atteindre la cible (estimation) et dénombrer les gestes accomplis. Les informations sont ensuite inscrites dans les cases du tableau comme dans l'exemple ci-dessous (encadré 6).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
11	1 11										11 1														
12	1 12	2 6	3 4	4 3		6 2						12 1													
13	1 13												13 1												
14	1 14	2 7					7 2							14 1											
15	1 15		3 5		5 3										15 1										
16	1 16	2 8		4 4				8 2								16 1									
17	1 17																17 1								
18	1 18	2 9	3 6			6 3			9 2									18 1							
19	1 19																		19 1						
20	1 20	2 10		4 5	5 4					10 2										20 1					
21	1 20		3 7				7 3														21 1				
22	1 22	2 11									11 2											22 1			
23	1 23																						23 1		
24	1 24	2 12	3 8	4 6		6 4		8 3				12 2												24 1	
25	1 25				5 5																				25 1

Encadré 6 - Tableau intégrant les diviseurs duaux

Dans la partie haute de la case y figure le nombre choisi pour atteindre la cible et dans la partie basse y figure le nombre de fois que l'élève a appuyé sur la touche [=].

Les premières procédures ont été caractérisées par le dénombrement des gestes que l'élève accomplit sur la touche correspondante au nombre permettant d'atteindre la cible. Cette démarche pose inévitablement un problème quand la cible est élevée et le diviseur petit puisque la tâche est longue et les erreurs de dénombrement fréquentes. Ceci, certains élèves l'ont compris assez rapidement puisqu'on a pu observer, après quelques séances, qu'ils procédaient par multiplications. On a pu remarquer plus particulièrement que le nombre choisi pour atteindre la cible était systématiquement multiplié par un deuxième nombre et ceci à travers des stratégies d'estimation.

Il n'a ensuite pas fallu beaucoup de temps pour que les élèves s'aperçoivent qu'à un couple multiplicateur/multiplicande donné correspond toujours un autre où les termes sont inversés. Cette propriété est facilement observable sur un tableau tel que celui de l'encadré 6. Il nous semble opportun de préciser ici que l'utilisation de la multiplication et en particulier du signe opératoire (×) n'est pas le fruit d'un enseignement préalable mais plutôt le résultat d'une conjoncture didactique favorable entre les spécificités de la tâche (cible), les conditions instrumentales et, sans doute, quelques connaissances « privées », mais non attestées, sur la multiplication de l'un ou l'autre des élèves de la classe. Dans le cadre de cette expérimentation, l'utilisation spontanée de la multiplication nous permet d'avancer des hypothèses sur le rôle et la force du milieu supporté par la tâche qui favorise, selon nous, la transformation des connaissances relatives à l'addition itérée en connaissances multiplicatives. Le caractère économique de la multiplication semble en effet compléter la liste des avantages en permettant aux élèves de se rendre compte, très rapidement, de l'utilité de cette nouvelle manière de traiter les cibles numériques. Rappelons encore que cette découverte a été inscrite en premier lieu sur la liste des règles permettant de contrôler le tableau des cibles (encadré 7). Cette liste est une sorte d'inventaire des règles et « trouvailles » établi au fil des leçons.

Règles pour contrôler le tableau des cibles

- Vérifier avec la calculatrice et avec une multiplication que les nombres choisis permettent bien d'atteindre la cible.
- Vérifier que dans les cibles impaires il n'y a que des diviseurs impairs et que dans les cibles paires il peut y avoir des diviseurs pairs et impairs.
- Vérifier qu'il y ait le correspondant de chaque multiplication (règle de la commutativité).
- Pour les cibles qui se suivent : vérifier l'alternance des cases des colonnes (dans la colonne 1, le 1 – premier terme de la multiplication – apparaît dans toutes les cases, dans la colonne 2, le 2 apparaît toutes les deux cases, dans la colonne 3, le 3 apparaît dans toutes les trois cases, etc.).
- Vérifier que le deuxième terme de la multiplication soit inscrit dans une suite progressive de nombres.
- Les nombres « pauvres » sont des nombres premiers (un nombre premier est impair – sauf 2 – mais tous les nombres impairs ne sont pas premiers).
- À partir d'une cible paire, multiplier par deux le premier terme de la multiplication et diviser par deux le deuxième.
- Tous les nombres se terminant par 6, dont la dizaine est impaire, sont divisibles par 4.

Encadré 7 - Affiche des règles institutionnalisées (Version finale)

En guise de résultat de recherche, nous pouvons dire que la « cible », en tant que tâche instrumentée par la calculatrice, favorise, assez aisément et sans équivoque, le passage de l'addition itérée à la multiplication.

Contexte de l'introduction de la multiplication

La proximité des gestes des élèves avec la notion de multiplication avait fait l'objet de discussions entre le chercheur et l'enseignant. Une première hypothèse avait été d'exploiter les caractéristiques de conservation de l'affichage de l'opération avec la calculatrice TI34 et de demander aux élèves de compter les occurrences du diviseur. Cela n'avait pas eu de succès, mais de là est née une nouvelle idée. C'est lors d'une leçon consacrée à l'étude des propriétés de parité des cibles que le maître introduit la nouvelle tâche. Voici l'extrait des échanges de ce moment qui a transformé le milieu de la situation permettant ainsi aux élèves de commencer à raisonner en termes de la multiplication.

Le 16 décembre 2005 les élèves ont eu pour tâche de trouver trois cibles entre 20 et 40 ayant des NTDS[10] (cibles paires), c'est-à-dire des nombres qui permettent d'atteindre la cible en appuyant que deux fois sur la touche, et trois cibles n'ayant pas de NTDS (cibles impaires). C'est comme ça que la classe proposa de travailler sur les cibles suivantes : 20, 22, 24 pour les cibles avec NTDS et 31, 23 et 21 pour les cibles sans NTDS.

Les élèves ont vérifié ensuite les cibles individuellement en remplissant le tableau de support à l'activité, le but premier étant d'expérimenter les critères de parité.

Lors de la mise en commun des résultats, le débat a porté tant sur les NTDS que sur les autres diviseurs des cibles et c'est à ce moment que nous avons assisté à l'échange suivant :

Hugo : le 22 pour le 22, le 24 pour le 24, le 31 pour le 31,... pour tout (pour toutes les cibles du TN)

L'enseignant inscrit tous les diviseurs nommés par Hugo au tableau noir

Élève : Ce sont les nombres extra tout de suite (NETDS)

Donnia : le 8 pour la cible 24 et c'est un nombre « presque tout de suite » (NPTDS)

Enseignant : combien de fois tu as appuyé sur égal ? (*)

Donnia : 2 fois

L'enseignant exécute la procédure sur la calculatrice transparente au rétroprojecteur et montre qu'il faut appuyer 3 fois

Élève : 3 fois

Enzo : j'ai dit qu'il fallait appuyer 3 fois

Enseignant : mais c'est juste Donnia on avait dit qu'il y a avait des nombres presque tout de suite c'est quand on appuie 3 fois

L'enseignant refait l'opération au rétroprojecteur en disant « le 8 c'est un bel exemple, 8 une fois, deux fois et trois fois et tu tombes sur 24, 8, 16, 24 »

[10] « Nombres tout de suite » (NTDS). Voir plus haut dans le texte.

Raphaël : j'en ai un autre pour 24 mais ce n'est pas un nombre tout de suite, le 3 pour le 24

L'enseignant écrit le 3 dans la case correspondante en disant « est-ce que quelqu'un d'autre a trouvé le 3 pour 24 » ?

Élève : oui

Enseignant : est-ce qu'il a raison (Raphaël) ?

Gwendoline : oui

Enseignant : est-ce qu'on fait ensemble ?

L'enseignant fait l'opération au rétroprojecteur et dit « 3 plus égal… 24 »

Enseignant : autre chose ?

Hugo : le 4 pour le 24

Élève : ha oui

Enseignant : 4 pour 24 dit Hugo, qui a trouvé 4 pour 24 ? Amélia ?

Amélia : oui

Enseignant : écrit au TN le 4 pour la cible 24

Hugo : 6 pour 24

Élève : ouais

Enseignant : qui a trouvé le 6 pour le 24 ? Enzo tu as trouvé 6 pour 24 ? (le maître écrit le 6 pour la cible 24)

Enseignant : autre chose ? Enzo ?

Enzo : le 24 pour le 24

Enseignant : oui je l'ai mis

Hugo : le 4 pour le 20 le 5 pour le 20

Enseignant : Hugo dit 4 pour le 20 et 5 pour le 20, il a raison ?

Élèves : oui, oui

Enzo : ce n'est pas un nombre tout de suite

Enseignant : non c'est pas tout de suite.

Enseignant : excusez-moi, combien de fois je dois appuyer sur = avec le 4 pour arriver à 20 ?

Élève : deux fois

Enzo : plus

Enseignant : non pour arriver à 20

Enzo : plus

Donnia : quatre

Enzo : plus que trois fois

Donnia : quatre

Enseignant : pour le 4 combien de fois ?

Donnia : quatre

Enseignant : sûr ? Combien de fois j'appuie sur = pour arriver à 20 ?

Élève : deux

Enseignant : deux fois ?

Élève : quatre

Élève : je n'ai rien compris

L'enseignant fait l'opération au rétroprojecteur et dit « un, deux, trois, quatre et j'arrive à 16 »

Gwendoline : cinq avec celui qui fait rien.

L'enseignant inscrit un petit 5 dans la case du 4 de la cible 20

Enseignant : autre chose ?

Élève : 6 pour 36

L'enseignant écrit le nombre dans la case correspondante et dit « juste une petite question, combien de fois je dois appuyer sur 6 pour arriver à 36

Raphaël : six.

Encadré 8 - Introduction de la multiplication

Cet extrait (encadré 8) correspond au début de la dévolution de la tâche de dénombrement des répétitions de gestes accomplis avec la touche [=] afin d'atteindre la cible. On notera l'utilisation lors des échanges des appellations originales que les élèves ont attribués à certains diviseurs. Nous retrouvons les « nombres tout de suite » (NTDS). À ceux-ci, les élèves ont ajouté les « *nombres extra tout de suite* » (NETDS) qui correspondent aux valeurs-cibles elles-mêmes et qui s'obtiennent en appuyant une seule fois sur la touche [=] et les nombres « *presque tout de suite* » (NPTDS) qui, comme on la vu plus haut, permettent d'atteindre la cible en trois étapes. Ces trois expressions ont été institutionnalisées et formellement admises dans le vocabulaire des élèves ce qui ressort dans l'extrait ci-dessus illustrant le travail collectif habituellement mené en fin de séance.

À un certain moment de la leçon (signalé par un astérisque), le maître demande aux élèves combien de fois il a appuyé sur la touche [=] pour arriver à 24. Un élève répond : « *deux* » et non « *trois* » comme attendu. L'explication la plus probable réside dans le fait de la non prise en compte du premier geste sur la touche « égal » car celui-ci ne transforme pas la valeur numérique affichée. Techniquement on peut tout au plus constater que cette valeur clignote une seule fois, en une fraction de seconde, ce qui par ailleurs montre bien que l'opération ×1 fait aussi « quelque chose » au nombre. Ce type d'erreur a été constaté à plusieurs reprises tout au long de l'expérimentation et elle est significative car elle traduit une propriété fondamentale de la multiplication. Est-ce que 1.n est une opération multiplicative ? Est-ce même une opération ? Dans l'esprit de cet élève, comme pour de nombreux adultes avertis, la réponse est loin d'être évidente.

Mais la question didactique essentielle qui nous intéresse ici est la suivante : qu'est-ce qui fait que les élèves abandonnent spontanément les additions itérées au profit de la multiplication ?

Un rôle certain a été joué par la modification du milieu apportée par l'institutionnalisation de l'écriture du multiplicateur dans le tableau. La congruence entre le résultat de la procédure d'itération avec l'action du [×] a conduit les élèves à se diriger, très logiquement, vers le choix le plus économique, tout à fait dans la perspective de la Théorie des Situations. Car c'est bien l'opération multiplicative dans les entiers qui est ici le savoir le plus efficace. En outre, la calculatrice fournit une forte rétroaction : c'est non seulement la validation qui peut se faire indépendamment de l'enseignant mais aussi une partie de l'institutionnalisation[11] et c'est ici un cas exemplaire. Le rôle du tableau des cibles est essentiel dans ce processus.

Les « grandes cibles » : mise à l'épreuve des connaissances

Les « grandes cibles » sont des valeurs numériques qui marquent une rupture dans les habitudes mathématiques de la classe. On verra comment ce développement de la situation a permis de nourrir abondamment le « jeu » de l'enseignant, favorisant ainsi l'enrichissement des expériences des élèves.

L'idée de travailler sur ces nouveaux nombres, a été inspirée par une contingence extra-scolaire. Nous commencions l'année civile 2 006 et les élèves, fort de ce moment socialement investi, semblaient être fascinés par ce cap temporel médiatisé par le symbole numérique « 2 006 ». La reprise des leçons a coïncidé avec la reprise de notre dispositif de recherche. Lors de la première séance de la nouvelle année, nous avons décidé de « casser » les habitudes en proposant une seule et unique cible mais « grande » : 2 006. Les élèves étaient décontenancés par notre proposition. En effet, les activités proposées dans les moyens officiels convoquent un champ numérique qui ne dépasse que rarement 100.

Quelques notes prises à chaud nous permettent de présenter l'entrée en matière sur ces nouvelles cibles. Ensuite, nous essayerons de montrer comment ce déplacement du milieu va engendrer de nouvelles connaissances et de nouvelles difficultés.

La cible 2 006 (9 janvier 2 006)

> *Nous demandons aux élèves si 2 006 peut être une cible à investiguer. Après discussion on décide de considérer ce nombre comme une cible « difficile » et on se lance dans la recherche des nombres qui « marchent ». Les élèves proposent très rapidement, sans vérification avec la calculatrice, les nombres : 1, 2 006 et le NTDS (nombre tout de suite) 1 003. Marlène ajoute ensuite le nombre 2 comme diviseur de la cible « puisqu'elle se termine par un 6 donc le 2 marche ».*

À relever ici la généralisation des connaissances acquises et institutionnalisées dans lors de la première phase du dispositif de recherche. Cette généralisation permet d'élever ces connaissances au rang de savoir et donc de gérer d'un point de vue mathématique la nouvelle question, c'est-à-dire de se passer de l'expérimentation avec la calculatrice. Ces savoirs sont accompagnés par d'autres conjectures « intelligentes » qui, soumises à l'épreuve de la calculatrice, seront toutefois abandonnées. Parmi elles, celle de Raphaël qui propose « *36 parce que la cible se termine par 6* » ou encore celle de Jean-Philippe qui propose 37 parce que 17 est un diviseur de 2 006. Ces derniers exemples s'inscrivent

[11] La calculatrice est bien du côté de l'institution.

dans la logique des nombres « parents » dont la représentation permet aux élèves de conjecturer certaines relations, logique qui est efficace dans le cas des nombres pairs, des multiples de 4, de 5 ou de 10.

Toutefois la spécificité de la proposition de Marlène et celles des deux garçons distingue, dans le premier cas, un savoir établi et efficace permettant d'interagir avec le milieu et, dans le deuxième cas, des connaissances partielles permettant d'effectuer des essais mais sans garantie de succès.

Les notes de travail sur cette séance montrent ainsi un phénomène digne d'intérêt. Malgré la forte rupture de contrat aucun élève n'a résisté aux contraintes de la situation. Nous dirons même que la culture en vigueur dans la classe leur a permis de reconnaître les éléments du milieu mathématique sous-jacent et d'agir efficacement et ceci même quand l'enseignant leur a demandé de passer en revue les diviseurs entre 1 et 200 en utilisant une calculatrice. Avec la cible 2 006, cette démarche se révèle longue et fastidieuse, conséquence d'un choix didactique un peu trop improvisé. Une analyse préalable de la tâche, basée sur la décomposition en facteurs premiers ($2006 = 2 \times 59 \times 17$) aurait permis de le prévoir... Malgré cela, et grâce à la contribution de tous les élèves de la classe, nous avons pu déterminer, à l'issue de cette séance, l'ensemble des nombres qui permettent d'atteindre la cible 2006. Dans l'ordre, les élèves ont encore trouvé 17 et son « cousin » (citation d'élève) 34 ainsi que 59 et 118.

La cible 2 000 (26, 27 janvier et 3 février 2 006)

L'introduction des grandes cibles a suscité un intérêt certain. Les grands nombres exercent une fascination marquée sur les élèves et il n'est pas rare de trouver dans leurs récits sur les nombres des jeux de mots avec des nombres élevés, tels que les milliers, les millions ou les milliards. De plus, cette nouvelle perspective permet de mettre à l'épreuve des savoirs constitués antérieurement. C'est ce qui se passe lors de la deuxième séance consacrée à la cible 2 000 fortement sollicitée par les élèves de la classe amenés à choisir un nombre de travail. Le nombre « 2 000 » fascine. Il est certain, car il donne l'impression de l'utilité de certaines connaissances numériques antérieures. La remarque de Marion nous semble représentative de cet état de connaissance. Se référant aux règles anciennes sur les « nombres tout de suite », c'est-à-dire ces nombres qui permettent d'atteindre la cible en n'appuyant que deux fois sur la touche « = », cette élève nous communique avec certitude que tous les nombres se terminant par 0 ont un NTDS et que 1 000 est celui qui se réfère à la cible 2 000.

Les recherches successives des élèves à l'aide de la calculatrice amènent au « panier » des données mises en commun la quasi-totalité des diviseurs de la cible. Dans l'ordre, les élèves ont vérifié et montré : 1, 25, 80, 2 000, 20, 50, 500, 4, 1 000, 5, 8, 2, 200, 10, 40, 100, 16, 400. La décomposition en facteurs premiers ($2\ 000 = 5^3 \times 2^4$) permet de relever l'absence, surprenante, des diviseurs 125 et 250. Une analyse préalable de la tâche laissait prévoir plutôt des difficultés dans l'exploitation des petits diviseurs compte tenu du caractère long et fastidieux de la tâche à la calculatrice. La touche [=] doit être sollicitée 500 fois pour explorer les multiples de 4, avec un risque d'erreur plutôt élevé. Cela n'a pas été le cas. On peut faire l'hypothèse que 500 a été identifié car 5 est la moitié de 10, de ce fait la réflexion n'a pas pu être menée plus loin car 5 est impair.

Soulignons enfin que les essais avec les grandes cibles n'ont pas permis d'observer l'utilisation significative de la multiplication comme ce fut le cas pour les petites cibles décrites plus haut. Cela peu paraître surprenant, voire contradictoire, car c'est justement avec les grands nombres que ces connaissances sont efficaces. Cela ne s'est pas produit. Pourquoi ? L'hypothèse la plus probable réside dans la nature même des propriétés des grands nombres et de leur relation. Ces derniers sont inhabituels et difficilement traitables pour un jeune élève qui peine encore à se représenter, par exemple, des multiplicandes et des multiplicateurs de « grande taille » (par exemple pour 2 000, 250 × 8 ou 125 × 16). C'est pour cela que le retour à l'addition itérée a été massivement observé comme le montrent les deux extraits analysés dans le chapitre suivant.

Diogo et Saskia aux prises avec la cible 2 016

Dans cette partie, nous examinons de manière plus fine les procédures de deux élèves aux prises avec une grande cible, sur la base d'une observation filmée de leurs investigations. Le rapport au milieu de ces deux élèves est contrasté. Saskia exploite les chiffres de la cible pour fonder le choix des diviseurs à soumettre à la calculatrice et le contrôle de ses essais est hésitant, en particulier en ce qui concerne les règles lexicographiques ordonnant les nombres entiers écrits en base 10. Diogo, quant à lui, nous permettra d'apprécier une organisation des connaissances plus efficace surtout dans la formulation de conjectures concernant le lien mathématique entre les diviseurs de la cible. Le nombre proposé est 2 016, qui se décompose en $7 \times 3^2 \times 2^5$ a donc de nombreux diviseurs inférieurs à 20. Nous introduisons dans le texte quelques éléments d'analyse, en italique.

Saskia

Nous reproduisons ci-dessous les traces écrites laissées par l'élève. Dans l'encadré de gauche se trouve la cible proposée alors que sur sa droite on trouvera les nombres soumis à l'essai de la calculatrice. Les nombres marqués par une croix indiquent l'insuccès de l'essai.

Figure 1 - Traces laissées par Saskia

Saskia commence son travail en notant la cible 2 016. L'enseignant lui demande alors avec quel nombre elle aimerait bien commencer son investigation. L'élève indique le 5 comme premier essai de recherche. Quelle est la raison d'un tel choix, voué à l'échec ? On peut faire l'hypothèse d'une reprise du 5, diviseur de 2 000 travaillé précédemment, et qui est en outre un diviseur de 20 qui, son tour, représente les deux premiers chiffres de la cible.

L'élève écrit « 5 » à côté de la cible et démarre avec la technique de base [5][+][=][=].... Après plusieurs gestes sûrs et déterminés, l'enseignant propose à Saskia de lui indiquer le moment où elle pense s'approcher le plus de la cible. Cette intervention provoque un comportement hésitant chez Saskia qui regarde en alternance et systématiquement à chaque touche, la calculette et la cible notée sur la feuille pour bien s'assurer de ne pas la manquer. À ce stade, elle est en train de passer en revue les nombres autour de 250. Elle poursuit sa recherche.

À l'approche de 2 005, l'élève ralentit sa « course de gestes », regarde la cible et continue son exploration comme si 2 005 indiquait « quelque chose de bon » à venir. Elle poursuit avec 2 010, 2 015, 2 020, 2 025, 2 030 et 2 035. À ce moment, elle s'exclame : « *J'y suis presque* » et continue à faire défiler les multiples de 5 au-delà de la cible. L'attitude de Saskia montre un certain contrôle des opérations.

Vers 2 500, le maître demande encore si elle pense arriver bientôt sur la cible, mais sa réponse laisse entendre qu'elle n'y est pas et qu'il s'agit d'un travail très long. Après quelques minutes, l'enseignant tente de redresser la situation en lui demandant quel est le nombre affiché sur l'écran de la calculatrice et surtout s'il est plus grand ou plus petit que la cible écrite sur la feuille. Elle indique que 2 016 est plus grand que ce qui est affiché à la machine, soit 3 580. Le maître demande pourquoi. Elle semble hésiter dans sa réponse et change d'avis en disant que 3 580 est plus grand que 2 016 car, dans le premier nombre, il y a un 8 (à la dizaine) alors que dans le deuxième un 6 (à l'unité). Le maître décide alors d'informer l'élève qu'effectivement elle a dépassé la limite de la cible, ce qui provoque une relative déception.

> *La cible 2 016 correspond à un obstacle épistémologique susceptible de provoquer un saut informationnel dans la mesure où la situation complexifie certaines stratégies. Parmi les stratégies disponibles pour déterminer que la cible est atteinte, il y a la comparaison des 4 symboles pour chaque affichage sur la calculatrice et cela sans connaissances sur l'écriture des nombres entiers en base 10 et en particulier de l'ordre lexicographique permettant d'anticiper ce moment. La mise en œuvre est plus difficile qu'avec 2 ou 3 symboles. C'est ce que met en évidence le ralentissement net des gestes de Saskia à l'approche de la cible. L'échec de cette tentative de contrôle laisse comme seul choix pour l'élève la poursuite des essais, comme si la calculatrice pouvait à elle seule fournir la réponse. Néanmoins, et on le verra lors des essais suivants, Saskia apprend quelque chose de cette utilisation « à l'aveugle ».*

Le maître propose ensuite à Saskia d'essayer avec un autre nombre. L'élève se lance alors dans l'exploration des multiples de trois en espérant « tomber » sur la cible 2 016 (pour atteindre la cible il faut additionner 672 fois le nombre 3). Cette recherche sera toutefois caractérisée par une erreur que nous n'avons pas aperçue et qui amènera l'élève à exclure le diviseur 3. Selon nos observations des extraits vidéos, l'erreur semble provenir de l'intrusion d'un +1 dans l'algorithme [3][+][=], type d'erreur que nous avons observé à d'autres reprises. Avec des multiples de 3 augmentés de 1, Saskia ne pouvait donc pas rencontrer le succès espéré. Comme lors de l'essai précédent, la vidéo montre qu'à l'approche de la cible 2 016 l'élève ralentit sa course des additions itérées sans pour autant pouvoir rencontrer le nombre cherché. Elle passe donc à côté en affichant 2 014 et 2 017, ce qui provoquera en elle quelque déception.

> *Malgré ce deuxième échec, Saskia repère l'approche de la cible. Les signes numériques qui s'affichent sur l'écran de la calculatrice lui permettant d'anticiper l'approche du nombre cherché. On peut postuler que le défilement des nombres sur l'écran contribue à aider l'élève à élaborer un modèle de contrôle adéquat proche du principe lexicographique, ce qui résulte du troisième essai où, comme son camarade Diogo, elle soumet à l'épreuve de la cible le nombre 6.*

Avant de se lancer dans cette nouvelle tentative, Saskia propose toutefois d'autres valeurs comme par exemple le 2 qui sera vite balayé par le maître qui prétextera qu'il a déjà été travaillé avec succès par Diogo et le 4 qui sera remplacé par 6, « proche » des caractéristiques numériques de la cible 2 016. L'élève se lance alors avec une certaine assurance dans cette nouvelle investigation, il lui faudra appuyer 336 fois sur la touche [=] pour atteindre la cible. Les multiples de 6 défilent rapidement, si rapidement qu'on ne les distingue pas sur l'écran de la calculatrice. À l'approche de 1 998, l'élève ralentit sa « course », de même qu'elle savoure sa réussite en marquant une pause plus longue lorsqu'elle atteint 2 010. Toujours en gardant un œil attentif sur la cible, elle appuie une dernière fois sur la touche [=] et s'écrie « *ça marche* ».

Avec le choix de 11 pour le dernier essai de Saskia, nous retrouvons la recherche d'une relation au niveau des chiffres. À la demande de précisions quant à son choix, elle répond désignant le 1 à la dizaine de la cible : « parce que là, il y a 1 ». La pratique quotidienne avec les jeunes élèves aux prises avec l'étude du nombre donne de nombreuses occasions de mesurer la portée des associations « intelligentes » et utiles à l'étude du nombre. Ainsi il est possible de voir comment certains nombres ont carrément un statut de « cousin » d'un autre nombre (c'est une appellation souvent utilisée par les élèves de la classe pour indiquer des nombres à forte relation) et comment certains nombres premiers ne sont jamais pris en compte en tant que diviseurs de la cible (par exemple 23 pour 46).

La démarche ressemble aux essais précédents : à l'approche de la cible l'élève ralentit sa course. À l'approche de 1 958, elle marque une pause de quelques secondes pour ensuite aborder les derniers multiples. Après avoir affiché 2 002 et 2 013 elle regarde la cible sans pouvoir toutefois tirer de conclusions quant à la non-efficacité du nombre choisi. Elle continue sa recherche jusqu'à 2 101.

Cette fois, contrairement aux exemples précédents où l'élève semblait décharger le contrôle des opérations sur l'instrument, elle déclare la non-conformité du 11 en s'appuyant sur l'apparition du 1 à la centaine de la cible, montrant ainsi une évolution de ses connaissances sur les règles lexicographiques qui ordonnent les nombres.

Diogo

L'exemple de Diogo diffère nettement de celui de Saskia. L'élève peut s'appuyer sur des connaissances du nombre utiles au choix des diviseurs et au contrôle des opérations sur la calculatrice. Avant d'entrer dans le détail des observations, voici un extrait de la feuille sur laquelle l'élève a reporté la cible et les diviseurs travaillés.

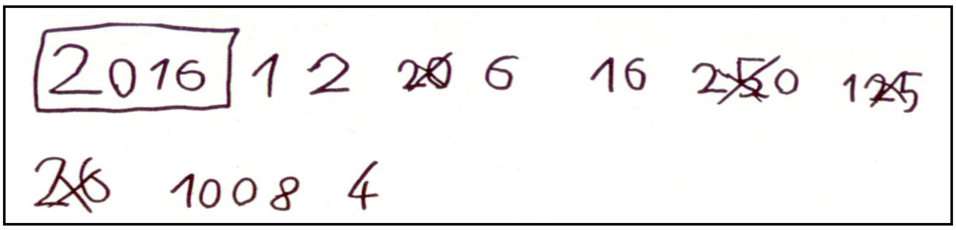

Figure 2 - Traces laissées par Diogo

Diogo démarre son travail avec une évidence. Le nombre 1 permet à coup sûr d'atterrir sur la cible choisie, et cela sans même soumettre son savoir à l'épreuve de la calculatrice. Il écrit donc à côté de 2 016 le 1 qui lui vaut un premier succès sûr et économique. Il sait qu'en additionnant ce nombre deux-mille-seize fois il sera certain d'atteindre la cible.

Ce premier morceau de savoir mathématique est cependant loin d'être une évidence. On l'a vu avec Saskia et dans le cadre de nos travaux sur l'utilisation de la calculatrice à l'école élémentaire. Nous avons souvent questionné de très jeunes élèves à ce propos, et nous avons observé que des additions itérées du nombre 1 ne représentent pas forcément une garantie suffisante pour atteindre un nombre donné même inférieur à 20 (Del Notaro & Floris, 2005).

Diogo sera cependant moins confiant pour le diviseur 2 qu'il soumettra à l'épreuve de la calculatrice et ceci malgré le travail effectué précédemment sur la notion de moitié et de parité (voir le paragraphe intitulé « Cibles : parité, imparité et moitié »).

Ce qui apparait de manière flagrante dans la vidéo, c'est le travail long et fastidieux qui ne décourage pas pour autant l'élève, même quand après quelques minutes de travail il est confronté à une erreur de manipulation des touches ce qui l'amènera à devoir recommencer. Un chronométrage de la tâche qui mène à 2 016 avec un empan de 2, montre qu'il faut environ sept minutes de travail régulier et constant avec la touche [=].

> *Ce type de phénomène est souvent signalé dans les études concernant l'utilisation de logiciels et de calculatrices, où l'obtention de résultats nombreux est un obstacle à un rapport mieux contrôlé par les connaissances des élèves. La simplification de fractions (Weiss & Floris, 2008) et les représentations graphiques de fonctions (Trouche, 2007) en sont des exemples significatifs. Tout se passe comme si la disponibilité de la calculatrice, élargissant les possibilités d'actions, fragilisait le contrat didactique habituel selon lequel pour chaque question de l'enseignant, il y a une réponse parmi les savoirs récemment institutionnalisés.*

Après ce deuxième succès, plus coûteux, Diogo aborde les multiples de 20. Il y a derrière son choix une certaine parenté avec l'essai précédent. Si 2 marche, pourquoi pas 20 ? Mais après avoir « transité » par quelques multiples de 20, l'élève se rend compte que l'unité de ces derniers ne change jamais et qu'il aura donc très peu de chances de tomber sur un nombre se terminant par 6. Il s'exclame alors : « *Je crois que ça marche pas* ». L'enseignant cherche à en savoir davantage en le questionnant sur les raisons qui l'amènent à renoncer à cette investigation. En montrant sur l'écran de la calculatrice le chiffre de droite il déclare : « *Parce que ça fait pas le 6 ici* ».

> *Nous avons ici un exemple frappant des relations étroites qui existent entre connaissances privées de l'élève, pour le choix du diviseur, le milieu instrumenté pour la production de résultats et un savoir mathématique interprétant ces résultats. La permanence du 0 à l'unité n'est pas conjoncturelle, elle provoque le rappel ou la prise de conscience d'une propriété mathématique (la somme de nombres entiers se terminant par 0 est un nombre se terminant par 0) et entre en contradiction avec la présence du « 6 » dans la cible.*

Ce type de raisonnement, peu banal pour un élève de six ans et négligé dans l'enseignement primaire, lui permet non seulement de maîtriser ses essais mais surtout de pointer une relation numérique potentiellement généralisable. La suite montrera toutefois le caractère local de ce fonctionnement. En effet, une tentative ultérieure avec un autre nombre se terminant par 0, montre un comportement et des conclusions complètement opposées à celles-ci.

Dans le même registre de nombres « parents » de la cible 2 016, Diogo choisira aussi trois diviseurs se terminant par 6 : soit 6, 16 et 26. Si les deux premiers permettent atteindre la cible (6 × 336 ; 6 × 126), ce n'est pas le cas du troisième. L'élève démarre rapidement avec les premiers multiples. Ses gestes sont rapides et sûrs car il sait qu'au début de l'investigation il peut se permettre d'appuyer sur la touche [=] rapidement, sans trop se soucier de la cible. Vers le premier millier, traduisant une estimation certaine de la grandeur des nombres, Diogo s'exclame : « *Je suis à la moitié* ». À l'approche de la cible, vers 1 938, Diogo saura engager son contrôle mathématique en ralentissant habilement et avec maîtrise la recherche des derniers multiples ainsi que la cible finale. À la suite de ce succès, l'élève traite de façon analogue les multiples de 16.

Quant au troisième essai avec le nombre 26, malgré son issue défavorable, il permet d'observer comment Diogo contrôle finement les trois derniers multiples, soit 1 976, 2 002 et 2 028. À l'approche de la cible, l'élève annonce la fin imminente de l'exercice. Il montre à son enseignant le nombre 1 976 puis 2 002. Marque une longue pause comme pour indiquer que la recherche pouvait s'arrêter là car le nombre suivant ne pouvait que se situer au-delà de la cible recherchée. Ce sera le maître qui lui proposera d'appuyer encore une fois pour afficher 2 028 et donc déclarer l'inefficacité du nombre 26.

Parmi la liste des diviseurs choisis par Diogo, il y en deux qui se distinguent. Il s'agit de 250 et 125. Leur présence s'explique sans doute par l'intervention du maître qui a suggéré à Diogo de regarder un tableau affiché en classe reportant les données d'un travail précédent sur la cible 2 000. Ce faisant, l'enseignant souhaitait suggérer à l'élève des diviseurs communs tels que le 4 et le 8 mais à sa grande surprise Diogo décida plutôt d'investiguer les potentialités de 250 et 125 sans mettre en œuvre, pour le premier de ces nombres, ce qu'il venait de remarquer en travaillant avec 20. L'effet de contrat et la rapidité de la recherche ne lui ont sans doute pas laissé le temps de réactiver la règle utilisée, au statut encore indéfini entre connaissance et savoir assuré et constamment disponible.

Avant de conclure la séance, le maître pose la question de l'existence d'un NTDS (« nombre tout de suite », voir ci-dessus). Diogo semble hésiter car il sait qu'il y en a un mais ne sait pas lequel. Il argumente son point de vue en s'appuyant sur un tableau affiché en classe qui rappelle que tous les nombres se terminant par un chiffre pair ont un NTDS alors que tous les nombres se terminant par un chiffre impair n'en ont pas. Son enseignant lui demande alors de montrer quels sont les chiffres de la cible qui nous permettent d'attester l'existence d'un NTDS. Il montre simultanément le 2 et le 6 de 2 016, de même qu'il pointera le 0 comme critère supplémentaire de divisibilité par deux. La surinterprétation des règles de partage par deux des nombres, l'amène donc à considérer une autre valeur que celle des unités comme si l'existence de plusieurs critères concentrés dans la même cible pouvait être un gage supplémentaire. Pour relancer la question de la recherche du NTDS le maître demandera à Diogo comment pourrait « s'appeler » ce nombre qui partage la cible en deux parties égales. En s'appuyant sur une estimation de la position médiane du nombre au sein de la bande numérique, l'élève dit que certainement le nombre se situera « dans les 1 000 ». La vidéo montrera les deux essais lui permettant trouver les NTDS adéquats. Avec le premier, il soumettra à la machine le nombre 1009 ce qui lui donnera un résultat de 2 018 alors qu'avec le deuxième, il corrigera son estimation en additionnant 1 008. Le cri de joie de l'élève qui accompagne son succès, est peut-être aussi à la hauteur de la validation des connaissances d'estimation mises en place dans la recherche du « nombre tout de suite » de la cible.

> *Contrairement aux tâches précédentes où les petits diviseurs obligent les élèves à suspendre le contrôle des multiples pendant de très nombreuses étapes, ici la*

connaissance de l'élève et donc le contrôle préalable, devient plus sensible car les opérations à la machine sont limitées à deux étapes. Nous observons donc que l'équilibre du rapport entre les connaissances mathématiques de l'élève, le savoir visé et le processus instrumental peut varier fortement selon que, par exemple, l'on recherche les multiples de 2 jusqu'à 2 016 ou le double de 1 008 comme valeur médiane de la cible.

Diogo terminera sa recherche en soumettant 4 à l'épreuve de la cible. Il parlera de ce nombre en termes de « cousin » pour indiquer certaines de ses propriétés pouvant expliquer les relations avec la cible 2 016 mais surtout avec le diviseur 1 008 utilisé précédemment.

Il est probable que l'élève mette en relation le 4 avec les unités du diviseur 1 008 mais aussi qu'il exploite les résultats affichés des diviseurs de 2 000. Si 4 est un diviseur de 2 000, quelques étapes permettent de vérifier qu'il est aussi diviseur de 2 016. Le choix de 4 provient-il d'une mise en relation de ces différentes relations numériques ? Ce qui est sûr, c'est que Diogo ne mobilise pas la règle institutionnalisée sur les diviseurs de 4 (encadré 7). Le milieu inspiré par la calculatrice et ses contraintes mathématiques, constitue une source de connaissances qui foisonnent au gré des tâches sans toujours parvenir au stade de savoir. Il y a là pour l'enseignant des indices de relances possibles concernant les propriétés telles que : la somme de deux multiples de quatre est un multiple de quatre, plus intéressantes mathématiquement que le critère de divisibilité par 4.

Les cibles « pauvres » : découverte des nombres premiers

Les seuls diviseurs des nombres premiers étant 1 et le nombre lui-même, les élèves ont assez rapidement été intrigués par ces nombres, qu'ils ont appelés « *nombres pauvres* ». Comme pour d'autres épisodes de notre recherche, le vocabulaire spontané utilisé par les élèves témoigne de la nécessité de donner un cadre interprétatif aux « surprises » provoquées par ces nombres particuliers. Le caractère de « pauvreté », par opposition à la « richesse » d'autres cibles, nous a permis d'introduire et l'institutionnaliser l'appellation de nombre premier comme ensemble de nombres aux propriétés surprenantes.

Confrontés à de tels nombres, dans le cas de séries de cibles consécutives à explorer (tableau en annexe 2, encadré 9) une partie des élèves a attribué l'absence de diviseurs autres que 1 et le nombre cible à des erreurs de manipulation et ils se sont assez rapidement découragés, tandis que d'autres ont exploré systématiquement tous les diviseurs possibles.

Pour ces élèves, se pose alors une question supplémentaire, à savoir jusqu'où doit-on explorer les nombres pour être sûr d'avoir tout essayé ? En observant ces élèves, on a compris que certaines connaissances sur les propriétés du nombre leur permettaient de situer la limite de l'exploration, en particulier le « nombre tout de suite », au-delà duquel la technique de base fait dépasser la cible. On peut certes faire mieux, et ceci aussi avec la situation des cibles, puisqu'en travaillant avec la multiplication on peut se rendre compte qu'il n'est pas nécessaire d'aller au-delà de la racine carrée.

Le travail sur les nombres premiers a été surprenant et intéressant. Pour ne pas rallonger ce texte, nous nous limitons à en décrire ici brièvement les étapes. Après les premiers constats, soit la primalité de 7, 13, 17, 23, les élèves, toujours à la recherche de « parentés » entre les nombres, ont fait des conjectures comme : *« les nombres qui se terminent par 3 et 7 sont premiers »* ou *« si 23 est premier 123 l'est aussi »*. Le traitement par l'enseignant de telles affirmations invalides est délicat, car elles peuvent être considérées comme porteuses d'une part de vérité, dans le sens que les nombres premiers (sauf 2) se terminent « souvent » par 3 ou par 7. En effet, une fois leur invalidité prouvée dans la classe, la première de ces conjectures a conduit un élève à tenter de lui substituer une conjecture sur une régularité d'apparition des unités 3 et 7 parmi les nombres premiers. On se rapproche ici fortement de recherches savantes.

D'autre part, la reconnaissance de telles conjectures favorise la dévolution et de fait, leur travail en classe a permis d'aboutir à la propriété suivante, point d'orgue de l'investigation autour des nombres premiers : *« un nombre premier est impair - sauf 2 - mais pas tous les nombres impairs sont premiers[12] ».*

Avant d'y parvenir, les élèves avaient réagi à la « fermeture » des nombres premiers avec des essais opératoires « hors contrat ». Nous en avons pour preuve les nombreuses tentatives de division et de multiplication d'un nombre premier par 2, obligeant dans le premier cas, l'enseignant à recadrer le travail. Quant à la multiplication par 2, alors que les élèves partaient de l'idée que le nombre obtenu serait aussi premier, elle a permis de faire des liens avec les «nombres tout de suite » et avec la parité, favorisant ainsi l'émergence de la propriété sur la non-parité des nombres premiers différents de 2.

Sans calculatrice !

Quelques mois après le début de l'expérimentation, soit donc après une quinzaine de séances, nous proposons aux élèves une séance de travail sans calculatrice. Il s'agit pour nous d'évaluer l'utilité et la solidité des connaissances des élèves, leur capacité à utiliser les règles dégagées en commun (encadré 7)[13]. De plus, nous avions travaillé précédemment sur des cibles consécutives et mis collectivement en évidence certaines propriétés structurales, telle que la présence du diviseur 2 une ligne sur deux, du diviseur 3 une ligne sur 3, etc. Les élèves parviendraient-ils à exploiter ces constats ?

Au début de la séance, le tableau avec les cibles de 47 à 54 dans l'ordre progressif est tracé au tableau noir. Lors d'une leçon précédente, les élèves ont noté tous les diviseurs possibles, ainsi que les multiplicateurs correspondants, selon la convention établie (voir ci-dessus et paragraphe intitulé « Des additions itérées à la multiplication »). Les caractéristiques structurales avaient été discutées et mises en évidence.

La tâche proposée ici consiste à trouver, pour les cibles de 57 à 63, tous les diviseurs possibles mais, cette fois, sans calculatrice. Un écart de 3 entre la dernière cible du premier tableau et la première cible de la nouvelle série vient déranger la succession et l'organisation des diviseurs (figure 3).

[12] Cette dernière affirmation représente la règle n°6 inscrite dans la liste des règles nécessaires pour le contrôle du tableau des cibles (voir encadré 7).

[13] Lors d'une séance précédente consacrée à l'identification de nombres premiers, il avait été demandé aux élèves de travailler sans calculatrice. Les élèves s'en étaient sortis en utilisant leurs doigts. Nous avons inséré la description de leur recherche en annexe 3 de l'article.

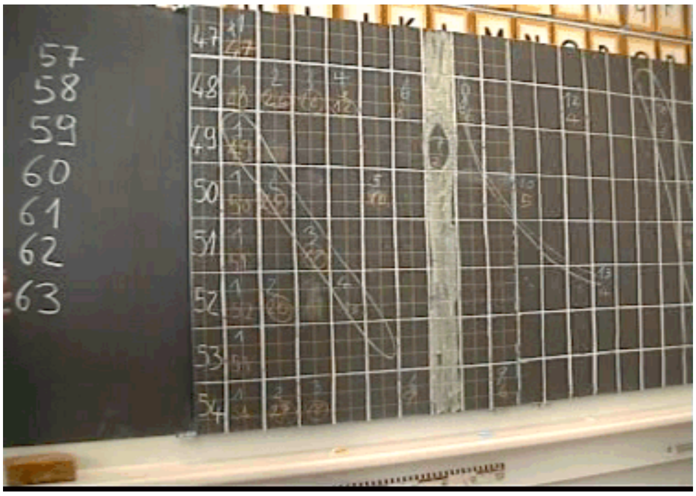

Figure 3 - Dévolution de la tâche

Les élèves travaillent en groupes de trois. Nous avons filmé le travail de trois élèves (Mélanie, Andrea et Samuel) travaillant sur une feuille de grande taille comportant une grille. Nous décrivons et commentons dans ce qui suit, les connaissances et les actions des élèves.

Le maître lance l'activité en demandant aux élèves de compléter le tableau des nouvelles cibles en s'appuyant sur le tableau des cibles préalablement traitées. Mélanie écrit les cibles dans la première colonne de gauche. En regardant le tableau de référence, elle note le 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63. Cette même élève inscrit rapidement dans la première colonne, à côté de toutes les cibles et de haut en bas, le multiplicande 1 et le multiplicateur correspondant à la valeur de la cible. À ce stade du travail (plusieurs mois), c'est un fait acquis pour les élèves, de considérer le 1 et la valeur de la cible comme des nombres « sûrs » pour atteindre la cible.

De manière analogue, Andrea note le multiplicande 2 dans la deuxième colonne du tableau en prenant le soin d'alterner ce chiffre toutes les deux cases comme il peut l'observer dans le tableau de référence. Pour chaque 2 inscrit et toujours de haut en bas, il complète la multiplication avec le multiplicateur, toujours verticalement, en continuant la suite des multiplicateurs. En exploitant la règle du saut de deux cibles (figure 4a), l'élève complète sans trop de difficulté la colonne du diviseur 2.

À l'autre bout de la grande feuille, Samuel écrit toutes les multiplications inverses à celles notées par sa camarade Mélanie (figure 4b).

Figures 4a et 4b - Les élèves se sont réparti le travail

Mélanie poursuit sa tâche en indiquant à son camarade Andrea que le multiplicande 3 peut être noté dans la troisième colonne de la cible 57 car dans le tableau de référence, il est noté pour le 54, l'écart de 3 cases étant reconnu comme un moyen sûr de vérification. Elle note donc, dans un mouvement vertical de la colonne, le multiplicande 3 en comptant à chaque fois trois cases puis ajoute les multiplicateurs dans l'ordre croissant, soit 19, 20 et 21.

Entre temps, Samuel complète la quatrième case de la cible 60 avec le couple 4 sur 15 correspondant à la multiplication 4 × 15 puis, comme le note Mélanie, « *il* (Samuel) *fait tous les contraires* » des multiplications inscrites dans la deuxième colonne. Dans l'avant-dernière colonne, il note ainsi 29 sur 2, 30 sur 2 et 31 sur 2 en veillant bien que ces données soient inscrites sur la même ligne de leurs «contraires».

Mélanie renverse alors les valeurs 4 et 15 inscrites pour la cible 60, en les notant dans la seizième colonne du tableau. En effet, elle dénombre 15 cases en commençant avec 4 mais dans la cinquième case. Elle poursuit son dénombrement jusqu'à 20, afin d'exploiter de manière commutative les valeurs 2 et 30 précédemment notées. Par la même occasion, elle dira à ses camarades qu'il serait judicieux d'écrire les valeurs commutées de 19 et 3 valables pour la cible 57.

Le travail des élèves se poursuit. Ils parviennent à remplir presque entièrement la ligne de la cible 60 riche en diviseurs. Les trois élèves regardent le tableau de référence et cherchent d'autres valeurs possibles. Mélanie s'exclame : « *les cinq on a même pas encore utilisé* », puis compte cinq cases dans la cinquième colonne du tableau mais arrive sur la cible 61, ce qui ne la satisfait pas. La vidéo montre que les élèves utilisent à plusieurs reprises le tableau de référence mais de manière très confuse et aléatoire sans pouvoir en tirer des informations utiles. Samuel dit ne plus savoir que faire. Andrea se demande si, par hasard, le 5 ne pourrait pas marcher pour 59 puis, sur une feuille de papier brouillon, écrit la multiplication « 5 × 12 = » et la montre à son voisin Samuel, élève par ailleurs très doué pour le calcul réfléchi. Samuel se lance alors avec succès dans la résolution du calcul qui sera noté par Mélanie dans les deux formes commutées.

Figure 5 - Essais de multiplications

Forts de ce premier succès, nos trois élèves continuent à chercher des produits. Andrea note « 6 × 12 = ». Samuel lui répond 72. Les élèves se rendent compte qu'ils sont hors du champ des cibles traitées. Mélanie décide de corriger le tir avec « 3 × 12 = ». Toujours Samuel, avec la bonne réponse, indique à sa camarade que l'estimation n'est pas bonne. Ils essayent avec 4 × 12 puis 5 × 12, cette dernière étant déjà notée dans le tableau. Andrea et Mélanie proposent 4 × 14 = 56 puis 4 × 15 = 60, résultat déjà affiché dans le tableau. Andrea et Mélanie poursuivent avec 4 × 13 et 6 × 11, mais sans trop de succès. Ils décident d'explorer la table de 7 en s'appuyant sur les performances en calcul de leur camarade Samuel qui passe à côté du résultat de 7 × 9 et 7 × 8. Ils évoquent aussi 7 × 6 et 7 × 5 sans pour autant chercher le résultat. En plein registre d'opérations multiplicatives, Mélanie repère le 7 × 7 qui se trouve dans le tableau de référence puis dénombre selon une logique verticale des groupes de 7 cases et arrive sur la cible 63 notée sur sa feuille. Elle hésite, elle semble étonnée de son succès. Elle demande à Samuel s'il est possible que pour le 63 figure un 7. Les élèves réfléchissent mais semblent hésiter entre 7 × 8 et 7 × 9. Andrea essaye de calculer tous les multiples de 8, alors que Mélanie fait des va-et-vient avec le tableau de référence pour bien montrer que le 7 est une valeur multiplicative de 63. Andrea essaye alors avec les multiples de 7, en notant avec ses doigts le nombre de groupements nécessaires pour arriver à 63, puis s'exclame : « *63 il y a un 9* » ! Mélanie note le couple 7 sur 9 et son « dual » dans les cases appropriées de la cible 63.

De l'organisation du tableau à la recherche de multiple

Cette narration montre la forte interdépendance entre le tableau qui contraint l'organisation des données et les opérations sur ces mêmes données. Il s'agit d'un processus dynamique qui se décline en trois phases distinctes. Dans un premier temps, c'est l'organisation des données en colonnes et en diagonale qui guide la recherche des élèves. À ceci s'ajoutent les relations dans une même ligne surtout quand la cible à traiter a plusieurs diviseurs. Quant aux diagonales, elles sont significatives surtout lorsque le nombre de cibles consécutives à traiter est très important, ce qui n'est pas le cas ici. Ainsi, les modalités d'organisation des diviseurs dans le tableau peuvent favoriser l'émergence de nouvelles mises en relations.

Dans un deuxième temps, nous avons noté que les données inscrites dans le nouveau tableau alimentent d'autres résultats, les élèves retrouvant la logique habituelle de recherche des diviseurs ligne par ligne. Tout se passe comme si le tableau s'auto-alimentait en produisant des relations internes aux cibles traitées. Les connaissances sur la commutativité donnant un élan tout particulier à la recherche des élèves.

La troisième phase, la plus significative du point de vue de nos questions de recherche, concerne l'émergence de la multiplication sous forme écrite et plus particulièrement des tables de multiplications (par exemple, la table de 7 pour chercher le complément multiplicatif de 63) et ceci alors qu'à aucun moment des séances « cibles » nous avons été amenés à formuler des injonctions ou des explications allant dans le sens du formalisme multiplicatif. Ce sont là des signes forts d'une certaine façon de traiter et d'organiser le nombre et ses relations possibles et c'est peut-être dans ce cas de figure, où la calculatrice est absente, qu'il est possible d'apprécier les savoirs mathématiques institutionnalisés qui en découlent. En d'autres termes, la rupture de contrat qui s'en suit pourrait expliquer l'émergence de ces connaissances multiplicatives qui permettraient de contrôler efficacement et économiquement, les relations existantes entre les nombres.

Sur l'instrumentation

Comment situer nos observations par rapport à l'approche instrumentale (Rabardel, 1995)[14]

[14] Rabardel considère que l'outil doit être vu a priori comme un objet physique, qu'il nomme artefact, mais que dès qu'il est utilisé dans un but précis, il est caractérisé aussi par la construction psychologique de l'utilisateur qui lui confère ainsi le statut d'instrument: un instrument n'existe pas en soi, un artefact devient un instrument quand un sujet a pu se l'approprier pour lui-même et l'a intégré dans sa propre activité ». Si l'élève qui l'emploie, allant parfois même jusqu'à détourner son utilisation standard au profit de la résolution de la tâche, donne le statut d'instrument à la calculatrice, on dira qu'il instrumentalise la calculatrice. Dans cette genèse instrumentale, il se peut qu'on observe, en lieu et place de l'adaptation par

qui permet d'éclairer certains phénomènes récurrents lorsque les élèves travaillent avec des calculatrices ou des logiciels (Guin & Trouche, 2002 ainsi que Floris & Conne, 2007) ? Parmi ces phénomènes, citons la difficulté à exploiter, dans l'utilisation de l'artefact, certains savoirs enseignés, comme dans le cas de certaines fonctions mathématiques qui viennent contredire l'affichage standard d'un graphique (Trouche, 2007) ou encore dans la simplification de fraction (Weiss & Floris, 2008). Ces phénomènes sont également repérables dans le cas présent, comme le montre en particulier le travail sur les grandes cibles.

L'un des soucis de l'approche instrumentale en didactique est de documenter la nécessité de guider la genèse instrumentale, c'est-à-dire une utilisation intelligente de l'outil et d'étudier les conditions d'un tel guidage. L'expérimentation présentée ici apporte à cet égard des éléments intéressants. Tout se passe comme si le milieu sous-jacent aux situations cibles était suffisamment robuste pour favoriser une genèse instrumentale mathématiquement efficace. L'une des caractéristiques importantes de ce milieu est le rôle intrinsèque joué par la calculatrice, l'objectif à atteindre étant un état de la calculatrice. Il ne s'agit pas d'appliquer des connaissances acquises par ailleurs puisque la manifestation des connaissances correspond à la réussite avec la calculatrice. Cette réussite n'est certes pas suffisante, d'où le rôle fondamental joué par le tableau des cibles à remplir et la discussion des résultats obtenus, les demandes d'anticipation et de formulation de « règles pour gagner » dans la perspective de la Théorie des Situations (Brousseau, 1986).

Ceci n'a pas cependant pas empêché la résurgence des phénomènes cités un peu plus haut. L'exploitation de multiplications pour la recherche de cibles a ainsi donné lieu à une profusion d'essais sans utilisation des propriétés mathématiques connues, mais ceci a même été observé sans calculatrice, comme nous l'avons décrit dans la partie précédente.

Très souvent, dans les petits degrés, l'utilisation de la calculatrice se veut d'abord ludique et beaucoup d'enseignants estiment important de laisser les élèves explorer l'outil15, très souvent apporté de la maison, sans véritables perspectives didactiques. Nous nous situons à l'opposé. L'utilisation, au début de l'expérimentation surtout, d'un modèle de calculatrice unique, avec possibilité de démonstration pour toute la classe en utilisant un modèle transparent est pour nous un élément crucial de l'instrumentation qui n'a pas freiné l'ardeur des élèves, au contraire. Il a ainsi été possible d'organiser un milieu d'apprentissage très riche.

Bilan et perspectives

La calculatrice est un très bon moyen pour étudier le nombre et cela dès les premiers degrés de la scolarité élémentaire. De nombreux savoirs institutionnalisés ont pris forme au sein de ce dispositif d'enseignement et de recherche :

- La parité et l'imparité des nombres ainsi qu'un début d'approche plus générale sur les critères de divisibilité. Le partage d'un nombre en parts égales est l'enjeu majeur de la tâche de la « cible ». Notre dispositif a inauguré cette question mathématique avec le partage en deux parties égales d'un nombre quelconque. D'autres critères de divisibilité

---

l'usager de l'artefact à ses besoins, un processus d'instrumentation où l'artefact conditionne l'action de l'usager.

[15] Par exemple faire afficher des nombres de telle sorte qu'on puisse lire le mot « SOLEIL », à l'envers.

plus élaborés ont été explorés, comme, par exemple, le 4 qui divise les nombres se terminant par 6 dont la dizaine est impaire. Un milieu propice au traitement du nombre et plus en particulier au partage en parts égales a été ainsi constitué grâce aux expériences du traitement du nombre à la calculatrice.

- Les nombres premiers comme univers numérique particulier et curieux. S'il est plutôt inhabituel que l'on étudie ce chapitre des mathématiques à l'école primaire et il est encore plus rare et exceptionnel que l'on traite les nombres premiers lors de la première année de l'école obligatoire. Cette expérience a été possible, une fois encore, à l'aide de l'instrument de calcul qui a fait émerger ces nombres particuliers qui échappent à la logique du partage additif. La mise en relation de connaissances et la multiplicité des tâches soumises au jeu didactique, ont permis l'émergence d'un raisonnement sur la nature et les caractéristiques de ces nombres particuliers.

- Le passage de l'addition itérée à la multiplication et la commutativité de cette dernière est certainement un des points forts du dispositif. Nous avons observé tout particulièrement comment les connaissances instrumentées par la calculatrice autour des additions itérées laissent la place, progressivement, aux opérations multiplicatives plus économiques pour le traitement de la tâche de la cible. Ces transformations sont supportées par la situation didactique, le milieu de cette dernière conjuguant les propriétés des nombres entiers naturels et les contraintes réglées de l'utilisation de l'artefact (gestes signifiés sur les touches, affichages des valeurs numériques).

Une conjoncture favorable propre au caractère instrumental de la calculatrice a donné un élan de recherches et de questions qui ont obligé les élèves à mettre de l'ordre dans l'univers des nombres. La calculatrice permet cela car, non seulement elle contraint la pensée du sujet, mais aussi elle est rapide et économique au niveau de l'écriture et la lecture des symboles numériques. Le débit d'informations et de connaissances mathématiques qu'apporte le traitement du nombre par la calculatrice est unique et comme tel, il permet la constitution d'une « masse critique » de signes utiles et nécessaires à l'évolution du milieu de la situation.

Les connaissances des élèves jouent un rôle actif et déterminant dans la mise en relation des objets mathématiques visés par les contraintes de l'artefact. Elles sont à la fois le moteur de l'expérience mathématique et le produit de cette dernière. Quand l'expérience rencontre le savoir, le processus instrumental se trouve enrichi de nouvelles techniques utiles qui sont réinjectées dans le milieu de la situation comme ce fut le cas pour le passage de l'addition itérée à la multiplication. La tâche de la cible a manifestement un caractère « fondamental » dans le panorama de l'étude du nombre et de ses relations. Cette appellation qui fait écho à la Théorie des Situations de Brousseau, nous permet de mettre en exergue, une fois de plus, la richesse des potentialités de la tâche mais aussi le cadre structurant des différentes phases qu'on a pu observer. La transition d'une responsabilité à la charge de l'artefact vers une responsabilité à la charge de l'élève témoigne des différentes étapes d'action, de formulation et de validation que la tâche est en mesure de produire. Nous sommes conscients que les recherches à ce sujet doivent être complétées par d'autres données mais notre hypothèse tend à considérer la tâche de la cible comme un dispositif qui structure fortement les connaissances numériques des élèves.

En ce qui concerne les perspectives pour l'enseignement, même si le dispositif présenté ici est exceptionnel de par son caractère exploratoire, sa durée et la quantité de propriétés mathématiques travaillées, les résultats obtenus devraient permettre une adaptation correspondant aux exigences des programmes, puisque ces derniers prévoient, en Suisse comme en France, une place tant pour la calculatrice que pour les démarches d'investigation. On peut imaginer un travail plus bref, limité à la notion de parité et de moitié dans les plus petits degrés (1P et 2P, élèves de 6-7 ans) et une introduction de la multiplication voire de la division entière avec des élèves plus âgés. Il devrait être possible d'exploiter les observations et analyses présentées ici pour élaborer pour chaque séquence une liste de tâches judicieusement choisies afin d'aboutir aux objectifs visés.

Nous terminerons cet article en soulignant une dernière fois la portée et la pertinence de la calculatrice pour l'étude du nombre, et cela dès le plus jeune âge. C'est un instrument fabuleux dont les potentialités ne sont pas encore totalement connues. L'interaction entre l'homme et la machine en général est certes un argument très exploité qui offre un cadre interprétatif large. La spécificité de notre problématique qui traite du rôle de l'utilisation de la calculatrice sur les connaissances des jeunes apprenants demeure encore très méconnue. Le corps enseignant primaire en particulier résiste encore à cette vision des choses et peine à utiliser la calculatrice lors des leçons de mathématiques. À cette dernière, on ne réserve qu'un rôle de contrôle de ce qui a été fait « de tête » et souvent de manière très ponctuelle. De notre côté, nous avons commencé à nous poser des questions de recherche en regardant ce qui est possible à l'école primaire, en espérant pouvoir ouvrir une brèche dans la compréhension du fonctionnement de la pensée de l'homme pris au « piège » des mathématiques et de leurs instruments.

Références bibliographiques

ARTAUD M. (2003) Analyser des praxéologies mathématiques et didactiques « à calculatrice » et leur écologie. *Actes électroniques du colloque Européen ITEM, Reims juin 2003.* http://edutice.archives-ouvertes.fr/docs/00/05/42/23/PDF/co38th4.pdf (page consultée en octobre 2010).

BROUSSEAU G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 2.1, 37-127.

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 7.2, 33-115.

BROUSSEAU G. (1998) Le contrat didactique : l'enseignant, l'élève et le milieu. In BALACHEFF N., COOPER M., SUTHERLAND R., WARFIELD V. (Eds) *Théorie des situations didactiques* (pp. 299-327). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CONNE F. (2003) L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. In DURAND-GUERRIER V. & TISSERON C. (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Cahiers ARDM & IREM Paris VII.* LIRDHIST, Université Claude Bernard Lyon1.

DEL NOTARO L., FLORIS R. (2005) L'utilisation de la calculatrice à l'école élémentaire : une nouvelle approche didactique pour l'enseignement de la numération. *Math-École,* n° 215, 4-18.

DEL NOTARO L., SCHEIBLER A. (2003) Modèles de milieu à l'épreuve de la contingence en enseignement spécialisé. In DURAND-GUERRIER V. & TISSERON C. (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Cahiers ARDM & IREM Paris VII.* LIRDHIST, Université Claude Bernard Lyon1.

FAVRE J.-M. (1994) Élaborer une démarche d'enseignement par l'observation de la formation et de l'évolution d'un concept : la multiplication. *Grand N*, n°53, 27-37.

FAVRE J-M. (2008) Jeu de tâches : un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Grand N,* n°82, 9-30.

FLORIS R. & CONNE F. (Eds) (2007) *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques. Intégrer des artefacts complexes, en faire des instruments au service de l'enseignement et de l'apprentissage*. De Boeck, Bruxelles.

GUIN D. & TROUCHE L. (Eds) (2002) *Calculatrices Symboliques* ; *Transformer un outil en un instrument de travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

KIERAN C., & GUZMAN J. (2007) Interaction entre technique et théorie : émergence de structures numériques chez des élèves de 12 à 15 ans dans un environnement calculatrice. In FLORIS R. & CONNE F. (Eds.) *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques.* Bruxelles : De Boeck.

RABARDEL P. (1995) *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Armand Colin.

TROUCHE L. (2002) Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs. In Guin D. & Trouche L. (Eds.) *Calculatrices Symboliques* ; *Transformer un outil en un instrument de travail mathématique : un problème didactique* (pp. 243-275). Grenoble : La Pensée Sauvage.

TROUCHE L. (2007) Environnements informatisés d'apprentissage : quelle assistance didactique pour la construction des instruments mathématiques ? In FLORIS R. & CONNE F. (Eds.) *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*. Bruxelles : De Boeck.

WEISS L. & FLORIS R. (2008) Une calculatrice pour simplifier des fractions : mise en évidence de techniques inattendues. *Petit x,* n°77, 49-75.

WHEATLEY G. & SHUMWAY R. (1992) The Potential for Calculators to Transform Elementary School Mathematics. In FEY J. T. (Ed.), *Calculators in mathematics education,* Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 1-8). Reston, VA: NCTM.

ANNEXE 1 - Encadré 3

Exemple de feuille de travail

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
11	1										11														
12	1	2	3	4		6						12													
13	1												13												
14	1	2					7							14											
15	1		3		5										15										
16	1	2		4				8								16									
17	1																17								
18	1	2	3			6			9									18							
19	1																		19						
20	1	2		4	5					10										20					
21	1		3				7														21				
22	1	2									11											22			
23	1																						23		
24	1	2	3	4		6		8				12												24	
25	1				5																				25

Encadré 3 - Exemple de feuille de travail remplie correctement
pour les cibles de 11 à 25

ANNEXE 2 – Encadré 9

Les cibles « pauvres » : découverte des nombres premiers

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*	*27*	*28*	*29*	*30*
13	1												13																	
14	1	2					7							14																
15	1		3		5										15															
16	1	2		4				8								16														
17	1																17													
18	1	2	3			6			9									18												
19	1																		19											
20	1	2		4	5					10										20										
21	1		3				7														21									
22	1	2									11											22								
23	1																						23							
24	1	2	3	4		6		8				12												24						
25	1				5																				25					
26	1	2											13													26				
27	1		3						9																		27			
28	1	2		4			7							14														28		
29	1																												29	
30	1	2	3		5	6				10					15															30

Encadré 9 - Cibles consécutives et nombres premiers

ANNEXE 3

Compter sur les doigts pour atteindre les cibles

Tâche : Au tableau figurent les cibles de 20 à 27. Puisqu'il s'agit de la troisième fois que les élèves travaillent sur celles-ci, l'enseignant demande d'indiquer de mémoire quels nombres permettent d'atteindre l'une ou l'autre des cibles notées au TN et d'expliquer pourquoi le nombre choisi « marche ou ne marche pas ». Les élèves viennent, à tour de rôle, remplir les cases au tableau noir. Au bout de quelques passages, on peut lire que le 1 et 2 sont des diviseurs de 21, que le 7 est un diviseur de 23, que le 4 est un diviseur de 24 et que le 7, le 9 et le 27 sont des diviseurs de 27.

Marlène : se propose d'effacer le 2 qui a été noté pour la cible 21. Elle justifie sa réponse en dénombrant 21 par « groupes de 2 doigts ». Ainsi, en montrant en alternance le pouce et l'index, elle compte jusqu'à 22, le 21 n'étant pas pair il ne « tombe » pas sur l'index : 1 (pouce), 2 (index), 3 (pouce), 4 (index), 5 (pouce), 6 (index), 7 (pouce), 8 (index), 9 (pouce), 10 (index), 11 (pouce), 12 (index), 13 (pouce), 14 (index), 15 (pouce), 16 (index), 17 (pouce), 18 (index), 19 (pouce), 20 (index), 21 (pouce et cible), 22 (index). L'élève atteste que le nombre 2, additionné de manière répétée, ne permet pas d'atteindre la cible 21.

Cette même élève corrige aussi le nombre 7 qui a été retenu par un camarade pour la cible 27. L'élève compte sur ses doigts par groupes de 7 et atteint le nombre 28 avec le septième doigt de la série. En montrant le dépassement de la cible 27 et, par la même occasion, la correspondance entre le nombre 28 et le dernier doigt de la série, elle atteste que le nombre 7, additionné de manière répétée, ne permet pas d'atteindre la cible 24.

L'élève complète le tableau en ajoutant le nombre 3 pour la cible 24 et montre, toujours sur ses doigts, qu'en additionnant 3 de manière répétée on arrive à 24 : 1, 2, 3 (pouce, index, moyen) ; 4, 5, 6 (pouce, index, moyen) ; 7, 8, 9 (pouce, index, moyen) ; 10, 11, 12 (pouce, index, majeur) ; 13, 14, 15, (pouce, index, moyen) ; 16, 17, 18 (pouce, index, moyen) ; 19, 20, 21 (pouce, index, moyen) ; 22, 23, 24 (pouce, index, moyen).

L'enseignant demande de « voir » pourquoi le 4 marche pour la cible 24. L'élève, sûr de sa stratégie, compte sure ses doigts (pouce, index, majeur, annulaire) par « groupes » de 4 jusqu'à 24.

Diogo : explique ce qu'il a compris des exemples précédents et montre pourquoi 1 marche pour la cible 21. Dans ce cas de figure où on a besoin que d'un seul doigt, l'élève marque avec des mouvements du pouce les « groupes de 1 » nécessaires pour atteindre 21. Ensuite, il essaye aussi avec 2 pour la même cible en marquant des groupes de 2 avec le pouce et l'index. L'élève s'aperçoit que le 21 « tombe » sur le pouce et le 22 sur l'index et conclut que le 2 n'est par un nombre qui permet d'atteindre la cible 21. L'enseignant demande à Diogo de vérifier si le 7 marche pour le nombre premier 23. L'élève compte par groupe de 7 doigts pour atteindre 28 et attester que le 7 n'est pas un nombre permettant d'atteindre la cible 23. Notons que l'élève poursuit son comptage jusqu'à 28 pour vérifier l'impossibilité alors qu'il aurait pu s'arrêter au moment ou il observe que le 23 tombe sur l'index de sa main.