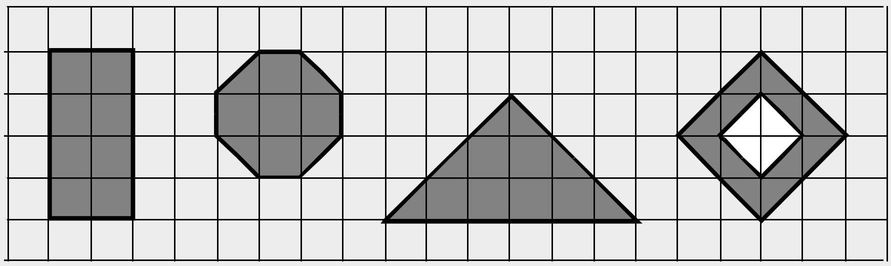
POINT DE DÉPART

DÉCORATION[1]

Un peintre a peint ces quatre figures différentes sur un mur, chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur.



Il a utilisé des pots de peinture de même grandeur :

- 18 pots de rouge pour une des figures,
- 21 pots de bleu pour une autre figure,
- 27 pots de jaune pour une autre figure,
- des pots de noir pour la figure qui reste.

À la fin de son travail, tous les pots étaient vides.

Indiquez la couleur de chaque figure.

Combien de pots de peinture noire a-t-il utilisés ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

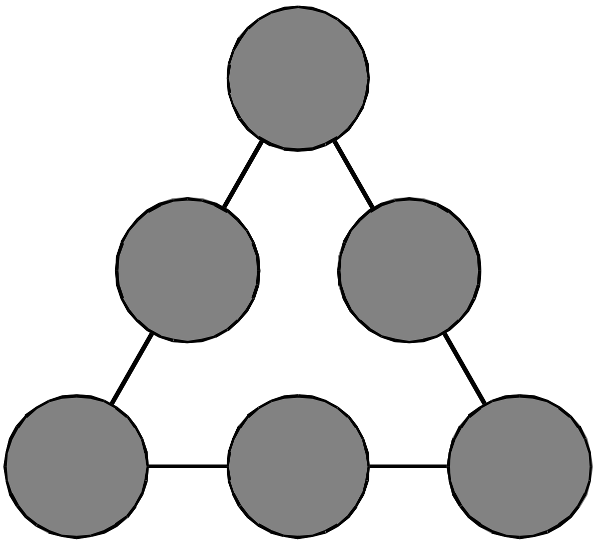
---

[1] Problème de la 2ème épreuve du 9ème Rallye Mathématique Transalpin (RMT 2001) http://www.armtint.org ; ce problème est aussi repris dans une présentation « PbgeoC3.pps » conçue comme un complément à une animation pédagogique concernant l'enseignement de la géométrie au cycle 3, sur le site de D. Pernoux : http://pernoux.pagesperso-orange.fr

POINT DE DÉPART

TRIANGLE MAGIQUE[2]

Placez les six nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 dans les cases pour que la somme des trois nombres soit égale à 10, sur chacun des côtés du triangle.



Quelques premières réflexions sur ce point de départ figurent en pages suivantes.

[2] Extrait de la brochure Ateliers de résolution de problèmes avec matériel du Rallye Mathématique Transalpin (RMT) http://www.armtint.org. Ce point de départ a déjà été publié dans Grand N en 2008, mais l'analyse n'était pas proposée.

Décoration et Triangle magique : premières réflexions

(par François Jaquet, avec la participation de Roland Charnay)

DÉCORATION

Quelles sont les tâches des élèves pour résoudre ce problème et les savoirs qu'ils devront mettre en œuvre ?

Un inventaire des tâches peut être rapidement dressé :

- s'approprier la situation : lire l'énoncé, trier et comprendre les données ;
- déterminer, pour les surfaces, la grandeur à prendre en compte ;
- mesurer l'aire de chaque surface en choisissant une unité ;
- associer les aires trouvées et les nombres de pots donnés et à trouver ;
- calculer le nombre de pots demandé.

Reprenons ces tâches une à une pour déterminer les savoirs ou compétences sous-jacentes à leur traitement.
Une des premières tâches, à la lecture de l'énoncé et avant d'aborder la résolution, est le tri des données et questions qu'on désigne parfois aussi par « appropriation de la situation » :

- il y a d'une part les quatre figures, dessinées sur un quadrillage, d'autre part des nombres de pots (18, 21 et 27) ;
- il y a aussi des formes et des couleurs ;
- et plusieurs questions à propos de la couleur de chaque forme et du nombre de pots de peinture noire.

En observant les figures et en constatant que les nombres de pots à utiliser diffèrent de l'une à l'autre, on se rend compte qu'elles ne sont pas de même « grandeur ». Une deuxième tâche est alors de déterminer la nature de la « grandeur » à prendre en compte pour des figures : l'aire ou le périmètre. Le contexte de surfaces à peindre favorise nettement le choix de l'aire.

La troisième tâche est la mesure de l'aire de chaque figure, selon une unité à déterminer. L'aire d'un carré du quadrillage est évidemment le premier candidat pour cette unité, puisqu'elle est partie intégrante de la représentation utilisée dans l'énoncé. Mais certaines figures ne sont pas seulement composées de carrés entiers, on y trouve aussi des demi-carrés de forme triangulaire. Il faudra faire un choix et tenir compte de la relation entre ces deux unités d'aire à envisager : l'une étant le double de l'autre. Il y a alors, pour la détermination des aires, interférence ou conflit entre nombre de « pièces » et aire de ces pièces : le rectangle est composé de 8 carrés et a une aire de 8 (en carrés-unités) alors que son voisin, l'octogone, est subdivisé en 9 parties (5 carrés et 4 triangles) et a pourtant une aire inférieure à celle du rectangle : 7 (en carrés unités, après conversion de ses 4 triangles).

Les quatre aires trouvées (8, 7, 9 et 6, l'aire d'un carré du quadrillage étant choisi pour unité), il faut les faire correspondre, terme à terme, aux trois nombres donnés de pots 18 (rouges), 21 (bleus), 27 (jaunes) et au nombre inconnu de pots noirs. C'est la quatrième tâche du problème, la plus délicate.

Il s'agit, en fait, d'envisager toutes les possibilités qui, même après avoir ordonné les deux séries de nombres, sont encore au nombre de quatre, c'est-à-dire aux quatre positions de l'inconnue selon le schéma suivant :

les mesures d'aires (ordonnées) :		6	7	8	9
les nombres de pots (ordonnés eux aussi) :	A	?	18	21	27
	B	18	?	21	27
	C	18	21	?	27
	D	18	21	27	?

Cette quatrième tâche est différente des précédentes. Elle est à la fois de nature combinatoire, pour l'inventaire exhaustif des possibilités des deux suites ordonnées, et de nature numérique, pour la recherche d'une relation « cohérente » ou « satisfaisante » dans le contexte donné.

Pour l'adulte, cette relation est évidente et sa cohérence sera vérifiée par la découverte de la constante « nombre de pots par carré-unité » ou, en d'autres termes, d'un « coefficient de proportionnalité » entre les deux suites, doté d'une grandeur physique (elle-même combinaison de deux autres et issue de deux espaces de mesures différents).

Pour l'élève, ce n'est pas du tout évident. Il ne sait pas qu'il s'agit de proportionnalité, et même si on le lui disait, il n'en tirerait aucun indice pour l'aider dans sa recherche (en admettant qu'il n'ait pas plus de 12 à 14 ans). Il ne tire pas non plus une grande aide de la petite précision de l'énoncé « *… chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur* ». Le savoir mathématique à mettre en œuvre qui va lui permettre de trouver la correspondance entre les deux suites lui est entièrement dévolu. Il s'agit de percevoir la relation « multiplier par 3 » entre chaque mesure d'aire et le nombre de pots correspondant qui apparaît dans la possibilité C de l'inventaire précédent. Avec la découverte de ce facteur, on peut savoir que c'est la figure d'aire 8 (le rectangle) qui est en noir, qu'il faudra 24 pots de peinture noire et que l'octogone, le triangle et le « carré avec trou » sont respectivement bleu, jaune et rouge.
Mais la découverte du facteur « 3 » n'est pas suffisante. Il faut encore pourvoir lui « donner du sens » c'est-à-dire être capable de la justifier et de l'exprimer, en référence au contexte, par une expression qui mentionne explicitement sa dimension : des « pots par carré ».

Commentaires sur la pratique de ce point de départ

Pour quels degrés ?

Dans les conditions de passation du rallye mathématique transalpin : par groupes absolument autonomes (sans la présence du maître), avec un temps suffisant (jusqu'à 50 minutes) et avec la demande de rédiger une explication des réponses, on a observé une majorité de réponses justes dès l'âge de 10 - 11 ans (CM2). Des expérimentations ont montré qu'on peut aussi proposer le problème à des élèves plus jeunes : 9 - 10 ans (CM1) voire 8-9 ans (CE2) à condition de s'assurer qu'ils ont été capables de trouver les quatre mesures des aires avant de se lancer dans la recherche des correspondances avec les nombres de pots.

Avec quelles interventions de l'enseignant ?

Comme le montre l'analyse précédente, les tâches et les savoirs à mobiliser sont complexes. On peut donc être tenté d'aider les élèves.

Il faut cependant se rappeler que toute intervention de l'enseignant sur la résolution se fait au détriment du travail mathématique de l'élève, particulièrement dans un problème comme celui-ci. Par exemple, en suggérant de commencer par calculer l'aire des figures, on évite à l'élève le tri des données et le conflit éventuel entre l'aire et le périmètre ; en faisant remarquer qu'il y a deux petits triangles dans un carré, on résout à sa place la question de conversion des unités ; en insistant sur « les couches de même épaisseur » ou en traduisant cette donnée en « même nombres de pot par carré », on lui retire l'essentiel de sa recherche.

Dans le contexte du rallye, la résolution est à la charge entière des élèves. Toutes les tâches recensées leur sont donc entièrement déléguées. Dans un contexte de classe, selon l'apprentissage principal visé (résolution d'un problème de proportionnalité, calcul d'aires avec une unité à déterminer …), l'enseignant peut organiser des mises en commun intermédiaires pour s'assurer que les éléments nécessaires à la résolution du problème principal lié à l'enjeu d'apprentissage sont en place. Par exemple, s'il souhaite utiliser cette situation pour travailler la proportionnalité, il pourra, à un moment donné, s'assurer que tous les élèves se sont bien intéressés aux aires des figures et en ont calculé correctement la mesure avec toujours la même unité.

Avec quels contrôles de la réponse ?

Décoration est un problème où l'on peut arriver à la réponse juste par un raisonnement faux ou sans avoir rien compris. C'est la raison pour laquelle il est indispensable d'exiger des explications ou justifications de la réponse, de conduire une validation collective ou de vérifier les procédures sur des variantes du problème.

Les analyses des explications données par les élèves ont fait apparaître trois grandes catégories de procédures[3] :

(a) La reconnaissance spontanée de 18, 21 et 27 qui sont des multiples familiers de 3 et, par conséquent, le lien purement numérique « 3 fois » entre les nombres 6 et 18 ; 7 et 21 ; 9 et 27, qui conduit à 24 comme correspondant de 8.

(b) Une observation et un ajustement des écarts entre les nombres 18, 21 et 27 dans la séquence :

$$18 \xrightarrow{+3} 21 \xrightarrow{+3} \ldots \xrightarrow{+3} 27$$

et la découverte du nombre 24 à placer entre 21 et 27.

[3] Voir Vernex M. (2001) Analyse et utilisation en classe du problème « Décoration » du 9e RMT. *Math-Ecole* 198, 4-18.

(c) Une recherche systématique au moyen de divisions ou multiplications lacunaires qui fait apparaître la dimension physique du rapport « 3 » comme rapport de deux grandeurs : « le nombre de pots par carré ». On peut aussi dire que, comme pour la première procédure (a), le facteur « 3 » a été découvert, mais ici, avec du sens !

La première procédure (a) n'est efficace que dans le domaine restreint aux nombres familiers de la table de multiplication : une expérimentation à grande échelle[4] avec les données de 72, 84 et 96 pots de peinture sans modifier les mesures d'aire 6, 7, 8 et 9 a fait apparaître des obstacles importants chez de très nombreux élèves jusqu'à 13 à 14 ans. Ils ne connaissent pas les multiples de 12, mais perçoivent les écarts de 12 et s'orientent vers la deuxième procédure (b) qui aboutit à la réponse 60 (erronée) aussi souvent qu'à la réponse 108 (juste, mais peut-être par hasard).

La procédure (b) est hasardeuse. Elle aboutit le plus souvent à des réponses erronées car les élèves ne travaillent que sur les régularités additives qu'ils reportent d'une suite sur l'autre. D'autres expérimentations du problème ont permis de voir que, lorsque, dans une seconde phase, on ajoute une cinquième figure dont l'aire mesure 20 (en carrés unités), les élèves qui ont observé les écarts rencontrent de sérieuses difficultés alors que ceux qui ont reconnu le facteur « 3 » (en pots par carrés) réussissent facilement.

L'efficacité de la troisième procédure (c), qui prend en compte le rapport (de proportionnalité) ou le facteur (de linéarité) avec sa dimension de « rapport de deux grandeurs » dépend toutefois de la nature des nombres en présence. Avec des aires de 6 ; 7 ; 8 ; 10 et les nombres de pots 15 ; 20 ; 25, le rapport qui n'est plus un nombre naturel représente un gros obstacle pour des élèves de 10 à 12 ans, même s'ils disposent d'une calculatrice et savent s'en servir.

En résumé, *Décoration* permet aux élèves une approche intuitive du concept de proportionnalité, au travers de la prise de conscience qu'il y a un facteur commun qui relie un terme d'une des deux suites au terme correspondant de l'autre suite, mais ce n'est vraiment qu'un « point de départ », qui pourra être exploité sur une longue durée.
Un autre enjeu pourrait être trouvé du coté de la mesure d'une aire avec une unité à déterminer, même si le travail sur cet enjeu ne conduit pas à une résolution complète du problème. Dans un contexte de classe, les deux enjeux (mesure d'aire et proportionnalité) peuvent d'ailleurs être envisagés, à condition d'envisager l'exploitation de cette situation sur un temps assez long (deux séances, par exemple).

Remarques complémentaires

1) La conclusion précédente est peu ambitieuse du point de vue de la « proportionnalité ». C'est celle de ceux qui ont expérimenté le problème, à très grande échelle et dans plusieurs pays[5], indépendamment des programmes scolaires, mais en accordant une attention prioritaire aux procédures « naturelles » des élèves, en fonction de leur âge. Dans le cadre des programmes français et avec la terminologie en vigueur, au niveau CE2 (et même CM1) ce problème relèverait plutôt de la catégorie « problème ouvert » (compte tenu des savoirs étudiés par les élèves), au CM2 il pourrait être utilisé comme situation-problème

[4] Jaquet F. et all. (2007) Quelques aspects de la proportionnalité dans les problèmes du RMT - Groupe de travail n° 2. In Grugnetti L., Jaquet F., Medici D., Rinaldi M.G. (Eds.) *Actes des journées d'étude sur le Rallye mathématique transalpin*. Vol 6. Parma 2006, pp. 101-116.

[5] Groupe « Proportionnalité » de l'Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT) qui en est à sa sixième année de pratiques, recherches et expérimentation sur les traces du concept de proportionnalité.

pour une approche de la proportionnalité et, en 6^e et 5^e, il pourrait être considéré comme problème de réinvestissement.

2) L'intérêt de ce problème pour l'apprentissage de la proportionnalité peut être replacé dans le contexte des programmes français actuels. L'étude de la proportionnalité pour elle-même n'est envisagée qu'à partir de la classe de cinquième où sont étudiées les suites de nombres proportionnelles (on parle de « Tableau de proportionnalité » pour arriver à la fonction linéaire en troisième. Auparavant, comme l'indique le programme de sixième, « les problèmes à proposer (qui relèvent aussi bien de la proportionnalité que de la non proportionnalité) se situent dans le cadre des grandeurs (quantités, mesures). Plus clairement, on peut dire que, au cycle 3 et en sixième, « *les élèves sont confrontés à de nombreux problèmes qu'ils résolvent en utilisant des raisonnements appuyés implicitement sur des propriétés de la proportionnalité* » (comme le précisait le document d'accompagnement des programmes consacré à l'articulation école-collège). De ce point de vue, le problème envisagé ici peut être considéré comme difficile pour le cycle 3 dans la mesure où les raisonnements utilisant les propriétés de linéarité sont difficilement envisageables (il n'existe pas de relation multiplicative simple entre les nombres 6, 7, 8 et 9) et que la solution la plus envisageable est celle qui consiste à déterminer le nombre de pots par carré-unité (nombre qui peut être assimilé au coefficient de proportionnalité).

TRIANGLE MAGIQUE

Comment les élèves peuvent-ils résoudre ce problème ?

À première vue, il suffit de savoir additionner des nombres de 1 à 6 pour trouver une solution. Mais une analyse de la tâche, enrichie par de très nombreuses observations d'élèves[6] permet de constater que la mise en œuvre de ce savoir se combine avec la maîtrise des contraintes pour trouver la disposition demandée des six nombres :

- La compréhension de « somme » de trois termes choisis parmi les nombres 1 à 6 est liée aux règles de positionnement des jetons : les six jetons doivent être placés, le déplacement de l'un entraîne celui d'un autre, la somme des nombres sur un côté doit être contrôlée en permanence et peut être modifiée.
- La contrainte de la disposition en triangle fait qu'un nombre placé sur un sommet intervient dans la somme de deux côtés, alors qu'un nombre placé au milieu n'intervient que dans une seule somme.

---

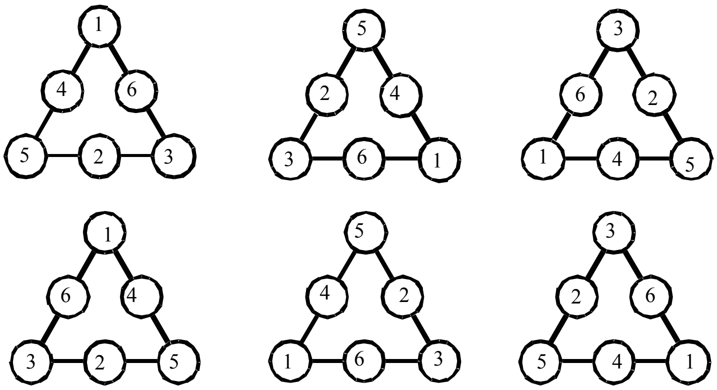
[6] Cette activité est proposée dans la brochure : Jaquet F. (2007) *Ateliers de résolution de problèmes avec matériel*. Ed. ARMT, qui propose 20 problèmes du RMT à résoudre sans papier ni crayon, avec du matériel uniquement. Pour ce *Triangle magique,* le matériel, très facile à réaliser, consiste en un plan de jeu et six jetons mobiles sur les quels sont écrits les nombres de 1 à 6. Les commentaires qui suivent sont issus de l'observation de centaines d'élèves ou de groupes d'élèves confrontés à cette construction du triangle et extraits des commentaires de la brochure citée.

- Au delà de l'addition, intervient la commutativité de cette opération. Il faut parfois beaucoup de temps pour que l'enfant se rende compte qu'une permutation de jetons d'un même côté n'affecte pas sa somme, mais fait varier celle d'un autre côté.
- Comme il y a trois nombres par côté, l'associativité de l'addition intervient aussi, même si elle n'est pas perçue explicitement : il faut connaître les décompositions de 10 en somme de trois termes différents de 1 à 6. Par exemple, le « 6 » sera obligatoirement sur le même côté que le « 1 » et le « 3 » ou, le « 4 » et le « 3 » ne peuvent être sur le même coté car il faudrait un second « 3 » comme complément à 10 ...

Dans une acception plus large du « savoir mathématique », il faut aussi penser à la vérification de la (des) solution(s) trouvée(s) et au contrôle du respect des contraintes.

L'unicité de la solution n'est pas demandée dans l'énoncé, mais peut être l'objet d'une réflexion qui fera intervenir les différentes positions du triangle complété et faire ainsi intervenir des savoirs du cadre géométrique :

- le repérage des nombres 1, 3 et 5 sur les sommets du triangle et les positions « opposées » respectives de 2, 4 et 6 ;
- les rotations d'un tiers de tour et les symétries axiales qui laissent le triangle invariant pour autant que les chiffres soient considérés comme mobiles à l'intérieur de leurs emplacements.



Commentaires sur la pratique de ce point de départ

L'activité peut s'organiser individuellement ou par groupes de deux, de manière autonome, pour des élèves dès 8 à 9 ans.

Le matériel (six jetons numérotés) permet un gain de temps important, à condition que la (les) solutions soient transcrites par écrit pour en conserver une trace, en vue du contrôle et/ou de mises en commun successives. À l'inverse, le matériel, en permettant de multiplier facilement les essais hasardeux, peut affaiblir le recours aux déductions. Il s'agira donc de vérifier que les élèves soient capables d'expliquer leurs procédures et qu'ils soient convaincus de l'unicité de leur solution, à une isométrie près.

Une relance intéressante et facile à gérer est de demander aux élèves qui ont obtenu leur(s) solution(s), de généraliser la question à d'autres sommes :

> « *Placez les six nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 dans les cases pour que la somme des trois nombres soit la même sur chaque côté du triangle.* »

La recherche est alors plus consistante et peut convenir à des élèves jusqu'à 12 ans, voire au-delà. Il y a quatre sommes possibles : 9, 10 (version d'origine), 11 et 12, avec des dispositions des nombres bien caractéristiques.

On peut également proposer le problème sans que la somme soit donnée ou demander si 8 ou 13 sont des sommes possibles ou encore proposer d'autres séries de six nombres à placer.

POUR ALLER PLUS LOIN AVEC CES PROBLÈMES

Le lecteur pourra faire part de ses expériences à la rédaction de Grand N (revue.grandn@ujf-grenoble.fr) ou aux animateurs du RMT. Il peut se rendre sur le site www.maths-armt.org où il trouvera des commentaires plus détaillés sur ces deux problèmes et où il pourra communiquer ses impressions ou résultats sur sa pratique en classe de ces « Points de départ ».